Gewichtete Räume stetiger vektorwertiger Funktionen und das injektive Tensorprodukt. I

Von *Klaus-Dieter Bierstedt* in Kaiserslautern

Räume N-mal stetig differenzierbarer Funktionen auf dem $\boldsymbol{R}^n$ ($n \geqq 1, 0 \leqq N \leqq \infty$), deren Topologie mit Hilfe eines Systems stetiger Gewichtsfunktionen gegeben wird, hat L. Schwartz [23] (im Hinblick auf vektorwertige Distributionen) untersucht. Eine vereinheitlichende Theorie und allgemeine Klassen $CV(X)$ und $CV_0(X)$ lokalkonvexer Räume stetiger skalarer Funktionen auf einem vollständig regulären Hausdorffraum X führte L. Nachbin (vgl. [18]) zur Behandlung des sog. gewichteten Approximationsproblems ein (einer Verallgemeinerung des Bernsteinschen Approximationsproblems). Dabei sind auch Systeme V *von oben halbstetiger* Gewichtsfunktionen zugelassen. Die Räume $CV_0(X)$ wurden später von W. H. Summers in [26], [27] und [28] studiert. Eines der interessantesten Beispiele ist der zuerst von R. C. Buck [1] betrachtete Raum $(CB(X), \beta)$ der stetigen beschränkten Funktionen auf X mit der *strikten* Topologie β.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit entsprechenden *gewichteten Räumen* $CV(X, E)$ und $CV_0(X, E)$ *vektorwertiger* Funktionen; der Bildraum E ist dabei ein topologischer Vektorraum. Die Klasse $CV_0(X, E)$ wurde für lokalkonvexe E unabhängig von der Dissertation des Verfassers von J. B. Prolla [19] eingeführt und in anderer Richtung untersucht ([20], [21]), wobei topologische Tensorprodukte nicht benötigt werden. Mit Hilfe der Tensorprodukt-Methode lassen sich jedoch auch, wie hier unter anderem gezeigt wird, für nicht notwendig lokalkonvexe Räume E noch interessante Ergebnisse erreichen; die Resultate sind in diesem Fall von Bedeutung für die Integrationstheorie von stetigen Funktionen mit Werten in nicht lokalkonvexen Räumen.

Bei der Behandlung vektorwertiger Funktionen verwendet man mit Vorteil neben dem *injektiven* (ε-) *Tensorprodukt* das von L. Schwartz [24] eingeführte ε-Produkt. Dieser Begriff wird hier auf den vorliegenden Fall übertragen und damit eine wesentlich feinere neue Methode zur systematischen Behandlung von Räumen vektorwertiger stetiger Funktionen entwickelt. Dabei taucht dann die folgende Approximationsfrage auf: Welche vektorwertigen Funktionen lassen sich durch Funktionen mit Werten in endlichdimensionalen Unterräumen im Sinne einer gewichteten Topologie approximieren? Dieses Problem, das in der Arbeit in wichtigen Fällen gelöst wird, steht im Zusammenhang mit der von A. Grothendieck definierten *Approximationseigenschaft* ([10]) für gewichtete Räume *skalarer* Funktionen, wie wir beweisen werden.

Es wird in Teil I insbesondere gezeigt, daß *für vollständigen lokalkonvexen Raum E die Räume $CV_0(X, E)$, das ε-Produkt $E\varepsilon CV_0(X)$ und das injektive Tensorprodukt*

$E \check{\otimes}_\varepsilon CV_0(X)$ unter sehr allgemeinen Voraussetzungen an X und V zusammenfallen. Auf diese Weise wird auch die Approximationseigenschaft für eine große Klasse von Räumen $CV_0(X)$ bewiesen.

Teil II wird sich eingehender mit Räumen des Typs $CV(X, E)$ befassen und Anwendungen auf Unterräume wie etwa gewichtete Räume *holomorpher* vektorwertiger Funktionen bringen. In einer späteren Arbeit soll die entwickelte Methode zur Herleitung von Darstellungssätzen für das injektive Tensorprodukt und das sog. *Slice-Produkt* zweier gewichteter Räume verwendet werden, wobei man allgemeine Aussagen über die Approximierbarkeit stetiger oder holomorpher Funktionen von zwei Variablen durch endliche Summen von Produkten von Funktionen in je einer Veränderlichen erhält.

Die vorliegende Arbeit I ist in fünf Paragraphen unterteilt. In 1. werden die gewichteten topologischen Vektorräume vektorwertiger stetiger Funktionen allgemein eingeführt und grundlegende Eigenschaften wie Separiertheit und Vollständigkeit untersucht. In 2. sind die wichtigsten Beispiele zusammengetragen. Darunter befindet sich interessanterweise auch, wie gezeigt wird (**2. 8**), der Raum $(C_c(X, E), i)$ derjenigen stetigen Funktionen von einem lokalkompakten σ-kompakten Raum X in einen normierten Raum E, deren Träger kompakt ist, unter der Topologie i des strikten induktiven Limes. Abschließend wird festgestellt (**2. 11**), daß L. Schwartz [23] sich nur mit dem speziellen Fall beschäftigt hat, in dem $CV(X, E) = CV_0(X, E)$ für alle lokalkonvexen E gilt.

In 3. werden das abstrakte ε-Produkt $E \varepsilon Y$ und das injektive Tensorprodukt $E \check{\otimes}_\varepsilon Y$ eines topologischen Vektorraumes E mit einem lokalkonvexen Raum Y betrachtet und in Zusammenhang mit der Approximationseigenschaft gebracht. Das ε-Produkt war bisher nur für zwei lokalkonvexe Räume benutzt worden. Die in 3. gewonnenen Sätze werden in 4. auf den Fall $Y =$ Teilraum von $CV(X)$ angewandt (**4. 4, 5**). Im Spezialfall eines kompakten Grundraumes X und der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz *bzgl. der absolutkonvexen Hülle des Wertebereiches* (Etter [5], Gramsch [7]) stellen wir die Beziehung unserer Sätze zu den Resultaten in Kapitel 7 von L. Waelbroeck [30] her.

Teil 5. betrachtet dann die Räume $CV_0(X, E)$ für lokalkonvexe E. Hier erhalten wir die bereits erwähnten Hauptergebnisse der Arbeit: einen Darstellungssatz für $CV_0(X, E)$ als ε-Produkt $E \varepsilon CV_0(X)$ und als injektives Tensorprodukt $E \check{\otimes}_\varepsilon CV_0(X)$ und gleichzeitig einen Beweis für die Approximationseigenschaft von $CV_0(X)$ (**5. 5, 11**).

Diese Arbeit beruht auf der Dissertation des Verfassers an der Joh. Gutenberg-Universität Mainz unter der Leitung von Herrn Prof. Dr. B. Gramsch. Ihm und Herrn Dr. D. Vogt danke ich für das Interesse und für einige Bemerkungen zu der Arbeit. Mein Dank gilt auch den Herren H. Buchwalter, J. B. Prolla, A. H. Shuchat und W. H. Summers für die Übersendung von Vorabdrucken ihrer Artikel.

1. Gewichtete Räume stetiger vektorwertiger Funktionen

In diesem 1. Teil führen wir zunächst die verwendeten Bezeichnungen ein, definieren die gewichteten Räume stetiger vektorwertiger Funktionen und leiten einfache Eigenschaften dieser Räume her. Die Beweise sind klar und werden deshalb weggelassen.

Im folgenden seien X ein vollständig regulärer Hausdorffraum und E ein separierter topologischer Vektorraum, zunächst nicht notwendig lokalkonvex. Der Einfachheit halber nehmen wir $\boldsymbol{C}$ als Skalarenkörper; die Ergebnisse bleiben oft auch für reelle Skalare richtig. Die Topologie von E werde o. B. d. A. durch das feste gerichtete System $\{q_\alpha;\ \alpha \in A\}$ von (F)-Halbnormen gegeben, s. Kelley, Namioka [14], 2. 6. C. Alle auftretenden Definitionen hängen jedoch nicht von dem speziellen System $\{q_\alpha\}$, sondern nur von der Topologie von E ab.

Nach W. H. Summers [27] bezeichnet man ein (nichtleeres) System V reellwertiger, nichtnegativer, von oben halbstetiger Funktionen auf X, das in dem Sinne gerichtet ist, daß zu $v_1, v_2 \in V$ und $\lambda \geqq 0$ stets $v \in V$ existiert mit $\lambda v_1, \lambda v_2 \leqq v$ (punktweise auf X), als *Nachbin-Familie* auf X. Sind U und V zwei Nachbin-Familien auf X und existiert zu jedem $u \in U$ ein $v \in V$, derart, daß $u \leqq v$, dann schreibt man $U \leqq V$. Und $U \approx V$ besagt $U \leqq V$ und $V \leqq U$; weiterhin bedeute $V > 0$, daß es zu jedem $x \in X$ ein v aus der Nachbin-Familie V gibt mit $v(x) > 0$.

$C(X, E)$ bezeichne den linearen Raum aller stetigen E-wertigen Funktionen auf X, und ΓM sei für eine Menge M in E die absolutkonvexe Hülle von M. Eine Funktion f von X in E *verschwindet im Unendlichen*, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $\alpha \in A$ eine kompakte Menge $K = K(f, \varepsilon, \alpha)$ in X existiert mit $q_\alpha(f(x)) < \varepsilon$ für alle $x \in X \setminus K$. Schließlich sagt man noch, *f gehöre zur Klasse $B_{00}\Gamma(X, E)$*, wenn $\Gamma(f(X))$ in E beschränkt ist und es für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $\alpha \in A$ ein kompaktes $K = K(f, \varepsilon, \alpha)$ in X gibt mit $q_\alpha(e) < \varepsilon$ für alle $e \in \Gamma(f(X \setminus K))$.

Die gewichteten Räume stetiger vektorwertiger Funktionen, die wir nun definieren, wurden im skalaren Fall $E = \mathbf{C}$ zuerst von L. Nachbin betrachtet (vgl. [18]):

1. Definition. Es sei

$$CV(X, E) = \{f \in C(X, E);\ (vf)(X) \text{ beschränkt in } E \text{ für jedes } v \in V\},$$

$$CV_0(X, E) = \{f \in C(X, E);\ vf \text{ verschwindet im Unendlichen für jedes } v \in V\},$$

$$CV\Gamma(X, E) = \{f \in C(X, E);\ \Gamma((vf)(X)) \text{ beschränkt in } E \text{ für jedes } v \in V\},$$

$$CV_{00}\Gamma(X, E) = \{f \in C(X, E);\ vf \text{ gehört zur Klasse } B_{00}\Gamma(X, E) \text{ für jedes } v \in V\},$$

wobei vf jeweils die Funktion $(vf)(x) = v(x)f(x)$ von X in E angibt ($x \in X$).

Diese linearen Räume sind Moduln über dem Raum $CB(X)$ der stetigen beschränkten skalaren Funktionen auf X.

Auf $CV(X, E)$ bzw. $CV\Gamma(X, E)$ sind $\{bv_\alpha;\ \alpha \in A,\ v \in V\}$ bzw. $\{b\gamma v_\alpha;\ \alpha \in A,\ v \in V\}$ mit

$$bv_\alpha(f) = \sup_{x \in X} q_\alpha(v(x)f(x)) \qquad \text{für } f \in CV(X, E)$$

und

$$b\gamma v_\alpha(f) = \sup \{q_\alpha(e);\ e \in \Gamma((vf)(X))\} \quad \text{für } f \in CV\Gamma(X, E)$$

gerichtete Systeme von (F)-Halbnormen und geben somit Topologien, die mit den linearen Strukturen verträglich sind.

Ein System $\{f_\beta;\ \beta \in B\}$ in $CV(X, E)$ bzw. $CV\Gamma(X, E)$ konvergiert genau dann in der Topologie dieses Raumes gegen $f \in CV(X, E)$ bzw. $CV\Gamma(X, E)$, wenn für jedes $v \in V$ das System $\{vf_\beta\}$ gleichmäßig gegen vf konvergiert bzw. gegen vf *ultrakonvergent* ist (d. h. gleichmäßig *bzgl. der absolutkonvexen Hülle des Wertebereiches* gegen vf konvergiert, vgl. Etter [5], Def. 2. 2).

2. Bemerkung. $CV_0(X, E)$ ist abgeschlossener linearer Unterraum von $CV(X, E)$, und $CV_{00}\Gamma(X, E)$ ist abgeschlossener linearer Unterraum von $CV\Gamma(X, E)$.

Wir versehen diese Unterräume mit den induzierten Topologien.

Ist $v \in V$, $f \in CV(X, E)$ und $\alpha \in A$, so ist die Funktion $q_\alpha vf$, definiert durch $(q_\alpha vf)(x) = q_\alpha(v(x)f(x))$ für $x \in X$, von oben halbstetig auf X. $f \in CV(X, E)$ gehört genau dann zu $CV_0(X, E)$, wenn für jedes $v \in V$, jedes $\alpha \in A$ und jedes $\varepsilon > 0$ die abgeschlossene Menge $\{x \in X;\ q_\alpha(v(x)f(x)) \geqq \varepsilon\}$ kompakt in X ist. $q_\alpha vf$ nimmt für $v \in V$, $\alpha \in A$ und $f \in CV_0(X, E)$ auf jeder nichtleeren abgeschlossenen Teilmenge Y von X ein Maximum an.

3. Bemerkung. Genügt V (und X) der Bedingung:

($\ast$) Für jedes $v \in V$ gibt es $v' \in V$, derart, daß gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ findet man eine kompakte Menge K in X mit der Eigenschaft, daß $v(x) \leqq \varepsilon v'(x)$ für alle $x \in X \setminus K$, dann ist $CV(X, E) = CV_0(X, E)$.

Sind die Gewichtsfunktionen überall von Null verschieden, so ist ($\ast$) äquivalent zu:

($\ast\ast$) Zu jedem $v \in V$ gibt es $v' \in V$, derart, daß die Funktion v/v' im Unendlichen verschwindet.

$CV\Gamma(X, E)$ ist i. a. ein echter Teilraum von $CV(X, E)$ mit einer stärkeren Topologie als der von $CV(X, E)$ induzierten, und ähnliches gilt für $CV_{00}\Gamma(X, E)$ in $CV_0(X, E)$. Jedoch stimmen die Räume $CV(X, E)$ und $CV\Gamma(X, E)$ bzw. $CV_0(X, E)$ und $CV_{00}\Gamma(X, E)$ mit ihren Topologien (und Halbnormensystemen) überein, falls E *lokalkonvex* ist. Sie sind dann ebenfalls lokalkonvex. Wir vereinbaren

$$CV(X) = CV(X, \mathbf{C}) \text{ und } CV_0(X) = CV_0(X, \mathbf{C}).$$

Die Topologie der Räume $CV(X, E)$ bzw. $CV\Gamma(X, E)$ ist separiert, falls nur $V > 0$ gilt. Allgemeiner erhält man (analog zu Summers [27]):

4. Bemerkung. Die Topologie von $CV(X, E)$ bzw. $CV\Gamma(X, E)$ ist genau dann separiert, wenn es für jede nichtleere offene Menge U in X ein $v \in V$ gibt, dessen Restriktion auf U nicht identisch gleich Null ist.

Dies folgt aus der vollständigen Regularität von X.

Summers [28], 2. 1 hat bereits bemerkt, daß im skalaren Fall für gewisse fest vorgegebene Nachbin-Familien V aus *stetigen* Funktionen die Separiertheit der Topologie von $CV(X)$ bzw. $CV_0(X)$ eine starke Einschränkung an X bedeutet und der Bedingung nahekommt, daß X lokalkompakt sein muß. Der betreffende Satz gilt auch für vektorwertige Funktionen und ist einer der Gründe, *halbstetige* Gewichtsfunktionen zuzulassen.

In Zukunft setzen wir stets voraus, daß für alle vorkommenden Nachbin-Familien V die Topologie von $CV(X, E)$ bzw. $CV\Gamma(X, E)$ Hausdorffsch ist.

Unser nächstes Ziel ist es, hinreichende Bedingungen dafür zu finden, daß $CV(X, E)$ bzw. $CV\Gamma(X, E)$ ein *vollständiger* topologischer Vektorraum ist. Dazu beachte man zunächst, daß für Nachbin-Familien U und V auf X mit $U \leqq V$ gilt:

(1) $CV(X, E) < CU(X, E)$ bzw. $CV\Gamma(X, E) < CU\Gamma(X, E)$,

(2) die vom größeren auf dem kleineren Raum induzierte Topologie ist schwächer als die kanonische Topologie auf dem Teilraum.

Damit gilt das *Vergleichskriterium* (vgl. Summers [27], 3. 6):

5. Satz. *Für eine Nachbin-Familie V auf X ist $CV(X, E)$ bzw. $CV\Gamma(X, E)$ vollständig, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(1) *E ist vollständig,*

(2) *es existiert eine Nachbin-Familie U auf X mit*

(i) *$U > 0$ und $U \leqq V$,*

(ii) *$CU(X, E)$ bzw. $CU\Gamma(X, E)$ ist vollständig.*

Der Beweis dieses Satzes ist nach dem vorhergehenden klar, weil Konvergenz von $\{f_\beta; \beta \in B\}$ in $CV(X, E)$ bzw. $CV\Gamma(X, E)$ Konvergenz in $CU(X, E)$ bzw. $CU\Gamma(X, E)$ und punktweise Konvergenz von $\{f_\beta\}$ impliziert ($U > 0$).

Die Räume $CV_0(X, E)$ wurden für lokalkonvexe E auch von J. B. Prolla [19] betrachtet. Theorem 3 dieser Arbeit liefert etwas allgemeinere Bedingungen als 5 für die Vollständigkeit von $CV_0(X, E)$.

Zwei Spezialfälle interessieren besonders in 5: Ist Z die Nachbin-Familie, die *aus allen auf X konstanten nichtnegativen Funktionen* besteht, so ist

$$CZ(X, E) = (CB(X, E), \sigma),$$

der Raum aller auf X stetigen beschränkten Funktionen mit Werten in E unter der Topologie σ der *gleichmäßigen Konvergenz auf X*, vollständig für vollständiges E und beliebigen Raum X. Andererseits gilt für die Nachbin-Familie

$$W = \{\lambda\chi_K;\ \lambda > 0,\ K \text{ kompakt in } X\},$$

wobei χ_K = charakteristische Funktion von K,

$$CW(X, E) = (C(X, E), \tau)$$

mit τ = Topologie der *kompakten Konvergenz auf X*, und dieser Raum ist vollständig für E vollständig und X = k_R-*Raum* (d. h. eine Abbildung von X in irgendeinen vollständig regulären Raum, deren Restriktion auf jede kompakte Teilmenge von X stetig ist, ist bereits stetig, s. H. Buchwalter [32], (2. 3. 7)). Man beachte, daß jeder (vollständig reguläre) k-Raum, also auch jeder lokalkompakte oder metrisierbare Raum k_R-Raum ist.

6. Korollar. *$CV(X, E)$, $CV_0(X, E)$, $CV\Gamma(X, E)$ und $CV_{00}\Gamma(X, E)$ sind vollständig, falls E vollständig und*

(1) *$Z \leqq V$ und X vollständig regulär oder*

(2) *$W \leqq V$ und X vollständig regulärer k_R-Raum.*

Fall (2) trifft insbesondere zu, wenn $V > 0$ gilt, X k_R-Raum ist und V nur aus *stetigen* Funktionen besteht.

Zum Schluß dieses 1. Teils beachten wir noch:

7. Bemerkung. Seien $v \in V$ und $f \in CV_0(X, E)$ beliebig.

(1) Dann ist $(vf)(X)$ präkompakt in E.

(2) Für lokalkompaktes X und stetige Gewichtsfunktion v ist $(vf)(X)$ für beliebiges E relativkompakt.

Ein einfacher Beweis von (2) ergibt sich mit Hilfe der Alexandroff-Kompaktifizierung von X. Bemerkung 7 zeigt, daß folgende Definition von Interesse ist:

8. Definition. Es sei

$$CV^p(X, E) = \{f \in C(X, E);\ (vf)(X) \text{ präkompakt in } E \text{ für jedes } v \in V\},$$

$$CV^p\Gamma(X, E) = \{f \in C(X, E);\ \Gamma((vf)(X)) \text{ präkompakt in } E \text{ für jedes } v \in V\},$$

$$CV_{00}^p\Gamma(X, E) = CV_{00}\Gamma(X, E) \cap CV^p\Gamma(X, E).$$

$CV^p(X, E)$ ist *abgeschlossener* linearer Unterraum von $CV(X, E)$, und $CV^p\Gamma(X, E)$ und $CV_{00}^p\Gamma(X, E)$ sind *abgeschlossen* in $CV\Gamma(X, E)$ (vgl. Kelley, Namioka [14], 2. 8. 3). Wir geben ihnen die von $CV(X, E)$ bzw. $CV\Gamma(X, E)$ induzierte Topologie. Nach 7 gilt $CV_0(X, E) < CV^p(X, E)$ und, falls E *lokalkonvex* ist, $CV_0(X, E) = CV_{00}^p\Gamma(X, E)$.

2. Beispiele

Hier betrachten wir eine Reihe von Beispielen für Nachbin-Familien V und Räume des Typs $CV(X, E)$ und $CV_0(X, E)$.

1. Beispiel. Sei $\mathscr{A}$ ein nichtleeres System abgeschlossener Mengen in X derart, daß mit jeweils endlich vielen Mengen aus $\mathscr{A}$ auch ihre Vereinigung zu $\mathscr{A}$ gehört und daß zu jedem $x \in X$ ein $A \in \mathscr{A}$ existiert mit $x \in A$. Dann ist $V_{\mathscr{A}} = \{\lambda\chi_A;\ \lambda > 0,\ A \in \mathscr{A}\}$ eine Nachbin-Familie auf X, und es gilt $V_{\mathscr{A}} > 0$. (Die charakteristische Funktion χ_M einer Menge $M < X$ ist genau dann von oben halbstetig, wenn M abgeschlossen in X.) Sonderfälle hiervon sind:

(i) $\mathscr{A} = \mathscr{F} =$ System aller endlichen Mengen aus X; auch für nicht lokalkonvexe E gilt $CV_{\mathscr{F}}(X, E) = CV_{\mathscr{F}00}\Gamma(X, E) = (C(X, E), p)$, wobei p die Topologie der punktweisen Konvergenz ist;

(ii) $\mathscr{A} = \mathscr{K} =$ System aller kompakten Mengen aus X, $V_{\mathscr{A}} = W$ wie vorn; $CW(X, E) = CW_0(X, E) = (C(X, E), \tau)$.

(iii) Eine Menge B in einem vollständig regulären Raum X heißt *X-beschränkt* ([32], (5. 1. 1)), wenn jede Funktion aus $C(X) = C(X, \boldsymbol{C})$ auf B beschränkt ist. Sei nun $\mathscr{A}$ das System aller abgeschlossenen X-beschränkten Mengen in X; dann stellt $V_{\mathscr{A}}$ eine Nachbin-Familie auf X mit $W \leqq V_{\mathscr{A}}$ dar, und für lokalkonvexe E stimmen $CV_{\mathscr{A}}(X, E)$ und $C(X, E)$ als lineare Räume überein. Ist X selbst X-beschränkt (also *pseudokompakter* topologischer Raum), so erhält man $CV_{\mathscr{A}}(X, E) = (CB(X, E), \sigma)$ für lokalkonvexe E mit der Topologie σ der gleichmäßigen Konvergenz auf X. Wir nennen X einen *b_R-Raum*, wenn für beliebiges vollständiges lokalkonvexes E auch der Raum $CV_{\mathscr{A}}(X, E)$ vollständig ist (vgl. Buchwalter [34], 3). Jedes pseudokompakte X ist b_R-Raum.

2. Beispiel. Ist U linearer Unterraum von $C(X)$, so ist das System U^+ der nichtnegativen Funktionen aus U eine Nachbin-Familie auf X. Als Spezialfälle ergeben sich dabei:

(i) $U = C_c(X) =$ stetige Funktionen mit kompaktem Träger,

(ii) $U = C_0(X) =$ stetige Funktionen, die im Unendlichen verschwinden. Es kann der Fall eintreten, daß dieser Raum nur aus der Null besteht, z. B. für $X =$ rationale Zahlen des Intervalls $[0, 1]$ mit der von $\boldsymbol{R}$ induzierten Topologie. Jedoch trennt für *lokalkompaktes* X bereits $C_c(X)$ die Punkte.

Bei Summers [27], 3. 4 ist gezeigt, daß X genau dann lokalkompakt ist, wenn $V = C_c^+(X) \approx W$. In diesem Fall gilt wegen (1) und (2) vor 1. 5:

$$CV(X, E) = (C(X, E), \tau).$$

Bei (ii) läßt sich 1. 3 anwenden — die Bedingung $(*)$ ist mit $v'(x) = v(x)^{1/2}$ erfüllt —, so daß stets $CV(X, E) = CV_0(X, E)$ bei $V = C_0^+(X)$; für lokalkompaktes X und lokalkonvexes E stimmt dieser Raum als Menge mit $CB(X, E)$ überein (s. Buck [1], 2. 4). Die kanonische Topologie von $CV_0(X, E)$ ist die zuerst von R. C. Buck betrachtete sog. *strikte* Topologie β.

(iii) $U = CB(X)$; hier gilt für $V = CB^+(X)$ und Z wie vorn $Z \approx V$, also $CV(X, E) = (CB(X, E), \sigma)$ und $CV_0(X, E) = (C_0(X, E), \sigma) =$ stetige Funktionen von X in E, die im Unendlichen verschwinden.

Alle unter (i) bis (iii) aufgeführten Topologien und Räume $CV(X, E)$ und $CV_0(X, E)$ fallen für *kompaktes* X mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf $C(X, E)$ zusammen. Von B. Gramsch [6], 3. 1 wurde für beliebiges p mit $0 < p < 1$ ein Beispiel einer stetigen Funktion f auf dem Intervall $[0, 1]$ mit Werten in l^p angegeben, für die die Riemannschen Zwischensummen divergieren. So ist zwar $f([0, 1])$ kompakt in l^p, aber $\Gamma(f([0,1]))$ nicht beschränkt. I. a. gilt daher für keine der Nachbin-Familien $V = U^+$ in (i) bis (iii)

$$CV(X, E) = CV\Gamma(X, E) \text{ oder } CV_0(X, E) = CV_{00}\Gamma(X, E),$$

wenn E nicht lokalkonvex ist.

(iv) $U = C(X)$. Mit diesem Fall beschäftigen wir uns nun eingehender.

Für $V = C^+(X)$ gilt i. a. nicht einmal $CV(X) = CV_0(X)$; jeder vollständig reguläre, pseudokompakte, aber nicht kompakte Raum X liefert ein Gegenbeispiel. Andererseits sieht man:

3. Bemerkung. Existiert eine Funktion $g \in C^+(X)$ mit der Eigenschaft, daß für jedes $r > 0$ die Menge $\{x \in X; g(x) \leqq r\}$ kompakt ist, erhält man $CV(X, E) = CV_0(X, E)$ für beliebiges E.

Beweis. Bedingung $(*)$ aus 1. 3 ist dann mit $v' = gv$ erfüllt.

4. Folgerung. Die Voraussetzung von 3 trifft insbesondere zu, wenn X lokalkompakt und im Unendlichen abzählbar ist (vgl. etwa Ehrenpreis [4], 2. 7).

Wir zeigen im folgenden, daß für solche X und *normierte* E

$CV_0(X, E) = (C_c(X, E), i) =$ Raum aller stetigen E-wertigen Funktionen auf X mit kompaktem Träger unter der (stets separierten) *Topologie i des induktiven Limes.*

Dazu benötigen wir einige Hilfssätze, die auch von unabhängigem Interesse sind.

5. Lemma. (1) *Für beliebige Nachbin-Familien V und lokalkompakte X oder für $V < C^+(X)$ und beliebige vollständig reguläre X liegt $C_c(X, E)$ dicht in $CV_0(X, E)$. Für lokalkompaktes X ist auch $C_c\Gamma(X, E) = \{f \in C_c(X, E); \Gamma(f(X))$ beschränkt in $E\}$ dicht in $CV_{00}\Gamma(X, E)$, V beliebig.*

(2) *Ist E lokalkonvex, X lokalkompakt und $CB^+(X) \leqq V$, so gilt*

$$C_c(X, E) < CV_0(X, E) < C_0(X, E),$$

und die von $CV_0(X, E)$ induzierte Topologie ist auf $C_c(X, E)$ schwächer als die induktive Limes-Topologie i.

Beweis. (1) folgt durch Multiplikation mit geeigneten Abschneidefunktionen, (2) beweist man für $V = C^+(X)$ analog zu Summers [28], 3. 2, allgemein aber einfacher auf folgende Weise: $(C_c(X, E), i)$ ist induktiver Limes der Räume

$$C_K(X, E) = \{f \in C_c(X, E);\ K \text{ enthält den Träger supp } f \text{ der Funktion } f\},$$

versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf K, wobei K alle kompakten Mengen in X durchläuft; $(C_c(X, E), i)$ induziert auf jedem $C_K(X, E)$ die Ausgangstopologie. Um zu zeigen, daß die Identität von $(C_c(X, E), i)$ in $CV_0(X, E)$ stetig ist, genügt es, die Stetigkeit der kanonischen Abbildung von $C_K(X, E)$ in $CV_0(X, E)$ für beliebiges kompaktes K in X nachzuweisen, und dies ist klar, weil jede (von oben halbstetige) Funktion $v \in V$ auf K beschränkt ist.

6. Satz. *Sei X vollständig regulär, $V = C^+(X)$ und E ein lokalkonvexer Raum, dessen Topologie durch das System $\{p_\alpha; \alpha \in A\}$ von Halbnormen gegeben wird.*

(1) *Dann stimmt als linearer Raum $CV(X, E)$ mit der Menge aller $f \in C(X, E)$ überein, für die bei beliebigem $\alpha \in A$ der Träger* supp $p_\alpha f$ *der Funktion $x \to p_\alpha(f(x))$ eine (abgeschlossene) X-beschränkte (äquivalent: pseudokompakte) Menge ist.*

Wir sagen in diesem Fall, $f \in C(X, E)$ *hat unter jeder Halbnorm X-beschränkten Träger*, und bezeichnen die Menge aller solchen f mit $C_{fb}(X, E)$.

(2) *Ebenso sind als Mengen $CV_0(X, E)$ und $C_{fb}(X, E) \cap C_0(X, E)$ gleich.*

(3) *Ist X beliebig und E z. B. normiert, so hat $f \in CV(X, E)$ X-beschränkten Träger; ist in X jede abgeschlossene pseudokompakte Menge kompakt* (etwa *X Raum vom Typ μ* im Sinne von H. Buchwalter [33], p. 107) *und E beliebig, dann hat $f \in C_{fb}(X, E)$ unter jeder Halbnorm kompakten Träger.*

Nach [33], (6. 3. 4), (6. 4. 1) und (7. 2. 3) ist jeder parakompakte Raum vom Typ μ, ebenso jeder Raum, auf dem eine verträgliche vollständige uniforme Struktur existiert.

(4) *Für normiertes E und parakompaktes X z. B. gilt also die Gleichheit der linearen Räume $CV(X, E)$, $CV_0(X, E)$ und $C_c(X, E)$.*

Beweis von (1) *und* (2). 1. supp $p_\alpha f$ ist Abschließung der offenen Menge

$$\{x \in X;\ (p_\alpha f)(x) \neq 0\}.$$

Deshalb sind *nach dem Satz von Hager und Johnson* (s. [32], (5. 2. 4)) supp $p_\alpha f$ X-beschränkt und supp $p_\alpha f$ pseudokompakt äquivalente Aussagen.

2. Offenbar gilt $C_{fb}(X, E) < CV(X, E)$ und $C_{fb}(X, E) \cap C_0(X, E) < CV_0(X, E)$. Um die umgekehrten Inklusionen zu zeigen, nimmt man zuerst an, daß $f \in CV(X, E)$, aber $f \notin C_{fb}(X, E)$. Dann gibt es $\alpha \in A$ derart, daß $\{x \in X;\ (p_\alpha f)(x) \neq 0\}$ nicht X-beschränkt ist. Man benutzt nun Summers [26], 2. 20, um eine Funktion $v \in C^+(X)$ zu konstruieren, für die $v(p_\alpha f)$ nicht beschränkt auf X im Widerspruch zu $f \in CV(X, E)$. Es ist klar, daß daraus $CV_0(X, E) < C_{fb}(X, E) \cap C_0(X, E)$ folgt, w. z. b. w.

Sei jetzt stets $V = C^+(X)$, X lokalkompakt und im Unendlichen abzählbar und $(E, \|\ \|)$ normiert. Dann gilt 6. (4), und es ist von Vorteil, eine andere Darstellung für die Topologie i zu geben (analog zu L. Schwartz [23], 1. Prop. 2, p. 95, *mit Hilfe einer Zerlegung der Eins*):

7. Lemma. *Sei $\{U_n\}$ eine feste Folge offener relativkompakter Mengen in X mit $X = \bigcup_n U_n$ und $\overline{U_n} < U_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$; setze $U_0 = \emptyset$. Ist $\varepsilon = \{\varepsilon_n;\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$ $(\varepsilon_n > 0$, ε_n monoton fallend), so definiere*

$$V_\varepsilon = \{f \in C_c(X, E);\ \sup_{x \in X \setminus U_n} \|f(x)\| \leqq \varepsilon_n\ (n = 0, 1, \ldots)\}.$$

Durchläuft ε alle Folgen dieser Art, so bilden die Mengen V_ε eine Nullumgebungsbasis der Topologie i in $C_c(X, E)$.

Hier haben wir einen *strikten* induktiven Limes vor uns.

8. Satz. *Sei X lokalkompakt und im Unendlichen abzählbar, E normiert und $V = C^+(X)$. Dann gilt $CV(X, E) = CV_0(X, E) = (C_c(X, E), i)$.*

Beweis. Es muß nach 5. (2) und 6 nur gezeigt werden, daß die Topologie von $CV_0(X, E)$ stärker ist als i. Sei dazu V_ε wie in 7 und konstruiere wie in 4 ein $v \in C^+(X)$ mit $v(x) \geqq 1/\varepsilon_n$ auf $X \setminus U_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Dann ist die Nullumgebung

$$V' = \{f \in CV_0(X, E);\ \sup_{x \in X} v(x)\, \|f(x)\| \leqq 1\} \text{ in } CV_0(X, E)$$

eine Teilmenge von V_ε, w. z. b. w.

Für skalare Funktionen wurde Satz 8 von W. H. Summers in seiner Dissertation [26], 2. 28 auf etwas andere Art bewiesen. In [26], 2. 19 ist auch Satz 6. (2) für skalare Funktionen gezeigt und das Problem der Gleichheit von $CV_0(X)$ und $C_c(X)$ als Mengen genauer untersucht. Bei Summers sind viele Beispiele angegeben, und es zeigt sich, daß Lokalkompaktheit und die Bedingung aus 6. (4) nicht einmal für $E = \boldsymbol{C}$ hinreichend für die Gültigkeit von 8 sind ([26], 3. 28. (2)). Die Voraussetzung der Normiertheit an E kann man ebenfalls nicht durch die Voraussetzung E lokalkonvex ersetzen:

Wegen 4 ist *nach dem Satz von Mackey* über die beschränkten Mengen in einem beliebigen lokalkonvexen Raum E eine Funktion $f \in C(X, E)$ für lokalkompaktes σ-kompaktes X genau dann Element von $CV(X, E) = CV_0(X, E)$ bei $V = C^+(X)$, wenn für jede stetige Linearform e' auf E die skalare Funktion $x \to e'(f(x))\,(x \in X)$ zu $CV(X) = CV_0(X) = C_c(X)$ gehört. Man sagt dann, *f hat skalar kompakten Träger*. Eine ähnliche Äquivalenz gilt jedoch i. a. nicht für den Raum $C_c(X, E)$, wenn E nicht normiert: Schwartz [23], p. 106 gibt ein Beispiel eines Raumes E an derart, daß eine stetige Funktion von $X = \boldsymbol{R}^n$ in E skalar kompakten Träger hat, ohne zu $C_c(X, E)$ zu gehören.

Wir wenden uns nun kurz Unterräumen von $CV(X, E)$ bzw. $CV_0(X, E)$ zu und geben dabei Beispiele an, in denen X eine sehr spezielle Form hat:

9. Beispiel. Für X = offene Menge in $\boldsymbol{C}^n$ und E = quasivollständiger lokalkonvexer Raum über $\boldsymbol{C}$ sei $H(X, E)$ der lineare Raum der *auf X holomorphen Funktionen mit Werten in E* (im Sinne von A. Grothendieck [9]), d. h. eine Funktion f von X in E gehört zu $H(X, E)$ genau dann, wenn für jede stetige Linearform e' auf E die *skalare* Funktion $x \to e'(f(x))$ holomorph auf E ist. Jede solche Funktion ist stetig (vgl. etwa Hervé [11], III. 1. 2, Th. 1). Definiere nun als *gewichtete Räume holomorpher vektorwertiger Funktionen*

$$HV(X, E) = H(X, E) \cap CV(X, E) \text{ und } HV_0(X, E) = H(X, E) \cap CV_0(X, E)$$

mit der induzierten Topologie. Ist $W \leqq V$ (d. h. die gewichtete Topologie stärker als die Topologie der kompakten Konvergenz), so sind $HV(X, E)$ und $HV_0(X, E)$ in $CV(X, E)$ abgeschlossen, also vollständig für vollständiges E.

Es soll zum Schluß noch darauf hingewiesen werden, daß für $X = \boldsymbol{R}^n$ L. Schwartz in [23] auch gewichtete Räume von stetigen Funktionen auf X mit Werten in lokalkonvexen Räumen E betrachtet hat, die unseren Räumen $CV(X, E)$ entsprechen. Schwartz läßt nur stetige Gewichtsfunktionen zu; seine Methoden lassen sich oft nur für den Fall lokalkompakter und im Unendlichen abzählbarer Räume X in ähnlicher Weise verwenden. Auf p. 98 von [23] wird eine weitere Voraussetzung gemacht, die Räume vom Typ $CV(X)$ i. a. nicht erfüllen; diese Forderung heißt bei Schwartz H_4), wir nennen sie (S).

10. Definition. Der Raum $CV(X)$ mit $W \leqq V$ erfüllt *Bedingung* (S), wenn auf jeder beschränkten Menge in $CV(X)$ die gewichtete Topologie mit der Topologie τ der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Mengen aus X zusammenfällt.

Bedingung (S) steht in engem Zusammenhang mit $(*)$ (vgl. 1. 3); man erhält nämlich:

11. Satz. *Sei V Nachbin-Familie auf dem vollständig regulären Raum X mit $W \leqq V$.*

(1) *Ist dann $(*)$ aus* 1. 3 *erfüllt, so gilt auch* (S).

(2) *Wenn $CV(X)$ Bedingung* (S) *genügt, muß $CV(X) = CV_0(X)$ sein.*

Beweis. Zu (1): Sei B eine beschränkte Menge in $CV(X)$ und

$$b\,v(f) = \sup_{x \in X} v(x)\,|\,f(x)\,| \quad \text{für } f \in CV(X).$$

Dann gilt für beliebiges $v \in V$: $\sup\,\{b\,v(f);\, f \in B\} \leqq M_v$, $M_v > 0$. Wegen $(*)$ gibt es also für jedes feste $v \in V$ und für jedes feste $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge K in X mit $v(x)\,|\,f(x)\,| \leqq \varepsilon$ auf $X \setminus K$, $f \in B$ beliebig. Sei $N > 0$ so bestimmt, daß $v(x) \leqq N$ auf K. Ist $U_{v,\varepsilon} = \{f \in CV(X);\, b\,v(f) \leqq \varepsilon\}$ eine Nullumgebung in $CV(X)$, so muß U, Nullumgebung bzgl. τ, gefunden werden mit $U \cap B < U_{v,\varepsilon} \cap B$. Wähle für v und ε die Menge K wie oben; dann leistet $U = \{f \in C(X);\ \sup_{x \in K} |f(x)| \leqq \varepsilon/N\}$ das Gewünschte.

Zu (2): Nehmen wir an, $f \in CV(X)$, aber $f \notin CV_0(X)$, und bezeichne $\mathscr{K}$ das System der kompakten Mengen in X. Es gibt also $v \in V$ und $\varepsilon > 0$ derart, daß zu jedem $K \in \mathscr{K}$ ein $x_K \in X \setminus K$ mit $v(x_K)\,|f(x_K)| \geqq \varepsilon$ gefunden werden kann. Konstruiere aufgrund der vollständigen Regularität von X für jedes $K \in \mathscr{K}$ eine stetige Funktion g_K auf X mit $0 \leqq g_K \leqq 1$, $g_K(x_K) = 1$, $g_K(x) = 0$ für alle $x \in K$ und definiere $f_K = g_K f$. Da $CV(X)$ Modul über $CB(X)$ ist, gehört f_K zu $CV(X)$ und $v(x_K)\,|f_K(x_K)| \geqq \varepsilon$, $f_K = 0$ auf K und $|f_K(x)| \leqq |f(x)|$ für $x \in X$. Führe auf $\mathscr{K}$ die natürliche Halbordnung mittels Inklusion ein und beachte, daß $B = \{g \in CV(X);\ |g(x)| \leqq |f(x)|$ für alle $x \in X\}$ beschränkt in $CV(X)$. Somit stellt $\{f_K;\ K \in \mathscr{K}\}$ ein gerichtetes System dar, das ganz in B enthalten ist und offensichtlich bzgl. τ, aber nicht in der gewichteten Topologie von $CV(X)$ gegen 0 konvergiert. Damit kann (S) nicht gelten, w. z. b. w.

12. Bemerkung. Bei $CV(X) = CV_0(X)$ erhält man auch $CV(X, E) = CV_0(X, E)$ für jedes lokalkonvexe E.

Denn ist $\{p_\alpha;\ \alpha \in A\}$ ein System von Halbnormen, das die Topologie von E gibt, so liegt $f \in C(X, E)$ genau dann in $CV(X, E)$ bzw. $CV_0(X, E)$, wenn für jedes α die Funktion $x \to p_\alpha(f(x))$ zu $CV(X)$ bzw. $CV_0(X)$ gehört.

L. Schwartz hat also nur diesen sehr speziellen Fall untersucht.

3. Das injektive Tensorprodukt und das ε-Produkt

Bei der Untersuchung von Räumen vektorwertiger Funktionen und Distributionen haben sich das ε-Tensorprodukt und das L. Schwartzsche ε-Produkt als geeignete Hilfsmittel erwiesen (s. [24]). In diesem Paragraphen stellen wir Sätze über das abstrakte ε-Produkt bzw. Tensorprodukt zusammen, die wir später im Fall Y = gewichteter Raum stetiger Funktionen benötigen.

Sei $(E, \{q_\alpha;\ \alpha \in A\})$ in 3 ein topologischer Vektorraum wie zu Beginn von Teil 1 eingeführt und Y ein lokalkonvexer Raum mit dem gerichteten System $\{p_\beta;\ \beta \in B\}$ von Halbnormen. Y'_c bzw. Y'_{co} ist der (topologische) Dualraum von Y, versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen präkompakten bzw. auf allen absolutkonvexen kompakten Mengen in Y.

1. Definition. Als *ε-Produkt* $E \varepsilon Y$ (bzw. *$\tilde{\varepsilon}$-Produkt* $E \tilde{\varepsilon} Y$) von E und Y bezeichnet man den topologischen Vektorraum $\mathscr{L}_e(Y'_c, E)$ (bzw. $\mathscr{L}_e(Y'_{co}, E)$) der stetigen linearen Abbildungen von Y'_c (bzw. Y'_{co}) in E, versehen jeweils mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen gleichstetigen Mengen in Y'.

Der von L. Schwartz [24] als ε-Produkt bezeichnete Raum ist für lokalkonvexes E topologisch isomorph unserem $\tilde{\varepsilon}$-Produkt. Für *quasivollständiges* Y hat man $Y'_c = Y'_{co}$, also $E \varepsilon Y = E \tilde{\varepsilon} Y$ als topologische Vektorräume, während i. a. nur gilt: $E \tilde{\varepsilon} Y$ ist linearer und topologischer Unterraum von $E \varepsilon Y$.

2. Satz. (1) *Die (separierte) Topologie des topologischen Vektorraumes $E \varepsilon Y$ wird durch das gerichtete System $\{q_{\alpha\beta};\ \alpha \in A,\ \beta \in B\}$ von (F)-Halbnormen gegeben:*

$$q_{\alpha\beta}(u) = \sup \{q_\alpha(u(y'));\ y' \in E^\circ_\beta\} \quad \textit{für alle } u \in E \varepsilon Y$$

mit E°_β = (absolute) Polare von $E_\beta = \{y \in Y;\ p_\beta(y) \leqq 1\}$.

(2) *Ist E lokalkonvex, so auch $E\varepsilon Y$. Sind E und Y normiert, so ist $E\varepsilon Y$ normierter linearer Unterraum von $\mathscr{L}(Y'_b, E)$ mit der Norm*

$$\| u \| = \sup \{\| u(y') \|_E;\ \| y' \|_{Y'} \leqq 1\}$$

($Y'_b = Y'$, versehen mit der Normtopologie).

(3) *Ist* (a) *E vollständig und Y ein S-Raum im Sinne von T. Husain* [12], 6. Def. 1 *oder ist* (b) *E lokalkonvex und sind E und Y vollständig, so ist $E\varepsilon Y$ vollständig.*

Sind E und Y Banachräume, so ist $E\varepsilon Y$ der mit der Operatornorm versehene Banachraum der linearen Abbildungen von Y' in E, deren Restriktion auf die Einheitskugel von Y' als Abbildung von $Y'[\sigma(Y', Y)]$ (d. h. Y', versehen mit der schwachen Topologie) nach E stetig ist.

(4) *Für lokalkonvexes E ist $E\tilde{\varepsilon}Y$ beim Transponieren kanonisch topologisch isomorph zu $Y\tilde{\varepsilon}E$.*

Satz 2 faßt für lokalkonvexes E Ergebnisse von L. Schwartz [24] zusammen; diese lassen sich leicht auf unseren Fall übertragen. Der Beweis von (3) (b) benutzt den *Grothendieckschen Vollständigkeitssatz* für Y.

Beweis von 2. (3) (a). Die vollständige Hülle von $E\varepsilon Y$ besteht für vollständiges E aus linearen Abbildungen von Y' in E, die, eingeschränkt auf die gleichstetigen Mengen von Y', von der Restriktion von $\sigma(Y', Y)$ in E stetig sind. Nach Definition ist *im S-Raum* Y die Topologie $\lambda(Y', Y)$ der gleichmäßigen Konvergenz auf allen präkompakten Mengen in Y die feinste Topologie auf Y', die auf jeder gleichstetigen Teilmenge mit $\sigma(Y', Y)$ übereinstimmt. Daher fällt für einen S-Raum Y und vollständiges E die Vervollständigung von $E\varepsilon Y$ mit $E\varepsilon Y$ zusammen, q. e. d.

Es sei daran erinnert, daß nach dem *Satz von Banach-Dieudonné* jeder metrisierbare lokalkonvexe Raum ein S-Raum ist.

3. Bemerkung. Seien die Voraussetzungen wie in 2. (1) und sei M eine Menge in E°_β derart, daß ΓM schwach (d. h. $\sigma(Y', Y)$ -) dicht in E°_β liegt. Dann gilt:

(1) $q_{\alpha\beta}(u) = \sup \{q_\alpha(u(y'));\ y' \in \Gamma M\}$

und

(2) falls q_α eine Halbnorm ist,

$$q_{\alpha\beta}(u) = \sup \{q_\alpha(u(y'));\ y' \in M\} \quad \text{für alle } u \in E\varepsilon Y.$$

Teil (1) ergibt sich daraus, daß eine Abbildung $u \in E\varepsilon Y$ auf jeder gleichstetigen Menge in Y' stetig von der Restriktion von $\sigma(Y', Y)$ in E ist. Wir notieren noch folgende Eigenschaft des ε-Produktes beim Übergang zu Unterräumen:

4. Bemerkung. (1) Sei E_2 linearer Unterraum des topologischen linearen Raumes E_1, versehen mit der Relativtopologie; dann ist $E_2\varepsilon Y$ eingebettet in $E_1\varepsilon Y$ und trägt die Einschränkung der Topologie dieses Raumes.

(2) Ist Y_2 linearer Unterraum (mit der Relativtopologie) des lokalkonvexen Raumes Y_1, so ist $E\varepsilon Y_2$ in $E\varepsilon Y_1$ eingebettet und trägt die von $E\varepsilon Y_1$ induzierte Topologie.

Einen Beweis von (2) erhält man leicht etwa *mit Hilfe des Satzes von Hahn-Banach.* Wir gehen über zu dem zweiten wichtigen Hilfsmittel bei der Behandlung vektorwertiger Funktionen, dem sog. injektiven (*bigleichstetigen* oder ε-) Tensorprodukt.

Die lineare Abbildung l:

$$u = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes y_i \longrightarrow \left[y' \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} e_i y'(y_i)\right] \quad (n \in \boldsymbol{N},\ e_i \in E,\ y_i \in Y,\ i = 1, \ldots, n,\ y' \in Y')$$

definiert eine Einbettung des algebraischen Tensorproduktes $E \otimes Y$ von E und Y in $E\varepsilon Y$. (Dies benutzt die Separiertheit der schwachen Topologie von Y.) Wir identifizieren $E \otimes Y$ mit dem entsprechenden Teilraum von $E\varepsilon Y$.

5. Definition. Die von $E\varepsilon Y$ auf $E \otimes Y$ induzierte Topologie wird als *injektive* Topologie bezeichnet. $E \otimes_\varepsilon Y$ sei der topologische Vektorraum $E \otimes Y$, versehen mit der injektiven Topologie. Die Vervollständigung $E \breve{\otimes}_\varepsilon Y$ von $E \otimes_\varepsilon Y$ heißt *injektives (topologisches) Tensorprodukt* von E und Y.

Nach 2. ist folgendes klar (vgl. dazu auch Gramsch, Vogt [8]):

6. Satz. (1) *$E \otimes_\varepsilon Y$ ist isomorph dem linearen Unterraum von $E\varepsilon Y$ aller von $Y'[\sigma(Y', Y)]$ nach E stetigen linearen Operatoren von endlichem Rang.*

(2) *$E \breve{\otimes}_\varepsilon Y$ ist vollständiger topologischer Vektorraum, dessen Topologie von dem auf $E \breve{\otimes}_\varepsilon Y$ fortgesetzten System $\{q_{\alpha\beta};\ \alpha \in A,\ \beta \in B\}$ (vgl. 2. (1)) von (F)-Halbnormen gegeben wird. Ist E lokalkonvex, so auch $E \breve{\otimes}_\varepsilon Y$.*

(3) *Ist E vollständig, so kann $E \breve{\otimes}_\varepsilon Y$ als linearer Teilraum von $L(Y', E) =$ lineare Abbildungen von Y' in E aufgefaßt werden. Die Elemente von $E \breve{\otimes}_\varepsilon Y$ sind, auf gleichstetige Mengen in Y' eingeschränkt, stetig von der Restriktion von $\sigma(Y', Y)$ in E.*

(4) *Ist* (a) *E lokalkonvex und sind E und Y vollständig oder ist* (b) *E vollständig und Y S-Raum, dann ist $E \breve{\otimes}_\varepsilon Y$ die Abschließung von $E \otimes Y$ in $E\varepsilon Y$.*

Zwischen dem injektiven Tensorprodukt und dem ε-Produkt stellt der von A. Grothendieck [10] entwickelte Begriff der Approximationseigenschaft einen Zusammenhang her (s. 9. unten).

7. Definition. Ein topologischer Vektorraum E hat die *Approximationseigenschaft* (im folgenden abgekürzt A. E.), wenn die Identität von E Berührpunkt von $E \otimes E'$ ist in dem separierten topologischen Vektorraum $\mathscr{L}_c(E, E)$ der von E in E stetigen linearen Abbildungen, versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf präkompakten Mengen.

Wenn ein topologischer Vektorraum die A. E. besitzt, so hat er notwendigerweise separierte schwache Topologie. *Bisher konnte von keinem lokalkonvexen Raum bewiesen werden, daß er die A. E. nicht besitzt*).*

8. Bemerkung. Ist E ein ultratonnelierter Raum mit Schauder-Basis (d. h. Basis mit stetigen Koeffizienten-Funktionalen), so hat E die A. E.

Dies ist der Inhalt von Klee [16], Proposition 2. 2. Jede Basis in einem vollständigen metrisierbaren topologischen Vektorraum stellt dort eine Schauder-Basis dar (s. Marti [17], IX. 5, Th. 2). Insbesondere hat also l^p auch für $0 < p < 1$ die A. E.

9. Satz. (1) *Der quasivollständige lokalkonvexe Raum Y besitzt genau dann die A. E., wenn der topologische lineare Unterraum $Y \otimes_\varepsilon E$ von $Y\tilde{\varepsilon} E$ dicht in $Y\tilde{\varepsilon} E$ ist für jeden lokalkonvexen Raum E.*

(2) *Dies ist genau dann der Fall, wenn $Y \otimes E = E \otimes Y$ in $Y\tilde{\varepsilon} E = Y\varepsilon E = E\varepsilon Y$ dicht liegt für jeden vollständigen lokalkonvexen Raum E.*

(3) *Sind E und Y lokalkonvex und vollständig und genügt einer von beiden der A. E., dann ist $E \breve{\otimes}_\varepsilon Y$ identisch $E\varepsilon Y$.*

(4) *Ist Y quasivollständig, E beliebiger topologischer Vektorraum und genügt E oder Y'_c der A. E., so liegt $E \otimes Y$ dicht in $E\varepsilon Y$.*

---

*) Vgl. aber den Zusatz bei der Korrektur am Schluß dieser Arbeit.

Teil (1) dieses Satzes ist bei Schwartz [24], § 1, Proposition 11, p. 46/47 gezeigt. Aus dem Beweis sieht man, daß *ein quasivollständiger Raum Y die A. E. hat, falls nur $Y \otimes Y'$ dicht liegt in $Y \varepsilon Y'_c$.* Eine Richtung von (2) ist zu beweisen:

Dazu beachte man, daß für beliebigen lokalkonvexen Raum E und die Vervollständigung $\hat{E}$ von E einerseits $Y \tilde{\varepsilon} E$ nach 4. (2) einen topologischen Untervektorraum von $Y \tilde{\varepsilon} \hat{E}$ darstellt und andererseits $Y \otimes E$ dicht in $Y \otimes_\varepsilon \hat{E}$ liegt. Ist also für beliebiges lokalkonvexes E nur $Y \otimes \hat{E}$ dicht in $Y \tilde{\varepsilon} \hat{E}$, so ist auch $Y \otimes E$ dicht in $Y \tilde{\varepsilon} \hat{E}$, erst recht also in $Y \tilde{\varepsilon} E$. Aussage (3) ist einfache Folgerung aus (1) und 2. (3); (4) beweist man durch leichte Abänderung der Methode, die Schwartz beim Beweis der einen Richtung von (1) verwendet.

Im Zusammenhang mit 9. (4) ist von Interesse, wann Y'_c die A. E. besitzt. Deshalb notieren wir zum Schluß:

10. Bemerkung. Sei Y quasivollständiger lokalkonvexer Raum — so daß als linearer Raum $(Y'_c)' = Y$ — und sei Y'_c quasivollständig.

(1) Die Aussagen (i) und (ii) sind äquivalent:

(i) $Y \otimes Y'$ liegt dicht in $Y \varepsilon Y'_c$ (nach dem vorhergehenden ist dies äquivalent zur A. E. von Y) und

(ii) $Y' \otimes Y$ ist dicht in $Y'_c \varepsilon Y$.

(2) Hat Y in der Schwartzschen Bezeichnungsweise die Topologie γ — d. h. $(Y'_c)'_c = Y$ als topologischer Vektorraum —, so folgt aus Aussage (ii) von (1), daß Y die A. E. besitzt.

Beweis. (1) ist klar beim Transponieren.

Zu (2): Wegen der Quasivollständigkeit von Y'_c ist $\mathscr{L}_c(Y'_c, Y'_c)$ linearer und topologischer Unterraum von $Y'_c \varepsilon (Y'_c)'_c$ (s. Schwartz [24], Cor. von Prop. 5, p. 36/37). Wegen $(Y'_c)'_c = Y$ gilt $Y' \otimes Y < \mathscr{L}_c(Y'_c, Y'_c) < Y'_c \varepsilon Y$, w. z. b. w.

Nach Schaefer [22], IV, § 6, 6. 1 und der folgenden Bemerkung ist Y'_c quasivollständig für tonnelierte oder bornologische Y. Außerdem hat Y die Topologie γ stets, wenn es Mackey-Raum ist (s. [24], p. 17).

4. ε-Produkt und injektives Tensorprodukt gewichteter Räume

Hier soll allgemein die Beziehung zwischen den im 1. Teil eingeführten gewichteten Räumen $CV(X, E)$ bzw. $CV_0(X, E)$, dem ε-Produkt $E \varepsilon CV(X)$ bzw. $E \varepsilon CV_0(X)$ und den entsprechenden injektiven Tensorprodukten hergestellt werden.

Dazu werden einige Vorbereitungen benötigt. Sei $V > 0$ eine Nachbin-Familie auf dem vollständig regulären Raum X und Y topologischer linearer Unterraum von $CV(X)$. Für einen Punkt $x \in X$ definiere das Deltafunktional δ_x durch $\delta_x(f) = f(x)$ für alle $f \in C(X)$. Dann ist δ_x Linearform auf Y.

1. Lemma. (1) *Jedes δ_x ($x \in X$) gehört zu Y'; die Abbildung $I: x \to \delta_x$ ist stetig von X in $Y'_\sigma = Y'[\sigma(Y', Y)]$.*

(2) *I ist stetig von X in Y'_c dann und nur dann, wenn jede präkompakte Menge in Y gleichstetig ist.*

(3) *In folgenden Fällen ist I stets von X in Y'_c stetig:*

(i) *für $X = k_R$-Raum und $W \leqq V$ oder*

(ii) *für X beliebiger vollständig regulärer Raum und $Z \leqq V$.*

W und Z sind dabei wie in 1. 6.

Beweis. (1) und (2) sind einfach.

Zu (3) (ii): In diesem Fall liegt $I(X)$ aufgrund der Voraussetzung $Z \leqq V$ in einer gleichstetigen Menge von Y', auf der die Topologie $\sigma(Y', Y)$ mit der Topologie $\lambda(Y', Y)$ von Y'_c zusammenfällt. Daher folgt die Behauptung aus (1).

Zu (i) von (3): Wegen $W \leqq V$ ist für jedes kompakte $K < X$ das Bild $I(K)$ in einer gleichstetigen Menge von Y' enthalten, so daß, wie eben gezeigt, die Einschränkung von I auf K stetig in Y'_c ist. Im k_R-Raum X ist dann I als Abbildung von X nach Y'_c stetig, w. z. b. w.

Die in (2) angegebene Bedingung ist übrigens *wegen des Satzes von Ascoli* z. B. für $W \leqq V$ und lokalkompaktes X offenbar erfüllt; (3) (i) ist jedoch wesentlich allgemeiner. Wir bemerken noch, daß $\{\delta_x;\, x \in X\} < CV'(X)$ impliziert, daß $CV(X)$ ein Hausdorffraum ist; gilt $\delta_{x_0} \in CV'(X)$ bzw. $CV'_0(X)$ für festes $x_0 \in X$ und gibt es $f \in CV(X)$ bzw. $CV_0(X)$ mit $f(x_0) \neq 0$, so existiert wegen der vollständigen Regularität von X ein $v \in V$, dessen Restriktion auf jede offene Umgebung von x_0 von Null verschieden ist. Die Abbildung I ist eineindeutig von X in Y', wenn Y die Punkte von X trennt. Sie ist z. B. für $V > 0$, lokalkompaktes X und $Y = CV_0(X)$ sogar ein Homöomorphismus in Y'_σ, und wenn noch $W \leqq V$ gilt, stellt I auch einen Homöomorphismus in Y'_c dar, wie man leicht sieht. Es ist trivial, daß $I(X)$ unter den Voraussetzungen von 1. (1) total in Y'_σ ist. Für das folgende benötigen wir eine schärfere Aussage über gleichstetige Mengen im Dualraum von Y.

2. Lemma. *Bezeichne* $U_v = \{y \in Y;\, bv(y) = \sup_{x \in X} v(x) \mid y(x) \mid \leqq 1\}$ *die Nullumgebung in* Y. *Dann liegt in* U_v° *die absolutkonvexe Hülle der Menge*

$$v\Delta = \{v(x)\delta_x;\, x \in X \text{ mit } v(x) \neq 0\}$$

schwach dicht.

Es gilt $U_v = (v\Delta)^\circ$, also $U_v^\circ = (v\Delta)^{\circ\circ}$. Lemma 2 ist damit eine Folgerung aus dem *Bipolarensatz.*

Für lokalkompaktes X, $V \leqq C^+(X)$ und $Y = CV_0(X)$ bewies Summers [28], 4. 6, daß die Menge $\mathscr{E}(U_v^\circ)$ der Extremalpunkte von U_v° identisch ist mit

$$\{\lambda v(x)\delta_x;\; x \in X \text{ mit } v(x) \neq 0,\, \lambda \in \boldsymbol{C} \text{ mit } \mid \lambda \mid = 1\}.$$

Der *Satz von Krein-Milman* (zusammen mit dem *Satz von Alaoglu-Bourbaki*) erlaubt es, daraus in diesem Spezialfall 2 zu folgern. Die Charakterisierung der Extremalpunkte von U_v° bei Summers wird hier aber an keiner Stelle benötigt.

Wir gehen jetzt zur Untersuchung von $E \varepsilon Y$ über.

3. Folgerung. Sei E wie in Teil 1. Die (F)-Halbnormen auf $E \varepsilon Y$ werden mit $q_{\alpha,v}$ bezeichnet ($\alpha \in A$, $v \in V$). Für jedes $u \in E \varepsilon Y$ ist dann:

$$q_{\alpha,v}(u) = \sup \{q_\alpha(e);\, e \in \Gamma(u(v\Delta))\},$$

wo $\Gamma(u(v\Delta))$ die absolutkonvexe Hülle von

$$u(v\Delta) = \{v(x)\, u(\delta_x);\; x \in X \text{ mit } v(x) \neq 0\}$$

angibt. Ist q_α Halbnorm, so $q_{\alpha,v}(u) = \sup \{q_\alpha(e);\, e \in u(v\Delta)\}$.

Dies folgt wegen 3. 3 aus 2.

4. Theorem. *Sei E topologischer Vektorraum, V Nachbin-Familie auf dem vollständig regulären Raum X und gelte*

(i) $W \leqq V$ *und* $X = k_R$*-Raum oder* (ii) $Z \leqq V$.

Für einen topologischen linearen Unterraum Y von $CV(X)$ betrachte die lineare Abbildung

$$A : u \to [x \to u(\delta_x)] \; (u \in E\varepsilon Y,\ x \in X).$$

Dann gilt:

(1) *A ist topologischer Isomorphismus von $E\varepsilon Y$ in $CV^p\Gamma(X, E)$; für $f \in A(E\varepsilon Y)$ und $v \in V$ stellt $\Gamma((vf)(X))$ sogar eine relativkompakte Menge in E dar.*

(2) *$Y < CV_0(X)$ impliziert $A(E\varepsilon Y) < CV_{00}^p\Gamma(X, E)$.*

Beweis. Wegen 3. 4 ist für (1) nur $Y = CV(X)$ und für (2) nur $Y = CV_0(X)$ zu untersuchen.

1. Ist $u \in E\varepsilon CV(X)$ beliebig, so stellt $A(u) : x \to u(\delta_x)$ eine E-wertige Funktion auf X dar. Für die Abbildung I von X in $CV'(X)$ aus 1 gilt $A(u) = u \circ I$; nach 1. (3) ist I stetig von X in $(CV(X))'_c$, d. h. $A(u)$ als Zusammensetzung stetig von X in E.

2. Ist $v \in V$ beliebig, so gehört $v\Delta$ zu der absolutkonvexen Menge U_v° (vgl. 2). Die Restriktion von u auf U_v° ist stetig von der schwachen Topologie auf $CV'(X)$ in E, also das Bild $u(U_v^\circ)$ in E nach dem *Satz von Alaoglu-Bourbaki* kompakt,

$$\Gamma((vA(u))(X)) = \Gamma(u(v\Delta)) < u(U_v^\circ) \text{ relativkompakt.}$$

3. Für die (F)-Halbnormen in $E\varepsilon CV(X)$ und $CV\Gamma(X, E)$ gilt nach Folgerung 3

$$b\gamma v_\alpha(A(u)) = \sup\{q_\alpha(e);\ e \in \Gamma((vA(u))(X))\} = q_{\alpha,v}(u).$$

Daraus liest man ab, daß A Einbettung von $E\varepsilon CV(X)$ in $CV^p\Gamma(X, E)$ und daß die Topologie auf $E\varepsilon CV(X)$ die gleiche ist wie auf $A(E\varepsilon CV(X))$ als Unterraum von $CV^p\Gamma(X, E)$.

4. Seien $\alpha \in A$, $\varepsilon > 0$, $v \in V$ beliebig; dann ist für (2) zu zeigen:

Es existiert zu $u \in E\varepsilon CV_0(X)$ eine kompakte Menge K in X mit

$$q_\alpha(e) < \varepsilon \text{ für alle } e \in \Gamma((vA(u))(X \setminus K)).$$

Benutzen wir wieder, daß die Restriktion von u auf U_v° stetig ist bzgl. der schwachen Topologie: Zu der Nullumgebung $0_1 = \{e \in E;\ q_\alpha(e) < \varepsilon\}$ gibt es eine $\sigma(CV_0'(X), CV_0(X))$-Nullumgebung 0_2, so daß das Bild von $0_2 \cap U_v^\circ$ unter u in 0_1 liegt. Mit

$$f_1, \ldots, f_n \in CV_0(X),\ n \in N \text{ und } \tau > 0 \text{ geeignet}$$

hat man

$$0_2 \cap U_v^\circ > \{\mu \in U_v^\circ;\ |\mu(f_i)| < \tau\ (i = 1, \ldots, n)\},$$

und diese Menge ist absolutkonvex. Es gibt nun wegen $f_i \in CV_0(X)$ $(i = 1, \ldots, n)$ eine kompakte Menge K in X mit

$$|v(x)\delta_x(f_i)| < \tau \text{ für } x \in X \setminus K \text{ und } i = 1, \ldots, n;$$

für jedes $\mu \in \Gamma\{v(x)\delta_x;\ x \in X\setminus K\}$ ist also $\mu \in 0_2 \cap U_v^\circ$, d. h. $u(\mu) \in 0_1$, q. e. d.

5. Korollar. *Seien zunächst die Voraussetzungen wie in* 3.

(1) *Bei Identifizierung gewisser isomorpher Räume gilt*

$$E \otimes_\varepsilon Y < CV^p\Gamma(X, E), \text{ für } Y < CV_0(X) \text{ sogar } E \otimes_\varepsilon Y < CV_{00}^p\Gamma(X, E).$$

Der topologische Isomorphismus ist dabei von der Gestalt

$$\sum_{i=1}^n e_i \otimes y_i \longrightarrow \left[x \longrightarrow \sum_{i=1}^n e_i y_i(x)\right] \quad (x \in X,\ e_i \in E,\ y_i \in Y,\ i = 1, \ldots, n,\ n \in N).$$

(2) *$E \otimes CV(X)$ bzw. $E \otimes CV_0(X)$ ist der Raum der Funktionen in $CV(X, E)$ oder $CV\Gamma(X, E)$ bzw. $CV_0(X, E)$ oder $CV_{00}\Gamma(X, E)$ mit endlichdimensionalem Wertebereich, d. h. das Bild jeder Funktion liegt in einem endlichdimensionalen linearen Unterraum von E.*

Unter den stärkeren Voraussetzungen von 4 gilt noch für vollständiges E

(3) $E \otimes_\varepsilon Y < E \check{\otimes}_\varepsilon Y < CV^p\Gamma(X, E)$ *bzw.* $CV^p_{00}\Gamma(X, E)$ *(falls $Y < CV_0(X)$).*

Schließlich erhält man für E und Y wie in 3. 6. (4), *wiederum nach Identifizierung,*

(4) $E \otimes_\varepsilon Y < E \check{\otimes}_\varepsilon Y < E\varepsilon Y < CV^p\Gamma(X, E)$ *bzw.* $CV^p_{00}\Gamma(X, E)$.

Beweis. (3) und (4) sind wegen 3. 6 und 1. 6 klar.

Zu (1): $u \in E \otimes_\varepsilon Y$ liefert wegen 3. 6. (1) eine von $Y'[\sigma(Y', Y)]$ in E stetige Abbildung. Definiert man $A(u)$ wie in 4, so ist $A(u)$ stetig von X in E (vgl. 1. (1)), und alles weitere schließt man analog zum Beweis von 4.

Zu (2): $E \otimes CV(X)$ enthält nur Funktionen, deren Bild in einem endlichdimensionalen Teilraum von E liegt. Besitze umgekehrt $f \in CV(X, E)$ bzw. $CV_0(X, E)$, $f \not\equiv 0$, endlichdimensionalen Wertebereich. Dann ist für alle $x \in X$ mit geeignetem $n \in \mathbf{N}$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} e_i f_i(x),\ e_i \text{ linear unabhängig in } E,\ f_i: X \to \mathbf{C} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Der von dem System der e_i aufgespannte n-dimensionale lineare Unterraum von E ist dem $\mathbf{C}^n$ topologisch isomorph. Aus der Stetigkeit der Projektionen auf jede Komponente des $\mathbf{C}^n$ und $f \in CV(X, E)$ bzw. $CV_0(X, E)$ folgt $f_i \in CV(X)$ bzw. $CV_0(X)$, $i = 1, \ldots n$, q. e. d.

6. Satz. *Ist E topologischer Vektorraum mit A. E., so liegen stets dicht:*

(1) *$E \otimes CV(X)$ in $CV^p(X, E)$ bzw. $CV^p\Gamma(X, E)$,*

(2) *$E \otimes CV_0(X)$ in $CV_0(X, E)$ bzw. $CV^p_{00}\Gamma(X, E)$.*

Den (einfachen) *Beweis* führen wir nur für $E \otimes CV_0(X)$ und $CV^p_{00}\Gamma(X, E)$: Zu $f \in CV^p_{00}\Gamma(X, E)$, $v \in V$ und der Nullumgebung U in E ist eine Funktion $g \in CV_{00}\Gamma(X, E)$ mit endlichdimensionalem Wertebereich zu finden derart, daß $\Gamma((v(f-g))(X)) < U$ (s. 5. (2)).

Da $K = \Gamma((vf)(X))$ in E präkompakt ist, existiert nach Voraussetzung ein stetiger linearer Operator T von endlichem Rang, so daß die Identität id von E

$$(\mathrm{id} - T)(K) < U$$

erfüllt. Daraus folgt

$$\Gamma((v(f-g))(X)) < U \text{ mit } g(x) = T(f(x)),\ x \in X.$$

g ist eine stetige Funktion auf X mit Werten in einem endlichdimensionalen linearen Unterraum von E, und aus der Stetigkeit und Linearität von T ergibt sich auch $g \in CV_{00}\Gamma(X, E)$, q. e. d.

Es ist von Interesse, analoge Resultate wie in 6 zu beweisen, ohne dabei die A. E. von E vorauszusetzen. Für Räume des Typs $CV_0(X, E)$ kann man dabei die *Methode der Zerlegung der Eins* verwenden. Deshalb beschäftigen wir uns für den Rest von Teil I dieser Arbeit i. a. nicht mehr mit Räumen vom Typ $CV(X, E)$, auf die wir aber in Teil II zurückkommen. Für nicht lokalkonvexe Räume E, die ja nicht notwendig die A. E. besitzen, ist ein Beweis der 6. (2) entsprechenden Eigenschaft ein schwieriges Problem und bisher nur unter einschränkenden Voraussetzungen gelöst. Für *lokalkonvexe* E hingegen erhalten wir im nächsten Paragraphen eine vollständige Lösung, die sofort eine Reihe wichtiger Anwendungen zuläßt.

Durch Verallgemeinerung der Methode von Shuchat [25], Theorem 1 (Verwendung einer Zerlegung der Eins auch für nicht lokalkonvexen Raum E) beweist man zunächst:

7. Bemerkung. $E \otimes CV_0(X)$ ist dicht in $CV_0(X, E)$, wenn X lokalkompakter Raum mit endlicher Überdeckungsdimension ist.

Dies trifft insbesondere zu, wenn $X \subset \boldsymbol{C}^n$ für $n \in \boldsymbol{N}$. Man beachte aber, daß $CV_0(X, E)$ auf dem Tensorprodukt nach dem vorhergehenden für nicht lokalkonvexe E i. a. *nicht* die Topologie von $E \otimes_\varepsilon CV_0(X)$ induziert. Der folgende Satz charakterisiert dagegen in den interessantesten Fällen $E \check{\otimes}_\varepsilon CV_0(X)$ als Teilraum von $CV_{00}\Gamma(X, E)$.

8. Satz. *Sei X lokalkompakt und $V > 0$. Betrachte dann folgende Bedingungen an eine Funktion $f \in CV_{00}\Gamma(X, E)$:*

(1) *f ist Berührpunkt von $E \otimes CV_0(X)$ in $CV_{00}\Gamma(X, E)$.*

(2) *Für jede (kreisförmige) Nullumgebung U in E und für jedes $v \in V$ gibt es*

(i) *eine kompakte Menge K in X mit $\Gamma((vf)(X \setminus K)) \subset U$,*

(ii) *eine endliche Anzahl offener Mengen U_k in X mit $K \subset \bigcup_{k=1}^{q} U_k$,*

(iii) *Punkte $x_k \in U_k$ $(k = 1, \ldots, q;\ q \in \boldsymbol{N})$, so daß*

$$\Gamma\left[\bigcup_{k=1}^{q}\{v(x)\,(f(x) - f(x_k));\ x \in U_k\}\right] \subset U.$$

Es gilt: (2) impliziert (1), und (1) und (2) sind für $W \leqq V$ äquivalent.

Beweis. 1. Aus (2) folgt (1).

Zu einer beliebigen Nullumgebung U in E wähle eine Nullumgebung $\tilde{U}$ mit $\tilde{U} + \tilde{U} + \tilde{U} + \tilde{U} \subset U$. Finde zu $\tilde{U}$ und zu beliebigem $v \in V$ ein kompaktes $K \subset X$, U_k offen und $x_k \in U_k$ wie in (2) angegeben. Sei $\{g_k;\ k = 1, \ldots, q\} \subset C_c(X, \boldsymbol{R})$ eine der Überdeckung von K durch die U_k zugeordnete Zerlegung der Eins und setze

$$g(x) = \sum_{k=1}^{q} f(x_k) g_k(x), \quad \text{so daß } g \in E \otimes CV_0(X).$$

Man zeigt dann durch geeignete Fallunterscheidungen leicht

$$\Gamma((vf - vg)(X)) \subset U.$$

2. Für $W \leqq V$ impliziert (1) Bedingung (2).

Für beliebige Nullumgebung U in E und $v \in V$ wähle die Nullumgebung $\tilde{U}$ dieses Mal mit $\tilde{U} + \tilde{U} + \tilde{U} \subset U$. Sei K kompakt in X mit $\Gamma((vf)(X \setminus K)) \subset \tilde{U}$. Die von oben halbstetige Funktion v sei auf der offenen relativkompakten Umgebung $\tilde{K}$ von K durch $M \geqq 1$ beschränkt, und sei $\tilde{\tilde{U}}$ kreisförmige Nullumgebung mit $M\tilde{\tilde{U}} \subset \tilde{U}$.

Wegen $W \leqq V$ gibt es zur Abschließung $\bar{\tilde{K}}$ von $\tilde{K}$ ein $v' \in V$ mit $v'(x) \geqq 1$ auf $\bar{\tilde{K}}$, und da V Nachbin-Familie ist, existiert $\tilde{v} \in V$ mit $v, v' \leqq \tilde{v}$. Weil schließlich $f \in CV_{00}\Gamma(X, E)$ Berührpunkt von $E \otimes CV_0(X)$ ist, gibt es $g \in E \otimes CV_0(X)$ mit

$$\Gamma((\tilde{v}f - \tilde{v}g)(X)) \subset \tilde{\tilde{U}}, \text{ also } \Gamma((f - g)(\tilde{K})) \subset \tilde{\tilde{U}} \text{ und } \Gamma((vf - vg)(X)) \subset \tilde{\tilde{U}} \subset \tilde{U}.$$

Zu der stetigen Funktion g von X in einen endlichdimensionalen Unterraum von E und K existieren nun endlich viele offene U_k und $x_k \in U_k$ $(k = 1, \ldots, q;\ q \in \boldsymbol{N})$ mit

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{q} U_k \subset \tilde{K}, \quad \Gamma\left[\bigcup_{k=1}^{q}(g(U_k) - g(x_k))\right] \subset \tilde{\tilde{U}},$$

woraus $\Gamma\left[\bigcup_{k=1}^{q}\{v(x)\,(g(x) - g(x_k));\ x \in U_k\}\right] \subset M\tilde{\tilde{U}} \subset \tilde{U}$ folgt.

Für $x \in U_k$ ist dann

$$v(x)\,\big(f(x) - f(x_k)\big) = (vf - vg)\,(x) + v(x)\,\big(g(x) - g(x_k)\big) + v(x)\,(g - f)\,(x_k)$$

Element von ($\mathscr{C}$ = kreisförmige Hülle)

$$(vf - vg)\,(X) + \{v(x)\,(g(x) - g(x_k));\ x \in U_k\} + M\mathscr{C}\big((f - g)\,(\bar{\bar{K}})\big),$$

so daß

$$\Gamma\left[\bigcup_{k=1}^{q} \{v(x)\,(f(x) - f(x_k));\ x \in U_k\}\right]$$
$$< \Gamma\big((vf - vg)\,(X)\big) + \Gamma\left[\bigcup_{k=1}^{q} \{v(x)\,(g(x) - g(x_k));\ x \in U_k\}\right] + M\Gamma\big((f - g)\,(\bar{\bar{K}})\big) < U,$$

q. e. d.

9. Problem. Für welche vollständigen nicht lokalkonvexen Räume E gilt bei X lokalkompakt und $W \leqq V$ *stets*

$$E \check{\otimes}_\varepsilon CV_0(X) = CV_{00}^p\Gamma(X, E)?$$

Abschließend betrachten wir die vorliegenden Ergebnisse im Spezialfall $X = K =$ kompakter Raum, E vollständig und $V = Z$ (Topologie der gleichmäßigen Konvergenz bzw. der gleichmäßigen Konvergenz bzgl. der absolutkonvexen Hülle des Wertebereiches). In diesem Fall wurden die oben aufgeführten Probleme bereits untersucht. Klee [15] nennt einen topologischen Vektorraum E *zulässig*, wenn jede kompakte Teilmenge von E beliebig kleine stetige Verschiebungen in endlichdimensionale Unterräume von E erlaubt. Dann liegt offenbar stets $E \otimes C(K)$ dicht in $C(K, E)$. Wegen 3. 8 umfaßt 6 das Corollary 2. 3 aus [16]. Shuchat, der dieses Problem ebenfalls gestellt hat, konnte weitere interessante Resultate herleiten (s. [25]), ohne eine volle Lösung angeben zu können.

Das uns mehr interessierende Problem 9 wird vor allem dadurch wichtig, daß zwar nicht für *jede* Funktion aus $C(K, E)$ ein Integral bzgl. eines Radonmaßes existiert, daß aber $E \check{\otimes}_\varepsilon C(K)$ einen Raum integrierbarer Funktionen darstellt (Gramsch [7]). Das Riemannsche Integral ist für holomorphe Funktionen mit Werten in nicht lokalkonvexen Räumen von Bedeutung (s. Etter [5], Gramsch, Vogt [8]) und besitzt deshalb viele Anwendungen. Nach dem vorhergehenden bietet es sich jedoch an, *das ε-Produkt $E\varepsilon C(K) < C(K, E)$ als Raum von stetigen Funktionen auf K mit Werten in dem vollständigen topologischen Vektorraum E zu betrachten, die bzgl. jeden Radonmaßes $\mu \in C'(K)$ integrierbar sind.* Das Integral $\int f\,d\mu$ einer Funktion $f \in E\varepsilon C(K)$ bzgl. μ wird dabei als Wert der linearen Abbildung $u_f \in \mathscr{L}_e((C(K))'_c, E)$, die f bei der Identifizierung entspricht, an der Stelle μ definiert, und die Zuordnung $\mu \to \int f\,d\mu$ ist auf der Einheitskugel von $C'(K)$ stetig bzgl. der schwachen Topologie $\sigma(C'(K), C(K))$ in E. Es zeigt sich aber, daß der so definierte *vollständige* Raum von integrierbaren Funktionen (s. 3. 2. (3) (a)) mit dem von B. Gramsch betrachteten *zusammenfällt*:

10. Bemerkung. Für vollständige topologische Vektorräume E und kompakte K gilt $E \check{\otimes}_\varepsilon C(K) = E\varepsilon C(K)$.

Beweis. $C(K)$ hat bekanntlich die A. E. Deshalb besitzt auch $(C(K))'_c$ nach 3. 10. (2) die A. E., und die Behauptung folgt aus 3. 9. (4).

L. Waelbroeck ([30], Kap. 7) hat die von Etter eingeführten Begriffe im Zusammenhang mit Beschränktheitsstrukturen untersucht; ein Element von $E \check{\otimes}_\varepsilon C(K)$ nennt er *ultrastetig*. Man sieht nun, daß 10 einen anderen Zugang zu Proposition 7. 1 von Waelbroeck liefert; der Spezialfall von 8 entspricht Proposition 7. 2, und zum Beweis von Proposition 7. 3 werden gerade die Eigenschaften

$$E \check{\otimes}_\varepsilon C(K) = E\varepsilon C(K) < CZ^p\Gamma(K, E)$$

benutzt. Aus Proposition 7. 3 von [30] liest man dann ab, daß unter den Voraussetzungen von 10 sogar *die Gleichheit*

$$E \check{\otimes}_\varepsilon C(K) = E \varepsilon C(K) = \{f \in C(K, E);\ \Gamma(f(K)) \text{ relativkompakt in } E\}$$

besteht, wenn auf jeder absolutkonvexen kompakten Teilmenge von E die von E induzierte Topologie ein Fundamentalsystem absolutkonvexer Nullumgebungen besitzt. Als einfachsten Fall erhält man, daß die Gleichheit stets erfüllt ist, wenn E separierte schwache Topologie hat.

Viele der Ergebnisse in diesem Paragraphen lassen sich in ähnlicher Weise im Rahmen der Integrationstheorie für stetige Funktionen mit Werten in einem nicht lokalkonvexen Raum deuten.

5. Die Approximationseigenschaft für Räume vom Typ $CV_0(X)$ und Darstellungssätze für das injektive Tensorprodukt $E \check{\otimes}_\varepsilon CV_0(X)$

Für den Rest der Arbeit ist E stets ein *lokalkonvexer* topologischer Vektorraum. Dann erhält man eine vollständige Lösung der im vorhergehenden Paragraphen angeschnittenen Probleme für $CV_0(X, E)$.

1. Satz. *Sei $V > 0$ Nachbin-Familie auf dem vollständig regulären Raum X und $(E, \{p_\alpha;\ \alpha \in A\})$ lokalkonvex. Dann liegt $E \otimes CV_0(X)$ dicht in $CV_0(X, E)$.*

Der *Beweis* verläuft wie eine Richtung beim Beweis von 4. 8 und benutzt eine geschickt konstruierte *Zerlegung der Eins bei L. Nachbin* [18]:

Seien $f \in CV_0(X, E)$, $\alpha \in A$, $v \in V$ und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben; gesucht ist $g \in E \otimes CV_0(X)$ mit

$$b v_\alpha(f - g) = \sup_{x \in X} p_\alpha((vf - vg)(x)) \leqq \varepsilon.$$

Wegen $f \in CV_0(X, E)$ ist $K = \{x \in X;\ p_\alpha((vf)(x)) \geqq \varepsilon/4\}$ kompakt in X (s. nach 1. 2) und v auf K durch $\tilde{M} > 0$ beschränkt. Weil v von oben halbstetig vorausgesetzt wird, existiert eine offene Menge $\tilde{K} \supset K$, so daß $v(x) < M$ auf $\tilde{K}$, $M > \tilde{M}$. Zu $f \in C(X, E)$ gibt es endlich viele offene Mengen U_k und $x_k \in U_k$ $(k = 1, \ldots, q;\ q \in N)$ mit

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{q} U_k \subset \tilde{K} \text{ und } p_\alpha(f(x) - f(x_k)) < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{für jedes } x \in U_k.$$

$CV_0(X)$ ist Teilmodul von $C(X)$ über $CB(X)$, und nach Definition von K findet man zu jedem $x_0 \in K$ ein $f_{x_0} \in CV_0(X)$ mit $f_{x_0}(x_0) \neq 0$: Ist z. B. $e_0' \in E'$ mit $e_0'(f(x_0)) \neq 0$ gefunden, so setze $f_{x_0}(x) = e_0'(f(x))$ für $x \in X$.

So sind die Voraussetzungen von Nachbin [18], 23, Lemma 2 erfüllt, und es gibt eine Zerlegung der Eins $\{g_k;\ k = 1, \ldots, q\} \subset CV_0(X)$ mit $g_k \geqq 0$, $g_k = 0$ außerhalb U_k, $\sum_{k=1}^{q} g_k(x) = 1$ auf K und $\sum_{k=1}^{q} g_k(x) \leqq 1$ auf X.

Definiere $g(x) = \sum_{k=1}^{q} f(x_k) g_k(x)$ für $x \in X$, so daß $g \in E \otimes CV_0(X)$. Ist $x \in K$, so gilt $f(x) = \sum_{k=1}^{q} f(x) g_k(x)$, also

$$\begin{aligned} p_\alpha((vf - vg)(x)) &= p_\alpha\left[\sum_{k=1}^{q} g_k(x) v(x) (f(x) - f(x_k))\right] \\ &\leqq \sum_{k=1}^{q} g_k(x) v(x) p_\alpha(f(x) - f(x_k)) \leqq \sum_{k=1}^{q} g_k(x) M \frac{\varepsilon}{2M} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Für $x \notin K$ ist $g_k(x) f(x_k) \neq 0$ nur, wenn $x \in U_k \setminus K$; dann erhält man wegen $U_k < \tilde{K}$:

$$p_\alpha\big(g_k(x) v(x) f(x_k)\big) \leqq g_k(x)[p_\alpha((vf)(x)) + v(x) p_\alpha(f(x) - f(x_k))]$$
$$\leqq g_k(x)\left[\frac{\varepsilon}{4} + M \frac{\varepsilon}{2M}\right] = g_k(x) \frac{3}{4} \varepsilon,$$

so daß

$$p_\alpha((vf - vg)(x)) \leqq \frac{\varepsilon}{4} + p_\alpha\left[v(x) \sum_{k=1}^{q} g_k(x) f(x_k)\right] \leqq \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{k=1}^{q} g_k(x) \frac{3}{4} \varepsilon \leqq \varepsilon$$

für jedes $x \in X \setminus K$, q. e. d.

Dieser Satz wurde mit einer etwas anderen Methode unabhängig von J. B. Prolla [20], 3. 2 gezeigt. Auf dieselbe Weise wie 1 beweist man auch einen *vektorwertigen Stone-Weierstraß-Satz für* $CV_0(X, E)$:

2. Satz. *Unter den Voraussetzungen von 1 sei Y_E ein abgeschlossener linearer Unterraum von $CV_0(X, E)$. Weiter gelte:*

(1) $Y_E(x) = \{f(x); f \in Y_E\} = E$ *für jedes* $x \in X$,

(2) *für $f \in Y_E$ und $\varphi \in CV_0(X)$ mit Werten in* $[0, 1]$ *hat man* $\varphi f \in Y_E$.

Dann ist $Y_E = CV_0(X, E)$.

Satz 2 verallgemeinert und impliziert den vektorwertigen Stone-Weierstraß-Satz für die strikte Topologie bei Wells [31], Theorem 2 (vgl. auch Todd [29], Theorem 3). Noch allgemeinere Ergebnisse wurden vor kurzem von Prolla [21] gefunden.

3. Theorem. *Ist unter den Voraussetzungen von 1 der Raum $CV_0(X, E)$ vollständig, so gilt* $CV_0(X, E) = E \check{\otimes}_\varepsilon CV_0(X)$.

Beweis. 1 zusammen mit 4. 5.

4. Korollar. *Unter anderem erhält man aus 3 bei vollständigem lokalkonvexem E:*

(1) $(C(X, E), \tau) = E \check{\otimes}_\varepsilon (C(X), \tau)$ *für X = vollständig regulärer k_R-Raum,*

(2) $(CB(X, E), \beta) = E \check{\otimes}_\varepsilon (CB(X), \beta)$ *für lokalkompaktes X,*

(3) $(C_0(X, E), \sigma) = E \check{\otimes}_\varepsilon (C_0(X), \sigma)$ *und*

(4) $(C_c(X, E), i) = E \check{\otimes}_\varepsilon (C_c(X), i)$ *für E = Banachraum und X = lokalkompakt und im Unendlichen abzählbar.*

Man beachte nun, daß in den interessantesten Fällen $E \varepsilon CV_0(X)$ ein topologischer Unterraum von $CV_0(X, E)$ ist. Ist dann $E \otimes CV_0(X)$ dicht in $CV_0(X, E)$, so erst recht in $E \varepsilon CV_0(X)$. Damit folgt aus 1, 4. 4, 3. 9. (2) und 3. 10. (2) das Hauptergebnis dieser Arbeit:

5. Theorem. *Seien die Voraussetzungen wie in 1 und V eine Nachbin-Familie auf X, so daß*

(i) $W \leqq V$ *und X k_R-Raum oder* (ii) $Z \leqq V$.

Dann gilt:

(1) *Es ist $E \otimes CV_0(X)$ dicht in $E \varepsilon CV_0(X)$.*

(2) *Ist E vollständig, gilt*

$$E \check{\otimes}_\varepsilon CV_0(X) = E \varepsilon CV_0(X) = CV_0(X, E).$$

(3) *$CV_0(X)$ hat die Approximationseigenschaft. Ist E vollständiger lokalkonvexer Raum mit A. E., so besitzt $CV_0(X, E)$ die A. E.*

(4) *Ist $(CV_0(X))'_c$ quasivollständig und hat $CV_0(X)$ die Topologie γ, so hat auch $(CV_0(X))'_c$ die A. E.*

(5) *Für (F)-Räume E und $CV_0(X)$ besteht die Isomorphie*

$$(CV_0(X, E))'_c = E'_c \hat{\otimes}_\pi (CV_0(X))'_c \quad (\textit{vervollständigtes projektives Tensorprodukt}).$$

Dabei benutzt man zum 2. Teil von (3) das Corollaire 2 von Proposition 11 bei Schwartz [24], p. 48 und zu (5) H. Buchwalter [34], (2. 7).

6. Korollar. *Nach* 5. (3) *haben etwa folgende Räume die A. E.:*

(1) $(C(X), \tau)$ *für X vollständig regulärer k_R-Raum,*

(2) $(CB(X), \beta)$ *für lokalkompaktes X,*

(3) $(C_0(X), \sigma)$,

(4) $(C_c(X), i)$ *für X lokalkompakt und im Unendlichen abzählbar.*

In 4 und 6 sind eine Reihe bereits bekannter Resultate enthalten; wir erwähnen nur, daß 4. (1) im wesentlichen Theorem 3 in Dietrich [3] und 6. (2) das Theorem 3. 1 bei Collins und Dorroh [2] ist.

Abschließend soll eine etwas andere Methode für den Beweis der A. E. von $CV_0(X)$ mit Hilfe vektorwertiger Funktionen angegeben werden. Dieser neue Zugang klärt auch den Zusammenhang von Tensorprodukt $E \otimes_\varepsilon CV_0(X)$ und $\tilde{\varepsilon}$-Produkt $E\tilde{\varepsilon}CV_0(X)$ in allgemeinerem Rahmen, z. B. wenn $CV_0(X)$ nicht vollständig ist. Dabei erwähnen wir zunächst ebenfalls die entsprechenden Ergebnisse für Räume vom Typ $CV(X)$, da wir sie in Teil II der Arbeit noch benötigen werden.

7. Definition. Es sei

$$CV^\sigma(X, E) = \{f \in C(X, E[\sigma(E, E')]);\ (vf)(X) \textit{ beschränkt in } E \textit{ für jedes } v \in V\}$$

und

$$CV_0^\sigma(X, E) = \{f \in C(X, E[\sigma(E, E')]);\ vf \textit{ verschwindet im Unendlichen für jedes } v \in V\}.$$

Man beachte, daß *nach dem Satz von Mackey* die Beschränktheit von $(vf)(X)$ in der Topologie von E äquivalent ist dazu, daß die Menge in der schwachen Topologie von $E_\sigma = E[\sigma(E, E')]$ beschränkt ist. Daher gilt

$$CV^\sigma(X, E) = CV(X, E_\sigma) \text{ und } CV_0^\sigma(X, E) < CV^\sigma(X, E).$$

$CV^\sigma(X, E)$ und $CV_0^\sigma(X, E)$ sind lineare Räume, auf denen, wenn $\{p_\alpha;\ \alpha \in A\}$ das Halbnormensystem von E angibt,

$$b\,v_\alpha(f) = \sup_{x\in X} p_\alpha(v(x)f(x)) = \sup_{x\in X} v(x)p_\alpha(f(x))$$

für $v \in V$, $\alpha \in A$, $f \in CV^\sigma(X, E)$ ebenfalls definiert ist. Das gerichtete System

$$\{b\,v_\alpha;\ \alpha \in A,\ v \in V\}$$

gibt also auf diesen Räumen (für $V > 0$) eine lokalkonvexe Topologie, die $CV(X, E)$ bzw. $CV_0(X, E)$ zu topologischen linearen Unterräumen von

$$CV^\sigma(X, E) \text{ bzw. } CV_0^\sigma(X, E)$$

macht. Für lokalkompakte X liegt $C_c(X, E_\sigma)$ dicht in $CV_0^\sigma(X, E)$.

8. Satz. *Definiere für $\tilde{u} \in E\tilde{\varepsilon}CV(X)$ $(V > 0)$ die lineare Abbildung*

$$\tilde{A}: \tilde{u} \to (x \to \tilde{u}(\delta_x)) \quad (x \in X).$$

Dann erhält man:

(1) $\tilde{A}$ *ist topologischer Isomorphismus von* $E\tilde{\varepsilon}CV(X)$ *in* $CV^\sigma(X, E)$; *für*

$$f \in \tilde{A}(E\tilde{\varepsilon}CV(X)) \text{ und } v \in V$$

stellt $\Gamma((vf)(X))$ *eine relativkompakte Menge in E dar.*

(2) $\tilde{A}$ *definiert einen topologischen Isomorphismus von* $E\tilde{\varepsilon}CV_0(X)$, *einem Teilraum von* $E\tilde{\varepsilon}CV(X)$, *in* $CV_0^\sigma(X, E)$.

Beweis. Es gilt $\tilde{A}(\tilde{u}) = \tilde{u} \circ I$, wobei I die kanonische Abbildung von X in $CV'(X)$ bezeichnet, die nach 4. 1. (1) stetig in $(CV(X))'_\sigma = CV'(X)[\sigma(CV'(X), CV(X))]$ ist. Nach Schwartz [24], Proposition 5 von 1, p. 35/36 ist $\tilde{u} \in E\tilde{\varepsilon}CV(X)$ stetig von $(CV(X))'_\sigma$ *in* E_σ, so daß $\tilde{A}(\tilde{u})$ als Zusammensetzung zu $C(X, E_\sigma)$ gehört. Die restlichen Teile beim Beweis von 4. 4 übertragen sich offenbar auch auf diesen Fall, q. e. d.

Bei Identifizierung von topologisch isomorphen Räumen gilt also allgemein — wir setzen stets $V > 0$ voraus —

$$E \otimes_\varepsilon CV(X) \subset E\tilde{\varepsilon}CV(X) \subset CV^\sigma(X, E) \text{ bzw. } E \otimes_\varepsilon CV_0(X) \subset E\tilde{\varepsilon}CV_0(X) \subset CV_0^\sigma(X, E),$$

und auch 4. 5. (2) bleibt mit $CV^\sigma(X, E)$ bzw. $CV_0^\sigma(X, E)$ anstelle von $CV(X, E)$ bzw. $CV_0(X, E)$ richtig. Für lokalkonvexes E ergibt sich ein neuer Beweis der Inklusionen $E \otimes CV(X) \subset CV(X, E)$ bzw. $E \otimes CV_0(X) \subset CV_0(X, E)$ daraus, daß auf dem endlichdimensionalen linearen Unterraum von E, der das Bild von $f \in E \otimes CV(X)$ bzw. $E \otimes CV_0(X)$ enthält, die Topologie von E mit der von $\sigma(E, E')$ induzierten identisch ist. $E \otimes CV_0(X)$ liegt natürlich i. a. nicht in $CV_0^\sigma(X, E)$ dicht; es läßt sich aber eine zusätzliche Eigenschaft der Funktionen aus $E\tilde{\varepsilon}CV_0(X) \subset CV_0^\sigma(X, E)$ finden, die es später erlaubt zu zeigen, daß $E \otimes CV_0(X)$ stets in $E\tilde{\varepsilon}CV_0(X)$ dicht ist (sofern X lokalkompakt).

9. Lemma. *Sei* $f = \tilde{A}(\tilde{u}) \in E\tilde{\varepsilon}CV(X) \subset CV^\sigma(X, E)$ *bzw.* $E\tilde{\varepsilon}CV_0(X) \subset CV_0^\sigma(X, E)$ *und* $v \in V$ *beliebig. Definiere* $A_{v,\varepsilon} = \{x \in X;\ v(x) \geqq \varepsilon\}$ *für* $\varepsilon > 0$. *Dann bildet f die Menge* $A_{v,\varepsilon}$ *stetig in E ab.*

Beweis. $f|_{A_{v,\varepsilon}} = \tilde{u} \circ I|_{A_{v,\varepsilon}}$, und wenn gezeigt wird, daß $I(A_{v,\varepsilon})$ in einer gleichstetigen Menge von $CV'(X)$ bzw. $CV_0'(X)$ liegt, folgt die Behauptung, weil $\tilde{u}$ auf jeder solchen Menge stetig als Abbildung von der schwachen Topologie in E ist. In der Bezeichnungsweise von 4. 2 gilt aber

$$\{v(x)\delta_x;\ x \in A_{v,\varepsilon}\} \subset U_v^\circ,$$

also

$$I(A_{v,\varepsilon}) = \{\delta_x;\ x \in A_{v,\varepsilon}\} \subset \{f \in CV(X) \text{ bzw. } CV_0(X);\ b\,v(f) \leqq \varepsilon\}^0,$$

w. z. b. w.

Ist $Z \leqq V$, so gibt es eine Funktion $v \in V$ mit $v(x) \geqq 1$ für alle $x \in X$. Nach 9 bildet $f = \tilde{A}(\tilde{u})$ ganz X stetig in E ab. Analog ist für $W \leqq V$ die Funktion f auf jeder kompakten Teilmenge von X stetig in E, also stetig auf X, wenn dies k_R-Raum ist. Das liefert einen neuen Beweis von

$$E\tilde{\varepsilon}CV(X) = E\varepsilon CV(X) \subset CV(X, E) \text{ bzw. } E\tilde{\varepsilon}CV_0(X) = E\varepsilon CV_0(X) \subset CV_0(X, E)$$

unter den Voraussetzungen von 4. 4 (und bei lokalkonvexem E). Von nun an betrachten wir wieder nur den Fall $CV_0(X)$.

10. Satz. *Sei $V > 0$, X lokalkompakt, $(E, \{p_\alpha;\ \alpha \in A\})$ lokalkonvex. Dann liegt $E \otimes CV_0(X)$ dicht in $E\tilde{\varepsilon}CV_0(X)$.*

Das Argument mit der Zerlegung der Eins muß hier modifiziert werden, weil die Funktionen aus dem $\tilde{\varepsilon}$-Produkt *nur auf Teilmengen von X stetig* zu sein brauchen.

Zu $f \in E\tilde{\varepsilon}CV_0(X)$, $v \in V$, $\alpha \in A$ und $\varepsilon > 0$ ist $g \in E \otimes CV_0(X)$ zu finden mit $p_\alpha\big((vf - vg)(x)\big) \leqq \varepsilon$ für jedes $x \in X$. Für $f \in CV_0^\sigma(X, E)$ gibt es ein kompaktes K in X mit $p_\alpha\big((vf)(x)\big) < \varepsilon/4$ für $x \in X\setminus K$. Es sei v auf der Abschließung $\overline{K'}$ der offenen relativkompakten Umgebung K' von K durch $M > 0$ beschränkt. Weil f stetig von X in E_σ ist, ist $f(K)$ eine in E_σ kompakte, somit in E beschränkte Menge: Für $N > 0$ sei $p_\alpha(f(x)) \leqq N$ ($x \in K$ beliebig).

Setze $\tilde{A} = A_{v,\varepsilon/2N}$ und $\tilde{K} = K \cap \tilde{A}$ ($\tilde{K}$ kompakt). f bildet $\tilde{A}$ nach 9 stetig in E ab; daher ist für $x \in \tilde{K}$ und mit $U = \left\{e \in E;\ p_\alpha(e) < \frac{\varepsilon}{2M}\right\}$ die Menge $S_x = f\,|\,_{\tilde{A}}^{-1}(f(x) + U)$ offen in $\tilde{A}$, $S_x = O_x \cap \tilde{A}$ für geeignetes O_x offen in X. Mit $U_x = O_x \cap K'$ erhält man in $\bigcup_{x \in \tilde{K}} U_x$ eine offene Überdeckung von $\tilde{K}$, von der $\bigcup_{k=1}^{q} U_k$ ($U_k = U_{x_k}$) eine endliche Teilüberdeckung bilde:

$$\tilde{K} < \bigcup_{k=1}^{q} U_k < K',$$

U_k offen in X, $x_k \in U_k \cap \tilde{K}$, so daß

$$p_\alpha\big(f(x) - f(x_k)\big) < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{für } x \in U_k \cap \tilde{A}.$$

Sei $\{g_k;\ k = 1, \ldots, q\} < C_c(X, R)$ eine dieser Überdeckung zugeordnete Zerlegung der Eins und $g(x) = \sum_{k=1}^{q} f(x_k) g_k(x)$. Zum Beweis, daß g die gesuchte Funktion ist, betrachten wir die Fälle 1. $x \in \tilde{K}$, 2. $x \in K\setminus\tilde{K}$, 3. $x \in \tilde{A}\setminus\tilde{K}$, 4. $x \in X\setminus(K \cup \tilde{A})$.

1. Es gilt

$$p_\alpha\big((vf - vg)(x)\big) = p_\alpha\left[\sum_{k=1}^{q} g_k(x) v(x) \big(f(x) - f(x_k)\big)\right] \leqq \sum_{k=1}^{q} g_k(x) M \frac{\varepsilon}{2M} < \varepsilon.$$

2. Hier ist $x \notin \tilde{A}$, d. h. $v(x) < \varepsilon/2N$,

$$p_\alpha\big((vf - vg)(x)\big) \leqq v(x)\left(p_\alpha(f(x)) + p_\alpha\left[\sum_{k=1}^{q} g_k(x) f(x_k)\right]\right) \leqq \frac{\varepsilon}{2N}\left[N + \sum_{k=1}^{q} g_k(x) N\right] \leqq \varepsilon.$$

3. $g_k(x) p_\alpha\big(v(x) f(x_k)\big) \neq 0$ nur, wenn $x \in U_k\setminus K$; dann gilt aber

$$p_\alpha\big(v(x) f(x_k)\big) \leqq p_\alpha\big(v(x) f(x)\big) + v(x) p_\alpha\big(f(x_k) - f(x)\big) < \frac{\varepsilon}{4} + M \frac{\varepsilon}{2M} = \frac{3}{4}\varepsilon,$$

somit

$$p_\alpha\big((vf - vg)(x)\big) < \frac{\varepsilon}{4} + p_\alpha\left[v(x) \sum_{k=1}^{q} g_k(x) f(x_k)\right] \leqq \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{k=1}^{q} g_k(x) \frac{3}{4}\varepsilon \leqq \varepsilon.$$

4. $p_\alpha\big((vf - vg)(x)\big) < \frac{\varepsilon}{4} + v(x) p_\alpha\left[\sum_{k=1}^{q} g_k(x) f(x_k)\right] \leqq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2N} \sum_{k=1}^{q} g_k(x) N < \varepsilon,$

q. e. d.

11. Theorem. *Sei $V > 0$, X lokalkompakt.*

(1) *Dann hat $CV_0(X)$ immer die A. E. im Sinne von L. Schwartz, d. h. die Identität von $E = CV_0(X)$ ist Berührpunkt von $E \otimes E'$ in dem Raum $\mathscr{L}_{co}(E, E)$ der stetigen linearen Operatoren auf E, versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf absolutkonvexen kompakten Mengen in E.*

(2) *Ist $CV_0(X)$ quasivollständig, so erfüllt $CV_0(X)$ die A. E. im üblichen Sinne.*

Beweis. (1) folgt aus 10 nach Schwartz [24], § 1, Proposition 11, während für quasivollständige Räume allgemein die Approximationsbedingungen von Schwartz und von Grothendieck identisch sind.

Als Beispiel zu diesem Theorem 11 betrachte man die von W. B. Jones in [13] eingeführten lokalkonvexen Räume $H(X)$ und $C(X)$ mit der Topologie $\tau_{\mathscr{S}}$. Dabei ist X ein Gebiet in der komplexen Ebene, $H(X)$ = holomorphe Funktionen auf X und $\tau_{\mathscr{S}}$ die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf dem System $\mathscr{S}$ aller kompakten Teilmengen von X, die nur endlich viele Häufungspunkte besitzen. $C(X)[\tau_{\mathscr{S}}]$ ist ein vollständiger gewichteter Raum stetiger Funktionen vom Typ $CV_0(X)$ für

$$V = \{\lambda\chi_S;\ \lambda > 0,\ S \in \mathscr{S}\}$$

und besitzt daher nach 11. (2) die A. E. Wegen [13], Corollary 2. 2 stellt $C(X)[\tau_{\mathscr{S}}]$ die Vervollständigung von $H(X)[\tau_{\mathscr{S}}]$ dar. Da ein lokalkonvexer Raum bekanntlich die A. E. besitzt, wenn dies für seine vollständige Hülle gilt, hat also auch $H(X)[\tau_{\mathscr{S}}]$ die A. E. Weder $C(X)[\tau_{\mathscr{S}}]$ noch $H(X)[\tau_{\mathscr{S}}]$ sind übrigens nukleare Räume (vgl. p. 154 von [13]).

Zusatz bei der Korrektur. In dem Artikel von *Per Enflo*, A counterexample to the approximation problem (erscheint in Acta Math.) wurde kürzlich zum ersten Mal ein Banachraum angegeben, der die Approximationseigenschaft nicht besitzt.

Literatur

[1] *R. C. Buck*, Bounded continuous functions on a locally compact space, Michigan Math. J. **5** (1958), 95—104.

[2] *H. S. Collins, J. R. Dorroh*, Remarks on certain function spaces, Math. Ann. **176** (1968), 157—168.

[3] *W. E. Dietrich jr.*, The maximal ideal space of the topological algebra $C(X, E)$, Math. Ann. **183** (1969), 201—212.

[4] *L. Ehrenpreis*, Theory of distributions for locally compact spaces, Mem. AMS **21** (1956).

[5] *D. O. Etter jr.*, Vector-valued analytic functions, Trans. AMS **119** (1965), 352—366.

[6] *B. Gramsch*, Integration und holomorphe Funktionen in lokalbeschränkten Räumen, Math. Ann. **162** (1965), 190—210.

[7] *B. Gramsch*, Tensorprodukte und Integration vektorwertiger Funktionen, Math. Z. **100** (1967), 106—122.

[8] *B. Gramsch, D. Vogt*, Holomorphe Funktionen mit Werten in nicht lokalkonvexen Vektorräumen, J. reine u. angew. Math. **243** (1970), 159—170.

[9] *A. Grothendieck*, Sur certains espaces de fonctions holomorphes. I, J. reine u. angew. Math. **192** (1953), 35—64.

[10] *A. Grothendieck*, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Mem. AMS **16**, reprint 1966.

[11] *M. Hervé*, Analytic and plurisubharmonic functions in finite and infinite dimensional spaces, Springer Lecture Notes Math. **198** (1971).

[12] *T. Husain*, The open mapping and closed graph theorems in topological vector spaces, Braunschweig 1965.

[13] *W. B. Jones*, A locally convex topology for spaces of holomorphic functions, Math. Ann. **177** (1968), 143—155.

[14] *J. L. Kelley, I. Namioka* (and co-authors), Linear topological spaces, Princeton 1963.

[15] *V. Klee*, Shrinkable neighborhoods in Hausdorff linear spaces, Math. Ann. **141** (1960), 281—285.

[16] *V. Klee*, Leray-Schauder theory without local convexity, Math. Ann. **141** (1960), 286—296.

[17] *J. T. Marti*, Introduction to the theory of bases, Berln-Hetdelberg-New York 1969.

[18] *L. Nachbin*, Elements of approximation theory, Princeton 1967.

[19] *J. B. Prolla*, Weighted spaces of vector-valued continuous functions, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **89** (1971), 145—158.

[20] *J. P. Prolla*, The weighted Dieudonné theorem for density in tensor products, Indag. Math. **33** (1971), 170—175.

[21] *J. B. Prolla*, Weighted approximation and slice products of modules of continuous functions, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. (3) **26** (1972), 563—571.

[22] *H. H. Schaefer*, Topological vector spaces, New York 1964.

[23] *L. Schwartz*, Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles, J. Analyse Math. **4** (1954), 88—148.

[24] *L. Schwartz*, Théorie des distributions à valeurs vectorielles. I, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **7** (1957), 1—142.

[25] *A. H. Shuchat*, Approximation of vector-valued continuous functions, Proc. AMS **31** (1972), 97—103.

[26] *W. H. Summers*, Weighted locally convex spaces of continuous functions, Dissertation Louisiana State Univ. 1968.

[27] *W. H. Summers*, A representation theorem for biequicontinuous completed tensor products of weighted spaces, Trans. AMS **146** (1969), 121—132.

[28] *W. H. Summers*, Dual spaces of weighted spaces, Trans. AMS **151** (1970), 323—333.

[29] *C. Todd*, Stone-Weierstrass theorems for the strict topology, Proc. AMS **16** (1965), 654—659.

[30] *L. Waelbroeck*, Some theorems about bounded structures, J. Functional Analysis **1** (1967), 392—408.

[31] *J. Wells*, Bounded continuous vector-valued functions on a locally compact space, Michigan Math. J. **12** (1965), 119—126.

[32] *H. Buchwalter*, Topologies et compactologies, Publ. Dépt. Math. Lyon 6—2 (1969), 1—74.

[33] *H. Buchwalter*, Problèmes de complétion topologique, DEA Math. Pures Lyon 1969—1970.

[34] *H. Buchwalter*, Produit topologique, produit tensoriel et c-replétion, Coll. Intern. Anal. Fonct. Bordeaux 1971.

Fachbereich Mathematik der Universität, 675 Kaiserslautern, Pfaffenbergstraße 95

Eingegangen 15. Dezember 1971