Math. Annalen 178, 302—314 (1968)

Eine assoziative Algebra über einem Unterraum der Distributionen

BENNO FUCHSSTEINER

Es wird eine assoziative Algebra, die eine Erweiterung der Algebra der stetigen Funktionen ist, und für welche die Produktregel des Differentialoperators gültig ist, für einen Unterraum $\boldsymbol{F}$ der Distributionen gesucht. Man kann zeigen, daß eine solche Algebra vollständig definiert ist, wenn man alle Produkte $\delta\lambda$ ($\lambda \in \boldsymbol{F}$, δ ist eine δ-Distribution) so vorgibt, daß die Produkte $\delta\lambda_1\lambda_2$ und $\lambda_1\delta\lambda_2$ assoziativ sind. Da die Distributionen sich als formale Ableitungen von stetigen Funktionen auffassen lassen, kann man jeder Distribution $\lambda = \boldsymbol{D}^n g$ (g ist eine stetige Funktion, $\boldsymbol{D}$ der Differentialoperator) durch die n-fache rechte bzw. linke Derivierte von g einen Wert $W\lambda(x)$ für jeden Punkt x der reellen Achse zuordnen. Der Unterraum $\boldsymbol{F}$ ist so definiert, daß dieser Wert immer existiert.

Indem man

$$\left(\sum_n A_n \delta(x - x_n)\right) \lambda := \sum_n (W\lambda(x_n)\, A_n\, \delta(x - x_n))$$

setzt, erhält man eine den obengenannten Forderungen genügende Algebra; diese Algebra ist nicht kommutativ. Es wird weiterhin gezeigt, daß diese Algebra die einzige Algebra ist, die den vorgegebenen Bedingungen genügt.

§ 1. Einführung

Wir betrachten Äquivalenzklassen von Funktionen. Zwei Funktionen sind äquivalent und gehören damit zur selben Funktionenklasse, wenn ihre Funktionswerte nur auf einer Teilmenge des Definitionsbereichs, die das Lebesguesche Maß Null hat, verschieden sind. Im folgenden wollen wir die einzelnen Elemente der Funktionenklassen mit Wertfunktionen oder auch Wert bezeichnen. Die Funktionenklassen werden, wie dies auch in der Literatur üblich ist, als Funktionen bezeichnet.

Es werden reelle Distributionen von einer Variablen untersucht. Der Begriff Distribution wird im Sinne von Sebastião e Silva [6], [7] gebraucht. Sebastião e Silva stellte ein kategorisches Axiomensystem der Distributionen auf. Er zeigt also, daß alle Realisierungen dieses Systems einander isomorph sind. Das Axiomensystem sei hier kurz wiederholt. $\boldsymbol{f}$ sei die Menge der stetigen Funktionen, $\boldsymbol{T}$ die Menge der Distributionen.

Axiom 1. $f \subset T$.

Axiom 2. *Es existiert eine lineare Abbildung* D *von* T *auf sich,*

$$D: T \twoheadrightarrow T,$$

welche eine differenzierbare Funktion auf ihre Ableitung abbildet.

Axiom 3. *Für jede Distribution* λ *existiert eine natürliche Zahl* r *und ein* $g \in f$, *so daß*

$$\lambda = D^r g .$$

Axiom 4. *Ist* r *eine natürliche Zahl und gilt für* $g \in f$, $h \in f$

$$D^r h = D^r g ,$$

dann ist $h - g$ *ein Polynom vom Grade* $< r$.

Man kann nach diesem kategorischen System die Distributionen als formale Ableitungen endlicher Ordnung der stetigen Funktionen ansehen.

Ist $g \in f$ genau n-mal stetig differenzierbar, ist also $D^n g \in f$ und $D^{n+1} g \notin f$, so ist die globale Ordnung von g gleich $-n$. Die globale Ordnung von g wird mit $G(g)$ bezeichnet.

$$G(g) = -n .$$

Mit

$$G(D\lambda) := G(\lambda) + 1 \quad \text{für alle} \quad \lambda \in T$$

ist die globale Ordnung dann für alle Distributionen definiert. Da der Begriff der lokalen Ordnung für unsere Zwecke nicht benötigt wird, werden wir die globale Ordnung kurz mit Ordnung bezeichnen.

§ 2. Fast-beschränkte Distributionen

Der Unterraum F der Distributionen, für den wir im folgenden eine assoziative Algebra suchen, wird der Raum der fast-beschränkten Distributionen genannt

$$F \subset T .$$

Definition 1. Eine Distribution $\lambda = D^n g$ heißt fast-beschränkt, wenn sie Ableitung endlicher Ordnung einer Funktion g ($g \in f$) ist, die für jede natürliche Zahl k und in jedem endlichen Intervall T bis auf eine endliche Punktmenge $J_T(k, g)$, k-fach gleichmäßig stetig differenzierbar ist.

g ist eine Stammfunktion von λ.

Beispiele für fast-beschränkte Distributionen sind:

$$|x|, \quad \delta(x - x_1), \quad \delta'(x - x_2), \dots$$

F ist bezüglich D abgeschlossen. Das heißt, mit $\lambda \in F$ gilt auch $D\lambda \in F$. Weiter folgt für $\lambda \in F$ und $\lambda = Dg$ ($g \in f$) aus der Definition der fast-beschränkten Distributionen, daß λ eine stückweise stetige Funktion ist, die in jedem endlichen Intervall beschränkt ist.

§ 3. Forderungen an eine Algebra der fast-beschränkten Distributionen

Es soll nun für $\boldsymbol{F}$ eine Algebra A gesucht werden.

$$A : \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{F} \twoheadrightarrow \boldsymbol{F}\,.$$

Und zwar sollen alle Algebren betrachtet werden, die folgenden Bedingungen genügen.

A I. *$A(\lambda_1 \times \lambda_2) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$, $(\lambda_1, \lambda_2 \in \boldsymbol{F})$, wenn $G(\lambda_1) \leqq 1$ und $G(\lambda_2) \leqq 1$. Dabei ist $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ die Funktion, die durch Multiplikation der Funktionswerte der stückweise stetigen Funktionen λ_1 und λ_2 entsteht.*

A II. *In der Algebra existiert eine Derivation $\boldsymbol{D}$, die mit dem Differentialoperator identisch ist. Es gilt also*

$$\boldsymbol{D}A(\lambda_1 \times \lambda_2) = A(\boldsymbol{D}\lambda_1 \times \lambda_2) + A(\lambda_1 \times \boldsymbol{D}\lambda_2)\,.$$
$$\lambda_1, \lambda_2 \in \boldsymbol{F}\,.$$

A III. *Die Algebra ist assoziativ*

$$A\{A(\lambda_1 \times \lambda_2) \times \lambda_3\} = A\{\lambda_1 \times A(\lambda_2 \times \lambda_3)$$
$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \boldsymbol{F}\,.$$

Die Kommutativität der Algebra wird nicht gefordert. Der Einfachheit halber wird im folgenden $A(\lambda_1 \times \lambda_2)$ mit $\lambda_1 \lambda_2$ bezeichnet. A I bedeutet, daß die Algebra eine Erweiterung der Funktionenalgebra ist, in der nach A II die Produktregel der Differentiation gültig sein soll. Es wird also insbesondere die Leibnizsche Formel gültig sein

$$(\boldsymbol{D}^m \lambda_1)\,\lambda_2 = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \boldsymbol{D}^{m-k}\{\lambda_1 \boldsymbol{D}^k \lambda_2\}\,. \tag{1}$$
$$\lambda_1, \lambda_2 \in \boldsymbol{F}\,.$$

Mit A I sind dann alle Produkte $\lambda_1 \lambda_2$ definiert, für die gilt

$$G(\lambda_1) + G(\lambda_2) \leqq 2\,.$$

Die so erklärten Produkte sind die schon von L. Schwartz [3], [4], [5] betrachteten «produits multiplicatifs».

Es sollen nach einigen Vorbereitungen folgende Sätze bewiesen werden.

Satz 1. A I, A II *und* A III *sind widerspruchsfrei, d. h. es existiert mindestens eine Realisierung des Systems.*

Satz 2. *Keine Realisierung ist kommutativ.*

Die Sätze werden durch Angabe aller Realisierungen bewiesen.

§ 4. Der Wert einer Distribution

Die Untermenge der stetigen Funktionen von $\boldsymbol{F}$ wird mit $\boldsymbol{\varphi}$ bezeichnet $(\boldsymbol{\varphi} \subset \boldsymbol{f})$. Die ersten Ableitungen $\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varphi}$ der Elemente von $\boldsymbol{\varphi}$ sind stückweise stetige Funktionen. Wir betrachten einen Operator $\boldsymbol{T}$

$$\boldsymbol{T} : \boldsymbol{F} \twoheadrightarrow \boldsymbol{D}\boldsymbol{\varphi}\,.$$

Definition 2. Ist $\lambda = \boldsymbol{D}^n g$ $(\lambda \in \boldsymbol{F}, g \in \boldsymbol{\varphi})$, so ist $\boldsymbol{T}\lambda(x)$ eine Funktion aus $\boldsymbol{D\varphi}$ mit dem Funktionswert:

$$\boldsymbol{T}\lambda(x) = \begin{cases} \dfrac{d^n g(x)}{dx^n} & \text{für} \quad x \notin J(n, g) \\ \text{undefiniert sonst.} \end{cases}$$

Da die Punktmenge, auf der $\boldsymbol{T}\lambda(x)$ undefiniert ist, eine Menge vom Maß Null ist, wird durch $\boldsymbol{T}\lambda(x)$ eine Funktionenklasse im Sinne von § 1 bestimmt.

Es ist

$$\boldsymbol{T}\alpha = \alpha \quad \text{für alle} \quad \alpha \in \boldsymbol{D\varphi}.$$

Also gilt

$$\boldsymbol{T}^2 = \boldsymbol{T}. \tag{2}$$

$\boldsymbol{T}$ ist ein Projektionsoperator.

Es sollen nun den Funktionen $\boldsymbol{T}\lambda(x)$ $(\lambda = \boldsymbol{D}^n g)$ auch Funktionswerte in den Punkten aus $J(n, g)$ zugeordnet werden. Es wird jeder fast-beschränkten Distribution λ eine Wertfunktion zugeordnet, in dem die offenen Mengen, über denen $\boldsymbol{T}\lambda$ definiert ist, abgeschlossen werden. Dafür wird die Menge der reellen Zahlen $\boldsymbol{R}$ in zwei beliebige fremde Punktmengen zerlegt

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{P}_1 \cup \boldsymbol{P}_2 \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{P}_1 \cap \boldsymbol{P}_2 = \phi.$$

Der Wert einer Distribution λ, d. h. die der Distribution λ zugeordnete Wertfunktion $W\lambda(x)$ wird dann folgendermaßen definiert.

Definition 3.

$$W\lambda(x) = \begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \boldsymbol{T}\lambda(x - |\varepsilon|) & \text{für} \quad x \in \boldsymbol{P}_1 \\ \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \boldsymbol{T}\lambda(x + |\varepsilon|) & \text{für} \quad x \in \boldsymbol{P}_2 \end{cases}$$

Für $\lambda = \mathbf{D}^n g \in \boldsymbol{F}$ existieren diese Grenzwerte immer (s. Definition 1). Die zu $W\lambda(x)$ komplementäre Wertfunktion $\bar{W}\lambda(x)$ wird definiert durch

Definition 4.

$$\bar{W}\lambda(x) = \begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \boldsymbol{T}\lambda(x + |\varepsilon|) & \text{für} \quad x \in \boldsymbol{P}_1 \\ \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \boldsymbol{T}\lambda(x - |\varepsilon|) & \text{für} \quad x \in \boldsymbol{P}_2. \end{cases}$$

Für stetige Funktionen g gilt

$$Wg(x) = \bar{W}g(x).$$

An den Sprungstellen der Elemente aus $\boldsymbol{D\varphi}$ sind jedoch Wert und komplementärer Wert verschieden.

§ 5. Homogene fast-beschränkte Distributionen

Es wird folgender Projektionsoperator eingeführt.

$$\boldsymbol{\Pi} = \mathbf{1} - \boldsymbol{T}. \tag{3}$$

Wir definieren

$$\boldsymbol{D}_T = \boldsymbol{TD}, \qquad \boldsymbol{D}_\Pi = \boldsymbol{\Pi D}. \tag{4}$$

Es gilt:

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}_T+\boldsymbol{D}_\Pi\,. \tag{5}$$

Da $\boldsymbol{T}$ und $\boldsymbol{\Pi}$ Projektionsoperatoren sind, besitzen $\boldsymbol{D}_T$ und $\boldsymbol{D}_\Pi$ im Gegensatz zu $\boldsymbol{D}$ keine Rechtsreziproken.

Aus Definition 2 folgt

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{D}\boldsymbol{T}\lambda(x)=\boldsymbol{T}\boldsymbol{D}\lambda(x)\,.$$

Also ist

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{D}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{D}\,. \tag{6}$$

Damit gilt

$$\boldsymbol{D}_T\,\boldsymbol{D}_\Pi=\boldsymbol{T}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{1}-\boldsymbol{T})\,\boldsymbol{D}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{D}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{1}-\boldsymbol{T})\,\boldsymbol{D}=\boldsymbol{0}\,. \tag{7}$$

Für $\boldsymbol{D}^n$ erhält man dann

$$\boldsymbol{D}^n=(\boldsymbol{D}_T+\boldsymbol{D}_\Pi)^n=\sum_{k=0}^{n}\boldsymbol{D}_\Pi^{n-k}\boldsymbol{D}_T^k\,. \tag{8}$$

Den Integraloperator $\boldsymbol{I}_a$ für fast-beschränkte Distributionen definieren wir mit *Definition 5.* $\boldsymbol{I}_a\boldsymbol{D}\lambda=\lambda-W\lambda(a)$.

a ist eine Konstante.

Es soll nun noch der Begriff der homogenen fast-beschränkten Distribution eingeführt werden.

Definition 6. Eine fast-beschränkte Distribution λ ist homogen von der Ordnung n, wenn folgendes gilt

a) $\lambda=\boldsymbol{D}_\Pi^{n-1}\alpha\,(\alpha\in\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varphi})$ für $G(\lambda)=n>1$.

b) $\boldsymbol{T}\boldsymbol{D}^{2-n}\lambda=0$ für $G(\lambda)=n\leqq 1$.

Die Menge der homogenen Distributionen wird mit $\boldsymbol{h}$ bezeichnet. $\boldsymbol{h}^n$ ist die Menge der homogenen Distributionen von der Ordnung n. Mit Definition 6 ist offensichtlich, daß die Ableitung einer homogenen Distribution wieder homogen ist. Die Umkehrung gilt auch; ist die n-te Ableitung von λ homogen, so ist auch λ homogen. δ-Distributionen sind die homogenen Distributionen zweiter Ordnung. $\boldsymbol{\delta}$ ist die Menge der δ-Distributionen.

Mit dem Operator $\boldsymbol{S}_n$

$$\boldsymbol{S}_n=\boldsymbol{I}_a^{n+1}\boldsymbol{D}_\Pi\boldsymbol{D}_T^n\,,\qquad n=0,1,2,3,\ldots$$

und $\beta\in\boldsymbol{\varphi}$ erhalten wir Distributionen $\boldsymbol{S}_n\beta$, die homogen von der Ordnung $1-n$ sind.

Damit erhalten wir für $\beta\in\boldsymbol{\varphi}$ folgende Zerlegung

$$\beta=\left(\boldsymbol{1}-\sum_{k=0}^{n}\boldsymbol{S}_k\right)\beta+\sum_{k=0}^{n}\boldsymbol{S}_k\beta\,. \tag{9}$$

Mit Gl. (8) erhält man

$$\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{D}^r\left(\boldsymbol{1}-\sum_{k=0}^{n}\boldsymbol{S}_k\right)\beta=0\quad\text{für}\quad r\leqq n+1\,.$$

Daraus folgt, daß der erste Term in (9) eine Distribution der Ordnung $-n$ ist. Der zweite Term ist eine Summe von homogenen Distributionen verschiedener Ordnungen. Wendet man auf Gl. (9) den Operator $\boldsymbol{D}^m$ an, so erhält man:

Hilfssatz 1. *Jede fast-beschränkte Distribution λ, mit $G(\lambda)=m$, kann für jedes $n \geqq 0$ in eine Summe zerlegt werden, die aus einer fast-beschränkten Distribution λ^*, mit $G(\lambda^*)=m-n \leqq G(\lambda)$, und einer Summe von homogenen Distributionen besteht*

$$\lambda = \boldsymbol{D}^m \beta = \boldsymbol{D}^m \left(\mathbf{1} - \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{S}_k\right)\beta + \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{D}^m \boldsymbol{S}_k \beta$$

$$\lambda^* = \boldsymbol{D}^m \left(\mathbf{1} - \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{S}_k\right)\beta\,.$$

Man muß daher für eine Algebra der fast-beschränkten Distributionen nur die Produkte von homogenen Distributionen betrachten. Denn man kann für zwei Distributionen λ_1, λ_2 mit $G(\lambda_1)=k, G(\lambda_2)=l$ nach Hilfssatz 1 folgende Zerlegungen wählen

$$\lambda_1 = \lambda_1^* + \sum_i h_1^i \qquad h_1^i \in \boldsymbol{h}^i$$

$$\lambda_2 = \lambda_2^* + \sum_i h_2^i \qquad h_2^i \in \boldsymbol{h}^i$$

mit $G(\lambda_1^*) \leqq -l$ und $G(\lambda_2^*) \leqq -k$.

Damit sind die Produkte, bei denen nicht beide Faktoren homogen sind, durch A I und Gl. (1) bestimmt.

§ 6. *D*-Algebren

Im folgenden sollen Algebren von fast-beschränkten Distributionen betrachtet werden, für welche die Bedingungen A I und A II erfüllt sind. Die Assoziativität soll noch nicht gefordert werden. Diese Algebren werden wegen der Gültigkeit der Gl. (1) $\boldsymbol{D}$-Algebren genannt. Es genügt, eine $\boldsymbol{D}$-Algebra der homogenen fast-beschränkten Distributionen zu betrachten. Eine solche $\boldsymbol{D}$-Algebra erhält man durch bilineare Abbildungen $\boldsymbol{A}_n : \boldsymbol{\delta} \times \boldsymbol{h}^n \to \boldsymbol{F}$. Für $n = 1, 2, 3, \ldots$ kann man diese bilinearen Abbildungen willkürlich wählen. Für $n \leqq 0$ ist $\boldsymbol{A}_n$ durch A I und Gl. (3) definiert. Mit den $\boldsymbol{A}_n$ und der Gültigkeit von Gl. (1) ist dann eine $\boldsymbol{D}$-Algebra eindeutig definiert, wenn man

$$\delta_1 h_1^n := \boldsymbol{A}_n(\delta_1 \times h_1^n)$$

setzt.

Denn es sind dann alle Produkte von homogenen fast-beschränkten Distributionen eindeutig bestimmt; dies soll gezeigt werden. Alle homogenen Distributionen lassen sich als $\boldsymbol{D}^m \delta_1$ bzw. $\boldsymbol{I}^m \delta_2$ $(\delta_1, \delta_2 \in \boldsymbol{\delta})$ darstellen. Aus der Leibnizschen Formel folgt für $(\boldsymbol{D}^m \delta_1)\, h_1^n$

$$(\boldsymbol{D}^m \delta_1)\, h_1^n = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \boldsymbol{D}^{m-k} (\delta_1 \boldsymbol{D}^k h_1^n)\,. \tag{10}$$

Die Glieder auf der rechten Seite sind aber durch die A_{n+k} bestimmt. Für $(I^m\delta_2)\,h_2^n$ folgt aus der Leibnizschen Formel

$$(I^m\delta_2)\,h_2^n=\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{r}{k}D^{r-k}\{(D^kI^m\delta_2)\,I^rh_2^n\}\,.$$

Wählt man ein $r\geqq \operatorname{Max}(m,n+1)$, so kann man schreiben

$$\begin{aligned}(I^m\delta_2)\,h_2^n=&\sum_{l=0}^{m-1}(-1)^l\binom{r}{l}D^{r-l}\{(D^lI^m\delta_2)\,I^rh_2^n\}\\&+\sum_{k=m}^{r}(-1)^k\binom{r}{k}D^{r-k}\{(D^{k-m}\delta_2)\,I^rh_2^n\}\,.\end{aligned}\tag{11}$$

Da $r\geqq n+1$ und $l<m$, sind in der ersten Summe die Terme $(D^lI^m\delta_2)\,I^rh_2^n$ durch A I und Gl. (1) bestimmt. In der zweiten Summe sind die einzelnen Produkte mit Gl. (10) bestimmt.

Man kann also durch beliebige Vorgabe der Abbildungen A_n $(n=1,2,3,\ldots)$ eine D-Algebra konstruieren. Jedoch sind nicht alle so konstruierten Algebren assoziativ.

§ 7. Assoziative D-Algebren

Wir wollen uns überlegen, wann eine D-Algebra assoziativ ist. Offensichtlich muß bei einer assoziativen Algebra für jede δ-Distribution gelten

$$\lambda(\delta_1\lambda^*)-(\lambda\delta_1)\,\lambda^*=0\tag{12}$$

$$(\delta_1\lambda)\,\lambda^*-\delta_1(\lambda\lambda^*)=0\,.\quad\text{für alle}\quad \lambda,\lambda^*\in F\quad\text{und}\quad \delta_1\in\boldsymbol{\delta}\,.\tag{13}$$

Daß die Gültigkeit von (12) und (13) auch hinreichend für die Assoziativität der Algebra ist, werden wir im folgenden zeigen. Wir gehen davon aus, daß (12) und (13) erfüllt ist. Dann gelten folgende Hilfssätze.

Hilfssatz 2. *Es gibt keine homogene Distribution h_1 mit $G(h_1)>2$, für die eine der Ungleichung gilt*

$$\lambda(h_1\lambda^*)-(\lambda h_1)\,\lambda^*\neq 0\tag{14}$$

$$(h_1\lambda)\,\lambda^*-h_1(\lambda\lambda^*)\neq 0\,.\tag{15}$$

Beweisannahme: Es gibt Distributionen h_1 mit $G(h_1)>2$, für die eine der Ungleichungen (14) oder (15) erfüllt ist, z. B.

$$\lambda(h_1\lambda^*)-(\lambda h_1)\,\lambda^*\neq 0\,.$$

Das Minimum der Ordnungen $G(h_1)$ bezeichnen wir mit n. Es muß ein Minimum existieren, da mit $n>2$, n nach unten beschränkt ist. Wir betrachten ein $h_1=Dh_1^*$ mit $G(h_1)=n$.

Aus $$\begin{aligned}\lambda\{(Dh_1)\,\lambda^*\}-\{(\lambda\,Dh_1)\lambda^*\}=[D\{&\lambda(h_1^*\lambda^*)-(\lambda h_1^*)\,\lambda^*\}\\&-(D\lambda)\,(h_1^*\lambda^*)+\{(D\lambda)\,h_1^*\}\,\lambda^*\\&-\lambda(h_1^*\,D\lambda^*)+(\lambda h_1^*)\,D\lambda^*]\neq 0\end{aligned}$$

und $G(h_1^*)=n-1$ folgt, daß es auch homogene Distributionen h_1 geben müßte, mit

$$G(h_1)=n-1$$

und
$$(\lambda_1 h_1)\lambda_2-\lambda_1(h_1\lambda_2)\neq 0\,.$$

Dies widerspricht aber der Voraussetzung, daß n minimal ist. Die Beweisannahme war also falsch. Für (15) ist der Beweis völlig analog.

Hilfssatz 3. *Es gibt keine homogene Distribution h_1 mit $G(h_1)<2$, für die eine der Ungleichungen*

$$(\lambda h_1)\lambda^*-\lambda(h_1\lambda^*)\neq 0 \tag{16}$$

$$(h_1\lambda)\lambda^*-h_1(\lambda\lambda^*)\neq 0 \tag{17}$$

gilt.

Beweisannahme: Es gibt h_1 mit $G(h_1)<2$, für die (17) erfüllt ist. Das Maximum der Ordnungen der h_1 bezeichnen wir mit n. Es existiert, da $G(h_1)$ nach oben beschränkt ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß λ oder λ^* von endlicher Ordnung ist, denn wenn beide ∞ – oft differenzierbar wären, wäre das Produkt sowieso assoziativ. Wir nehmen an $G(\lambda)>-\infty$.

Weiter zerlegen wir λ in eine Summe von homogenen Distributionen. Es muß also eine homogene Distribution h^* geben, für die gilt:

$$(h_1 h^*)\lambda^*-h_1(h^*\lambda^*)\neq 0 \quad \text{und} \quad G(h_1)=n\,.$$

Durch den Hilfssatz 2 ist die Ordnung $G(h^*)$ nach oben beschränkt. Es gibt für die Ordnungen von h^* also auch ein Maximum, welches wir mit m bezeichnen. Wir betrachten nun:

$$h_1(h^*\lambda^*)-(h_1 h^*)\lambda^*\neq 0 \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} G(h_1)&=n\\ G(h^*)&=m\,. \end{aligned}$$

Mit $\lambda^*=\boldsymbol{D}^k\beta$ geht die Ungleichung über in:

$$h_1(h\boldsymbol{D}^k\beta)-(h_1 h^*)\boldsymbol{D}^k\beta=\boldsymbol{D}^k\{h_1(h^*\beta)-(h_1h^*)\beta\}\neq 0\,.$$

die übrigen Glieder fallen wegen der Maximaleigenschaft von $G(h^*)$ und $G(h_1)$ weg. Mit $h_1=\boldsymbol{D}^r h_0$ geht die Ungleichung über in

$$\boldsymbol{D}^k\{(\boldsymbol{D}^r h_0)(h^*\beta)-[(\boldsymbol{D}^r h_0)h^*]\beta\}=\left[\sum_{l=0}^{r}(-1)^l\binom{r}{l}\boldsymbol{D}^{k+l}\{h_0(h^*\boldsymbol{D}^{r-l}\beta)-(h_0h^*)\boldsymbol{D}^{r-l}\beta\}\right]\neq 0\,.$$

Wählen wir nun k und r so, daß

$$G(\boldsymbol{D}^r\beta)\leqq 1$$

$$G(h_0)\ \leqq 1\,,$$

so sind die Terme auf der rechten Seite assoziativ.

Es folgt also entgegen unserer Annahme

$$h_1(h^*\lambda^*) - (h_1 h^*)\lambda^* = 0 .$$

Der Beweis für (17) ist wieder analog.

Aus Hilfssatz 2 und 3 folgt, daß die Gültigkeit von (12) und (13) notwendig und hinreichend für die Assoziativität der $\boldsymbol{D}$-Algebra ist.

§ 8. Angabe einer assoziativen $\boldsymbol{D}$-Algebra

Fast-beschränkte δ-Distributionen lassen sich darstellen als

$$\sum_n A_n \delta(x - x_n) , \tag{18}$$

wobei an die x_n nur die Bedingung gestellt ist, daß sie im Endlichen keinen Häufungspunkt haben dürfen. Als weiteres Hilfsmittel wollen wir noch das Produkt von δ-Distributionen mit Wertfunktionen definieren.

Definition 7.

$$W\lambda \left\{\sum_{(n)} A_n \delta(x - x_n)\right\} = \left\{\sum_{(n)} A_n \delta(x - x_n)\right\} W\lambda = \sum_{(n)} W\lambda(x_n)\, A_n \delta(x - x_n)$$

$$\overline{W}\lambda \left\{\sum_{(n)} A_n \delta(x - x_n)\right\} = \left\{\sum_{(n)} A_n \delta(x - x_n)\right\} \overline{W}\lambda = \sum_{(n)} \overline{W}\lambda(x_n)\, A_n \delta(x - x_n) .$$

Diese Definition ist kein Vorgriff auf die gesuchte Algebra, da Wertfunktionen nicht Elemente von $\boldsymbol{F}$ sind. Jedoch ist das Produkt wieder Element von $\boldsymbol{F}$; es ist eine δ-Distribution.

Es wird nun eine $\boldsymbol{D}$-Algebra definiert durch

$$\boldsymbol{A}_n(\delta_1 \times h_1^n) = W h_1^n \delta_1 , \qquad h_1^n \in \boldsymbol{h}^n . \tag{19}$$

Für $n \leqq 0$ genügt diese Produktdefinition A I und Gl. (1). Es sollen nun allgemein die Produkte von homogenen Distributionen für diese $\boldsymbol{D}$-Algebra bestimmt werden.

Aus (19) erhalten wir

$$\delta_1 \lambda = 0, \quad \text{wenn} \qquad \boldsymbol{T}\lambda = 0$$

oder

$$\delta_1(\boldsymbol{\Pi}\lambda) = 0 \quad \text{für alle} \quad \delta_1 \in \boldsymbol{\delta} \quad \text{und} \quad \lambda \in \boldsymbol{F} . \tag{20}$$

Durch Differentiation von (20)

$$\delta_1 \boldsymbol{D\Pi}\lambda + (\boldsymbol{D}\delta_1)(\boldsymbol{\Pi}\lambda) = 0 ,$$

und mit (19)

$$(\boldsymbol{D}\delta_1)(\boldsymbol{\Pi}\lambda) = 0 .$$

Durch weitere Differentiationen

$$(\boldsymbol{D}^n\delta_1)(\boldsymbol{\Pi}\lambda) = 0 . \tag{21}$$

Aus (21) folgt durch Zerlegung von $\boldsymbol{\Pi}\lambda$ in homogene Distributionen

$$(\boldsymbol{\Pi}\lambda)(\boldsymbol{\Pi}\lambda^*)=0\,. \tag{22}$$

Wir müssen also nur noch $(\boldsymbol{T}\lambda)\,\delta_1$ bestimmen, da

$$(\boldsymbol{\Pi}\lambda)\,\delta_1=0\,.$$

Mit $\eta(x-x_1)$ bezeichnen wir

$$\eta(x-x_1):=\begin{cases}+1 & \text{für} \quad x>x_1\\ -1 & \text{für} \quad x<x_1\,.\end{cases}$$

Da alle δ-Distributionen sich in der Form (18) ausdrücken lassen und alle Sprungfunktionen sich als Summe aus einer stetigen Funktion und einer $\sum_{(n)}\eta(x-x_n)$ darstellen lassen, wobei die x_n im Endlichen keinen Häufungspunkt haben dürfen, genügt es $\eta(x-x_1)\,\delta(x-x_2)$ zu betrachten. Mit

$$2\delta(x-x_2)=\boldsymbol{D}\eta(x-x_2)$$

gilt nach der Produktregel

$$2\eta(x-x_1)\,\delta(x-x_2)=-2\delta(x-x_1)\,\eta(x-x_2)+\boldsymbol{D}\{\eta(x-x_1)\cdot\eta(x-x_2)\}\,. \tag{23}$$

Aus

$$\eta(x-x_k)\,\eta(x-x_n)=\eta(x-x_n)\,\eta(x-x_k)=\eta(x-x_n)-\eta(x-x_k)+1\,, \qquad \text{für} \quad x_n\geqq x_k \tag{24}$$

folgt mit (23)

$$\delta(x-x_2)\,\eta(x-x_1)=\begin{cases}\delta(x-x_2) & \text{für} \quad x_2>x_1\\ -\delta(x-x_2) & \text{für} \quad x_2<x_1\\ -\eta(x-x_2)\,\delta(x-x_2) & \text{für} \quad x_2=x_1\,.\end{cases} \tag{25}$$

Da definitionsgemäß

$$\delta(x-x_2)\,\eta(x-x_1)=W\eta(x-x_1)\,\delta(x-x_2)\,,$$

gilt mit (25)

$$\eta(x-x_1)\,\delta(x-x_2)=\bar{W}\eta(x-x_1)\,\delta(x-x_2)\,.$$

Daraus folgt für alle $\lambda\in\boldsymbol{F},\ \delta_1\in\boldsymbol{\delta}$

$$\lambda\,\delta_1=(\bar{W}\lambda)\,\delta_1\,. \tag{26}$$

Weiterhin erhält man mit (19), (22) und (26)

$$\begin{aligned} W(\lambda_1\ \lambda_2)&=W\lambda_1\cdot W\lambda_2\\ \bar{W}(\lambda_1\ \lambda_2)&=\bar{W}\lambda_1\cdot\bar{W}\lambda_2\,.\end{aligned} \tag{27}$$

Man kann nun prüfen, ob für die durch (19) vorgegebene $\boldsymbol{D}$-Algebra die Gln. (12) und (13) erfüllt sind, ob also die Algebra assoziativ ist.

Es gilt

$$\begin{aligned} \lambda_2(\delta_1\lambda_1)&=\bar{W}\lambda_2\cdot W\lambda_1\,\delta_1\,,\\ (\lambda_2\delta_1)\lambda_1&=\bar{W}\lambda_2\cdot W\lambda_1\,\delta_1\\ \delta_1(\lambda_1\lambda_2)&=(\delta_1\lambda_1)\,\lambda_2\,.\end{aligned}$$

Dies folgt unmittelbar aus (27) und Definition 7.

Die durch (19) definierte $\boldsymbol{D}$-Algebra ist also assoziativ. Damit ist Satz 1 bewiesen. Außerdem ist die Algebra, wie aus (25) ersichtlich, nicht kommutativ. Dies liegt daran, daß es für Sprungfunktionen immer ein x_0 gibt, so daß

$$W\lambda(x = x_0) \neq \overline{W}\lambda(x = x_0).$$

Im nächsten Kapitel werden wir zeigen, daß nur die vorliegende $\boldsymbol{D}$-Algebra assoziativ ist, d. h. daß assoziative $\boldsymbol{D}$-Algebren sich nur in der Zerlegung des Trägers unterscheiden.

Wir wollen noch den allgemeinen Ausdruck für das Produkt zweier fast-beschränkter Distributionen

$$\lambda_1 = \boldsymbol{D}^m \alpha_1, \qquad \lambda_2 = \boldsymbol{D}^n \alpha_2, \qquad \alpha_1, \alpha_2 \in \boldsymbol{\varphi}$$

angeben. Man erhält durch Anwendung der Derivationsregel und mit (22):

$$\begin{aligned}\lambda_1 \lambda_2 = & \sum_{k=1}^{m} \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r \binom{k-1}{r} \boldsymbol{D}^{k-1-r} (\boldsymbol{D}_{II} \boldsymbol{D}_T^{m-k} \alpha_1 \, \boldsymbol{D}_T^{n+r} \alpha_2) \\ & + \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r \binom{k-1}{r} \boldsymbol{D}^{k-1-r} (\boldsymbol{D}_T^{m+r} \alpha_1 \, \boldsymbol{D}_{II} \boldsymbol{D}_T^{n-k} \alpha_2) \\ & + (\boldsymbol{D}_T^m \alpha_1)(\boldsymbol{D}_T^n \alpha_2).\end{aligned}$$

Die Produkte in den Klammern sind mit (19) und (26) vollständig bestimmt.

§ 9. Eindeutigkeit der Algebra

Wir wollen nun zeigen, daß *nur* die durch $\delta_1 \lambda = \delta_1 \cdot W\lambda$ bestimmte $\boldsymbol{D}$-Algebra der fast-beschränkten Distributionen assoziativ ist.

Da für eine assoziative Algebra $\delta(x - x_n) \cdot \eta(x - x_k)$ zum Kern, der durch $(x - x_n)$ vermittelten Abbildung, gehört, da also

$$(x - x_n)\, \delta(x - x_n)\, \eta(x - x_n) = 0,$$

muß gelten

$$\delta(x - x_n)\, \eta(x - x_k) = A\, \delta(x - x_n).$$

Weiterhin ist

$$(\eta(x - x_k))^2 = 1,$$

also ist $A^2 = 1$, oder $A = \pm 1$.

Aus (24) erhält man durch Differentiation

$$\delta(x - x_1)\, \eta(x - x_2) = \begin{cases} \eta(x - x_2)\, \delta(x - x_1) = \delta(x - x_1), & \text{für} \quad x_1 > x_2 \\ \eta(x - x_2)\, \delta(x - x_1) = -\delta(x - x_1), & \text{für} \quad x_1 < x_2 \\ -\delta(x - x_2)\, \eta(x - x_1), & \text{für} \quad x = x_2. \end{cases} \tag{28}$$

Beide Lösungen von A kommen also nur für $\delta(x - x_1)\, \eta(x - x_1) = A\, \delta(x - x_1)$ in Betracht. Sie unterscheiden, ob $x_1 \in \boldsymbol{P}_1$ oder $x_1 \in \boldsymbol{P}_2$.

Wir wollen nun zwei Hilfssätze beweisen, die für eine assoziative Algebra gelten.

Hilfssatz 4. *Wenn für alle* $k \leqq N$

$$\delta^{(k)}(x-x_1)\,\eta(x-x_2)=W\eta(x_1-x_2)\,\delta^{(k)}(x-x_1)$$

und

$$\eta(x-x_2)\,\delta^{(k)}(x-x_1)=\bar{W}\eta(x_1-x_2)\,\delta^{(k)}(x-x_1)\,,$$

so ist

$$\delta^{(k)}(x-x_1)\,\delta^{(r)}(x-x_3)=0 \quad \textit{für alle} \quad k,r\leqq N\,.$$

Beweis. Ist $x_3 \neq x_1$, so bilden wir

$$\delta^{(k)}(x-x_1)\,\eta(x-x_2)\,\delta^{(r)}(x-x_3), \qquad \text{mit} \quad x_1<x_2<x_3 \quad \text{oder mit} \quad x_1>x_2>x_3\,.$$

Für diesen Ausdruck erhält man bei Gültigkeit des assoziativen Gesetzes:

$$\delta^{(k)}(x-x_1)\,\delta^{(r)}(x-x_3)=-\delta^{(k)}(x-x_1)\,\delta^{(r)}(x-x_3)\,.$$

Daraus folgt

$$\delta^{(k)}(x-x_1)\,\delta^{(r)}(x-x_3)=0\,, \quad \text{für} \quad x_1 \neq x_3\,.$$

Ist $x_3=x_1$, so bilden wir

$$\begin{aligned}\delta^{(k)}(x-x_1)\,\eta(x-x_1)\,\delta^{(r)}(x-x_1) &= \bar{W}\eta(x=x_1)\,\delta^{(k)}(x-x_1)\,\delta^{(r)}(x-x_1)\\ &= W\eta(x=x_1)\,\delta^{(k)}(x-x_1)\,\delta^{(r)}(x-x_1)\,.\end{aligned}$$

Da für $x=x_1$, $W\eta \neq \bar{W}\eta$, ist also auch

$$\delta^{(k)}(x-x_1)\,\delta^{(r)}(x-x_1)=0\,.$$

Hilfssatz 5. *Wenn für alle* $k,r \leqq N$

$$\delta^{(k)}(x-x_1)\,\delta^{(r)}(x-x_2)=0$$

und

$$\delta^{(N)}(x-x_1)\,\eta(x-x_2)=W\eta(x_1-x_2)\,\delta^{(N)}(x-x_1) \tag{29a}$$

$$\eta(x-x_2)\,\delta^{(N)}(x-x_1)=\bar{W}\eta(x_1-x_2)\,\delta^{(N)}(x-x_1)\,, \tag{29b}$$

so ist

$$\delta^{(N+1)}(x-x_1)\,\eta(x-x_2)=W\eta(x_1-x_2)\,\delta^{(N+1)}(x-x_1) \tag{30a}$$

$$\eta(x-x_2)\,\delta^{(N+1)}(x-x_1)=\bar{W}\eta(x_1-x_2)\,\delta^{(N+1)}(x-x_1)\,. \tag{30b}$$

Beweis. Durch Differentiation von (29a) erhält man

$$\delta^{(N+1)}(x-x_1)\,\eta(x-x_2)+\delta^{(N)}(x-x_1)\,2\,\delta(x-x_2)=W\eta(x_1-x_2)\,\delta^{N+1}(x-x_1)\,.$$

Da

$$\delta^{(N)}(x-x_1)\,\delta(x-x_2)=0\,,$$

erhält man (30a). Der Beweis für (30b) ist völlig analog.

Da die Voraussetzung von Hilfssatz 4 für $N=0$ erfüllt ist, erhält man durch vollständige Induktion mit Hilfssatz 4 und Hilfssatz 5:

$$\delta^{(k)}(x-x_1)\,\delta^{(r)}(x-x_2)=0 \quad \text{für alle} \quad k,r\,. \tag{31}$$

Mit (31) und (28) erhält man:

$$\delta(x-x_1)\,\lambda=W\lambda(x=x_1)\,\delta(x-x_1)\,. \tag{32}$$

Diese Algebra ist also bis auf die Willkür in der Zerlegung von $\boldsymbol{R}$ die einzige assoziative $\boldsymbol{D}$-Algebra.

Wir haben also somit alle Algebren konstruiert, die den Bedingungen A I, A II und A III genügen. Da keine dieser Algebren, die sich nur in der Zerlegung von $\boldsymbol{R}$ unterscheiden, kommutativ ist, ist auch Satz 2 bewiesen.

Herrn Prof. Dr. D. Laugwitz bin ich für sein förderndes Interesse an dieser Arbeit zu Dank verpflichtet.

Literatur

1. König, H.: Multiplikation von Distributionen I. Math. Ann. **128**, 420—452 (1954).
2. — Multiplikationstheorie der verallgemeinerten Distributionen. Verlag der Bayr. Akad. d. Wissenschaften, Mathemat. Naturwissenschaftl. Klasse, Heft 82 (1957).
3. Schwartz, L.: Théorie des Distributions I und II. Paris: Hermann 1951.
4. — Théorie des Distributions I. Actual. Sci. Industr. 1091 (1950).
5. — Sur l'impossibilité de la multiplication des distributions. C. r. Acad. Sci. Paris **239**, 847 (1954).
6. Sebastião e Silva: Sur une construction axiomatique de la théorie des distributions. Rivista Fac. Ciências Lisboa II. Sér, A, **4**, 79—186 (1955).
7. — Teoria delle Distribuzioni. CIME (1961).

B. Fuchssteiner
Mathematisches Institut der Techn. Hochschule
6100 Darmstadt, Hochschulstr. 1

(Eingegangen am 6. Juni 1967)