„Viererpuzzle" – Eine Lernsequenz für das vierte Schuljahr zu einem Legespiel

Von *Hartmut Spiegel* in Worms

1.

Kern der Reform des Mathematikunterrichtes in der Grundschule sind nicht so sehr die neuen Inhalte als vielmehr neue Ziele und Methoden (vgl. [2], [4], [5]).

Wesentliche Aspekte dieser neuen Ziele werden in [1] so beschrieben:

– Erfahren, daß eigene Urteile unabhängig von fremder Autorität gebildet werden können.

– Die Freude spüren, die aus dem Entdecken von Sachverhalten und Zusammenhängen kommt.

– Mut zum Nachdenken haben, auch wenn kein Lösungsweg in Sicht ist.

Bei der Verwirklichung dieser Ziele spielt das *„Prinzip des aktiven Lernens"* ([5]) eine wichtige Rolle, das durch die Verwendung geeigneter Problemaufgaben und den Einsatz von Material realisiert werden kann. Dies wird auch in dem neuen KMK-Entwurf „Mathematikunterricht in der Grundschule" betont (vgl. [7]).

In einer früheren Arbeit ([3]) wurde gezeigt, inwiefern der Einsatz des Materials „Quadrominosteine" zu den genannten Zielen beitragen kann.

Auch der im folgenden vorgestellte neue Problemkreis zu diesem Material, der in einem 4. Schuljahr im Unterricht erprobt wurde, scheint zur Förderung der oben genannten Ziele sehr geeignet zu sein. Inhaltlich gesehen werden sowohl Lernziele aus der Geometrie als auch der logisch strukturellen Schulung angesprochen.

2.

Quadrominosteine (im folgenden mit „QS" bezeichnet) sind quadratische Pappstücke, die auf einer Seite durch Einzeichnen der beiden Diagonalen in vier Teildreiecke zerlegt sind. Jedes dieser Dreiecke ist mit einer der Farben rot, gelb, blau gefärbt. Alle verschiedenen Plättchen, die man auf diese Weise herstellen kann, bilden die *Menge der QS.*

Die QS sind als *Puzzlespiel* (mit den Farben rot, grün, weiß) im Handel. Die Aufgabe ist, aus allen 24 QS ein 4x6 Rechteck zusammenzulegen, wobei folgende Bedingungen erfüllt sein müssen:

(i) Alle Teildreiecke, die am Rand des Rechtecks liegen, besitzen die gleiche Farbe (Außenregel).

(ii) Benachbarte Teildreiecke verschiedener QS besitzen die gleiche Farbe (Innenregel).

Wer nur eine geringe „Frustrationstoleranz" besitzt, sollte sich an dieser Aufgabe nicht versuchen. (Mehrere Lösungen und interessante mathematische Betrachtungen zu dem Spiel findet man in [6]). Legt man jedoch die gleichen Regeln zugrunde, wählt eine bestimmte Farbe als Randfarbe (z. B. gelb) und beschränkt sich auf ein 2x2 Quadrat (4 QS, daher: „Viererpuzzle"), so können auch Grundschulkinder nicht nur eine, sondern alle möglichen Lösungen auffinden und auch Argumenten folgen, warum es keine weiteren Lösungen mehr gibt – bzw. bei entsprechenden Vorerfahrungen diese Argumente selbst finden.

3.

Im Unterricht sollte man den Kindern das Problem nicht in der beschriebenen Weise stellen (z. B. „Findet alle Figuren, die man nach folgenden Regeln legen kann ...), sondern die Gelegenheit nutzen, die Kinder die Regel entdecken zu lassen ,indem man ihnen sowohl Figuren vorstellt, die der Regel genügen, als auch welche die der Regel nicht genügen (Abb. 1). Man kann dabei noch trennen nach „Innenregel" und „Außenregel" (Durch die Eigenschaften: „erfüllt die Innenregel" und „erfüllt die Außenregel" wird eine Zerlegung der Menge der 2x2 Quadrate in 4 disjunkte Teilmengen induziert, so wie es für strukturiertes Material z. B. für die Eigenschaften „dreieckig" und „rot" bekannt ist.)

Folgende Codierung der Farben wird benutzt: weiß entspricht gelb, punktiert entspricht blau, gestreift entspricht rot.

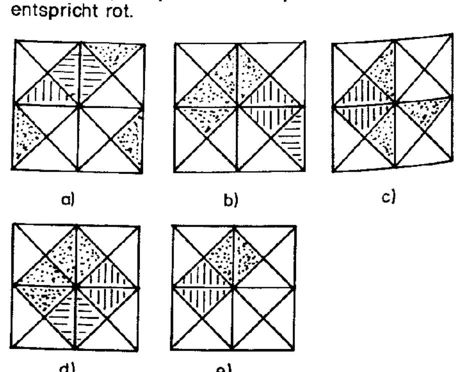


Abb. 1

Wenn man als Grundmengen ohnedies nicht nur die QS verwendet, die für die Lösung der Aufgaben in Frage kommen, ist die nächste Aufgabe klar: Man suche die QS heraus, die zum Legen einer Lösung (bei festgelegter Randfarbe gelb) benutzt werden können. Es sind die sieben auf dem Arbeitsblatt in Abb. 5 dargestellten und mit den Buchstaben A, B, C, D, E, F bezeichneten QS, die die Eigenschaft haben, daß mindestens zwei benachbarte Dreiecke gelb sind.

Auch die Aufforderung, in Worte zu fassen, was diese QS gemeinsam haben, sollte im Unterricht nicht fehlen.

Sind die 7 benötigten QS gefunden, kann man die Kinder auffordern, selbst Figuren nach der Regel zu legen und aufzumalen.

4.

Gezielte Aufgabenstellungen zum Vertrautwerden mit den Regeln sind z. B. „Ergänzungsaufgaben", wobei die reizvollsten die sind, bei denen eine vorgegebene Teilfigur aus 2 QS darauf untersucht werden soll, ob und ggf. auf wie viele Arten sie sich zu einer Lösung ergänzen läßt. Beispiele zeigt die Abb. 2.

Diese Aufgaben erfüllen auch *zwei wichtige Kriterien,* denen möglichst viele Aufgaben im Grundschulmathematikunterricht genügen sollten:

– die Offenheit bezüglich der Anzahl der Lösungen (d. h. es gibt Aufgaben mit keiner, genau einer, mehreren Lösungen),

– die Möglichkeit, die Aufgaben mit unterschiedlich anspruchsvollen Strategien bzw. auf verschiedenen Repräsentationsebenen zu lösen.

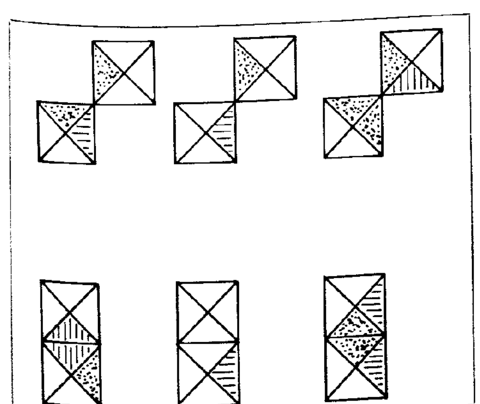


Abb. 2

Löst man die Aufgaben ohne Material, d. h. z. B. durch zeichnerisches Ergänzen, so übersieht man leicht, daß jeder der 7 Steine nur einmal vorhanden ist, und produziert Lösungen, bei denen ein Stein doppelt vorkommt.

Haben die Kinder genügend Erfahrung mit diesen Aufgaben gesammelt, kann man sie auch auffordern, selbst Ergänzungsaufgaben (evtl. mit einer vorgegebenen Zahl von Lösungen) zu erfinden.

5.

Im Hinblick auf die Frage nach der Zahl der Lösungen des „Viererpuzzles" ist die Situation zunächst etwas unübersichtlich.

Da es 35 $\left(=\binom{7}{4}\right)$ verschiedene Möglichkeiten gibt, 4 aus den 7 QS auszuwählen, und vier solche noch auf mindestens sechs verschiedene Arten so zusammengelegt werden können, daß die Außenregel erfüllt ist, scheint die Zahl der Einzelfälle, die man überprüfen muß, bis man sicher ist, ob man alle Lösungen hat, sehr hoch. Dabei ist schon berücksichtigt, daß Figuren, die durch Drehung ineinander übergeführt werden können, nicht unterschieden werden – eine Vereinbarung, die von Kindern selbst vorgeschlagen oder ohne weiteres akzeptiert wird, auch wenn sie im Einzelfall Schwierigkeiten haben, durch bloßes Hinsehen zu entscheiden, ob zwei Lösungsfiguren durch eine Drehung ineinander übergeführt werden. Dieses Problem kann aber in Fällen, die Schwierigkeiten bereiten, durch Benutzen des Materials gelöst werden. Zur Übung dieser Fähigkeit verwendete der Autor Arbeitsblätter wie das in Abb. 3 gezeigte, auf denen die Kinder Figuren, die durch eine Drehung ineinander übergeführt werden können, durch eine Linie miteinander verbanden (Abb. 4).

6.

Nun stellt man aber sehr schnell fest, daß nicht jede Viererteilmenge der 7 QS zu einer Lösung zusammengesetzt werden kann. Eine Möglichkeit, über die Zusammensetzbarkeit einer Vierermenge systematisch zu entscheiden, wäre, zwei Steine auszuwählen und eine Fallunterscheidung zu machen: Sie können ja nur nebeneinander oder gegenüber liegen.

Viertkläßler, denen die Frage gestellt wurde, ob man aus den Steinen C, D, F, G eine Lösung zusammenlegen kann, entdeckten ein anderes *Kriterium:* Sowohl die Gesamtzahl der

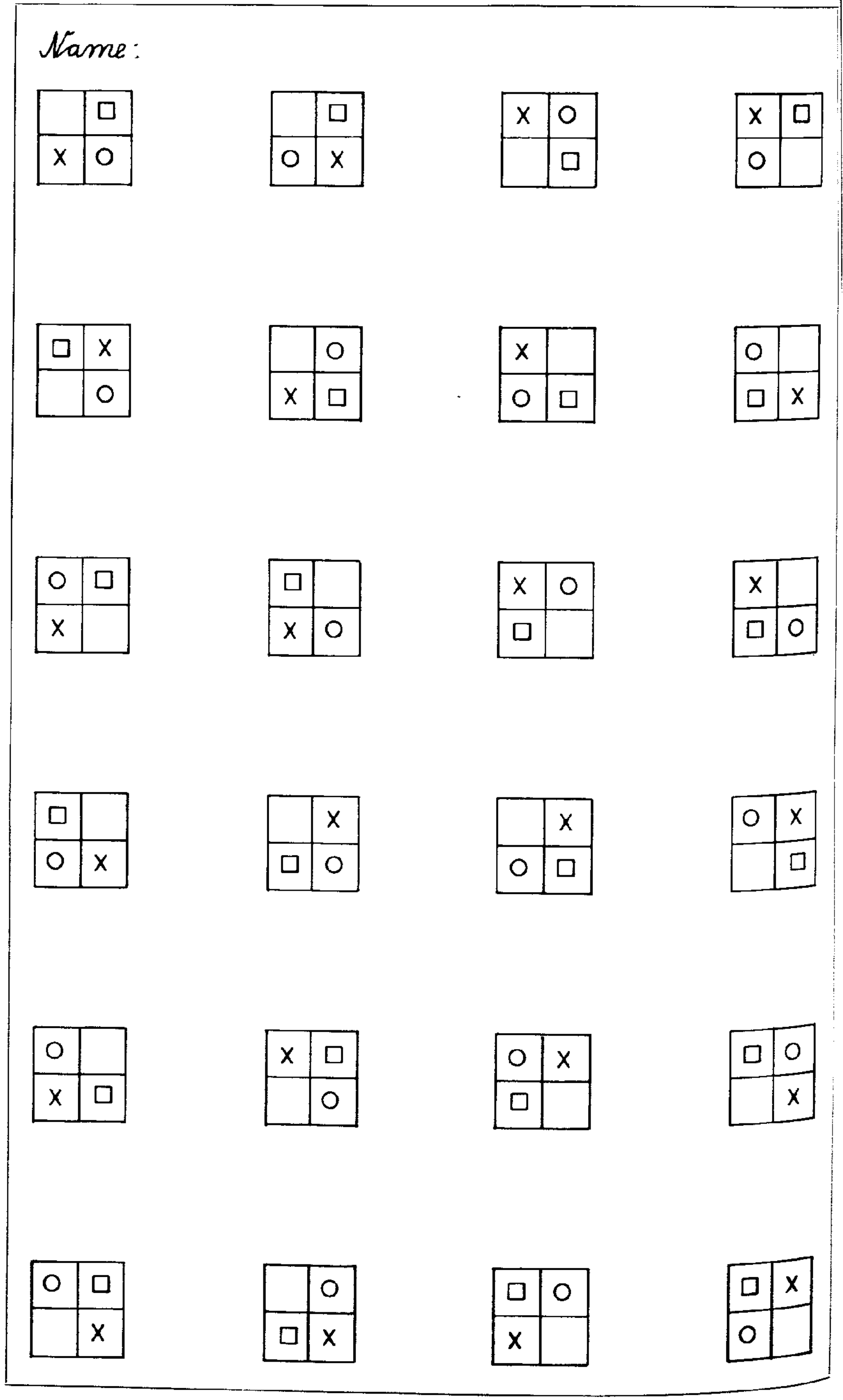


Abb. 3

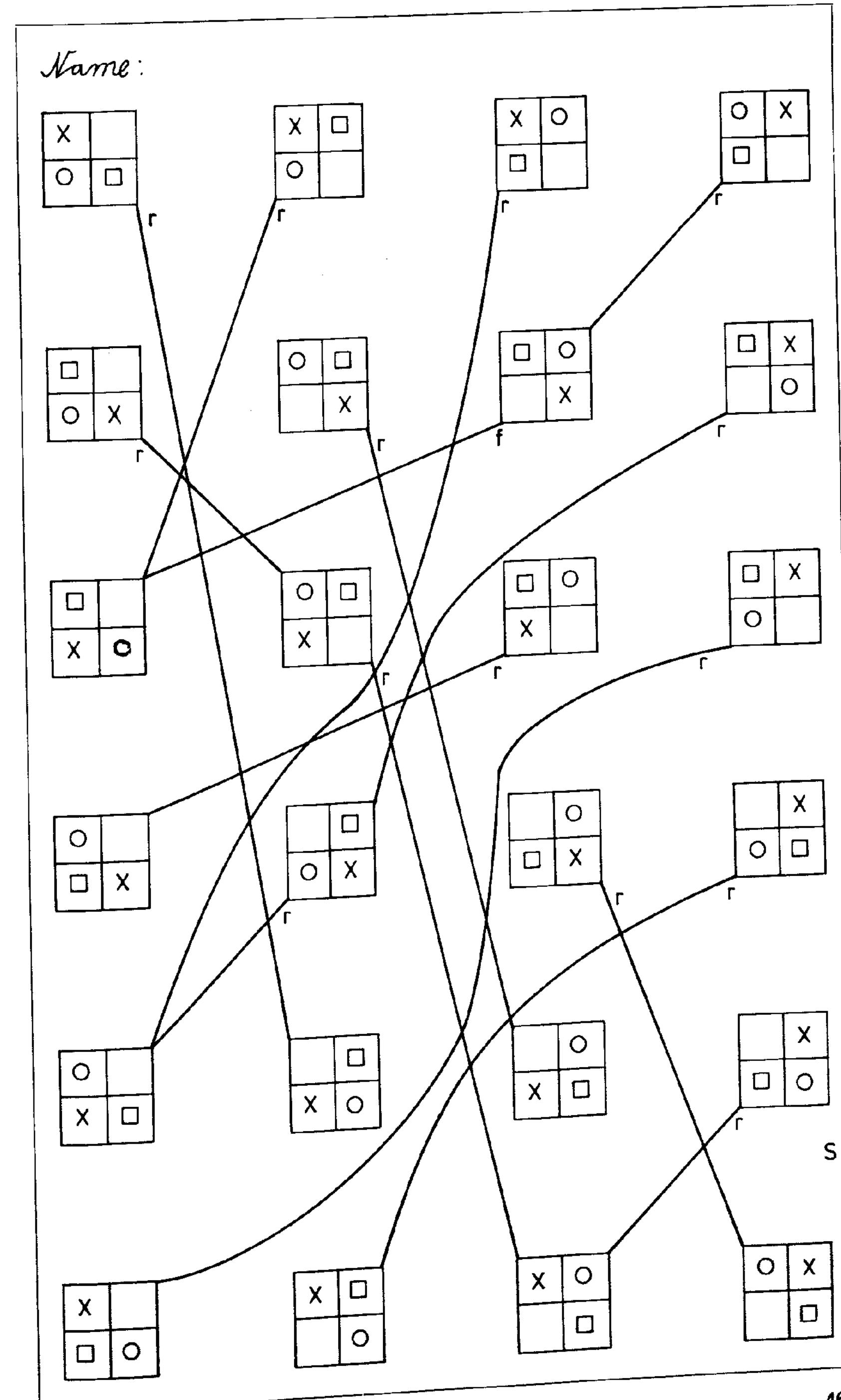
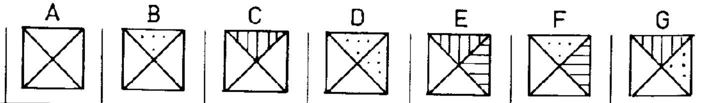


Abb. 4

blauen als auch die der roten Teildreiecke der vier Steine muß gerade sein (immer zwei aneinanderstoßende gehören zusammen). Daher kann man bei den Steinen C, D, F, G ohne langes Probieren sehen, daß sie sich nicht zu einer Lösung zusammensetzen lassen. (Anmerkung: Das genannte Kriterium ist notwendig aber nicht hinreichend, wie das Gegenbeispiel: A, E, F, G zeigt).

Eine Aufgabenstellung, bei der die Kinder dieses Kriterium benutzen und auch weitere entdecken können, die bei einer eventuellen systematischen Zusammenstellung aller verschiedenen Lösungen hilfreich sind, ist die folgende: Eine Menge von zwei bzw. drei gegebenen Steinen ergänze man so zu einer Vierermenge, daß sich eine Lösung daraus legen läßt. Auch hier gibt es Aufgaben mit keiner, genau einer, mehreren Lösungen. Eine Realisierung zeigt das in Abb. 5 dargestellte Arbeitsblatt. (Bei den Antworten der Kinder auf die Frage nach der Begründung für die Unlösbarkeit fiel auf, daß meist Änderungsvorschläge gemacht wurden, die eine Lösbarkeit zur Folge haben. Z. B. Aufgabe 12: „Denn da fehlt ein rotes und das ganz gelbe müßte dann weg".)

In jeder Zeile (1–10) sind zwei Steine angekreuzt. Kreuze zwei weitere Steine so an, daß man aus den vier angekreuzten ein Quadrat nach der Regel legen kann.



	A	B	C	D	E	F	G
1		X		X			
2						X	X
3	X		X				
4				X	X		
5	X			X			
6			X			X	
7		X	X				
8					X		X
9	X					X	
10	X				X		
11		X	X		X	X	
12	X	X			X	X	
13				X	X	X	X
14		X	X	X			X
15			X	X		X	X

In Zeile 11–15 sind jeweils 4 Steine angekreuzt. Überlege jedesmal, ob man aus diesen vier Steinen ein Quadrat nach der Regel legen kann. Wenn es geht, schreibe ganz rechts „Ja" hin. Wenn es nicht geht, schreibe „Nein" hin und auf der Rückseite des Blattes eine Begründung.

Abb. 5: Arbeitsblatt

Eine starke Motivation übte das zu dieser Aufgabenstellung konstruierte Spiel aus: Auf dem Protokollblatt (so wie das Arbeitsblatt in Abb. 5 jedoch ohne Text und Ankreuzungen) kreuzt ein Kind drei Steine an. Das zweite muß dann versuchen, einen weiteren Stein so zu wählen, daß es aus den vier Steinen eine Lösung zusammenlegen kann. Gelingt ihm das, gewinnt es einen Punkt, andernfalls der Ankreuzer (das erste Kind). Dann werden die Rollen vertauscht etc. Im Laufe dieses Spiels entdeckten die Kinder auch Teile der unten aufgeführten Zusammenhänge.

7.

Das oben angeführte „Geradzahligkeitskriterium" ist nicht so gut geeignet, mit möglichst wenig Aufwand eine Übersicht über alle möglichen Lösungen zu erhalten, da man immer noch alle 35 Viererteilmengen darauf untersuchen müßte. Hilfreicher sind folgende Beziehungen, die von den Kindern während des Umganges mit den Aufgabenstellungen entdeckt werden können:

- Gehört A zu einer Lösung, müssen auch B und C dazugehören.
- B und C können nur gemeinsam in einer Lösung auftreten (also nicht nur B oder nur C)
- Wenn D oder E dabei ist, kann A nicht dabei sein
- Sind D und E dabei, so müssen auch F und G dabei sein und umgekehrt.

Aufgrund dieser Bedingungen sind die Vierermengen, aus denen man eine Lösung legen kann, schnell bestimmt (und aus jeder kann man nur eine Lösung legen): {A, B, C, F}, {A, B, C, G}; {B, C, D, F}; {B, C, D, G}; {B, C, E, F}; {B, C, E, G}; {D, E, F, G}.

Ist die Menge aller Lösungen des Viererpuzzles erarbeitet, bieten sich auch Betrachtungen von Beziehungen der Lösungen untereinander an: Spiegelungen, Farbvertauschungen.

8.

Abschließend soll folgendes noch einmal festgehalten werden: Der didaktische Wert dieses und ähnlich strukturierter Problemkreise liegt m. E. darin, daß Kinder (und übrigens auch Studenten) bei der Bearbeitung dieser – wie sich aus Erfahrung gezeigt hat – äußerst motivierenden Fragestellung, die Möglichkeit haben, *Mathematik als Tätigkeit, als Prozeß zu erleben und nicht als Fertigprodukt.*

Von den vorhin erwähnten Lernzielen werden hauptsächlich die Argumentationsfähigkeit und die Kreativität (und dabei insbesondere die Offenheit gegenüber Problemen, für die keine Standardlösungsmethoden zur Hand sind), angesprochen. Ich meine auch, daß es im Zusammenhang mit der vielfach genannten logischen Schulung, die ja unter die Argumentationsfähigkeit subsumiert werden kann, für die Kinder interessanter ist, Zusammenhänge der o. g. Art zu entdecken und für Schlußfolgerungen auszunutzen, als dazu angehalten zu werden, zu konstatieren, daß ein Klotz, wenn er klein und rund ist, auch rund ist.

Außerdem zeigt sich, daß der o. g. Problemkreis im Hinblick auf Differenzierung und Individualisierung im Unterricht viele Aufgabenstellungen ermöglicht, die offen sind in dem Sinne, daß

1. mehrere, eine oder keine Lösung existieren,
2. verschieden anspruchsvolle Lösungswege existieren, und die zur Erfindung ähnlicher oder eigener anderer Aufgaben anregen.

Literatur

[1] *Görner, A.* u. *Röhrl, E.* (Hrsg.): Mathematikunterricht auf der Primarstufe. Fernbriefe zur Weiterbildung der Grundschullehrer 1/2, Stuttgart 1971
[2] *Kirsch, A.:* Über die Ziele der „neuen Mathematik" in der Schule. In: Westermanns Pädagogische Beiträge (26) 1974, Heft 3, S. 155–164
[3] *Spiegel, H.:* Quadromino im Mathematikunterricht I. In: Didaktik der Mathematik, (2) 1974, Heft 2, S. 139–148
[4] *Winter, H.:* Über den Nutzen der Mengenlehre für den Mathematikunterricht in der Grundschule. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1972, Teil 2, Hannover 1973, S. 161–192
[5] *Wittmann, E.:* Grundfragen des Mathematikunterricht. Braunschweig 1976[4]
[6] *Ziegenbalg, J.:* Das Quadromino-Spiel als Beispiel für lokales Ordnen. Didaktik der Mathematik (2) 1974, Heft 3, S. 222–242
[7] Mathematikunterricht in der Grundschule. – KMK Entwurf. In: Die Grundschule (8) 1976, Heft 8, S. 446–449