Forschungsbericht

Gesamthochschule Paderborn

Paderborn, 1.1976 - 2.1977/78(1979)

C. 17 Fachbereich 17 (Mathematik - Informatik)

urn:nbn:de:hbz:466:1-31285

Prof. Dr. A. Pfützenreuter, FHL

„Zunahme der Permeabilität bei der Kaltumformung eines antiferromagnetischen Werkstoffes"

Dauer: 1974

Kurztext:

Für den Einsatz als Bandagendrähte in der elektrotechnischen Industrie und als Seildrähte für besondere Anwendungen im Verteidigungsbereich kommen austenitische Stahldrähte zum Einsatz. Nach neueren Vorstellungen ist auf Grund von Strukturuntersuchungen mit Neutronen die geringe Permeabilität dieser Stähle auf eine antiferromagnetische Spinanordnung im Austenitkristallgitter zurückzuführen. Bei zunehmender Kaltumformung nimmt je nach Zusammensetzung der Stähle mit der damit verbundenen Austenitstabilität die Permeabilität zu und erreicht Werte, die das Material für die oben angeführten Einsatzgebiete unbrauchbar machen. In der vorliegenden Arbeit wurden Stähle — neben drei Probegruppen aus Spezialstählen —, Proben aus einer Ziehfolge des Werkstoffes 1.43000 8 Cr Ni 188 (V2A-N) untersucht. Das Ausgangsmaterial dieser Ziehfolge lag im lösungsgeglühten, abgeschreckten Zustand vor und wies eine Permeabilität von 1.0035 auf. Bereits nach zwei Zügen mit einer Gesamtumformung von 35 % ist diese auf 1.0622 angewachsen. Nach 5 Zügen mit einer Gesamtumformung von 63,5 % erreicht sie einen Wert von 1,294. Die Permeabilitätsmessungen wurden mit einer, im Rahmen der Untersuchungen selbst gebauten, magnetischen Waage nach Gouy durchgeführt.

Es ist beabsichtigt, die Untersuchungen auf weitere austenitische Stahlqualitäten auszudehnen und durch röntgenographische Feinstrukturuntersuchungen zu ergänzen.

C. 17 Fachbereich 17

Mathematik – Informatik

Statistische Zusammenfassung

Im Fachbereich sind 7 o. Professoren, 2. Wiss. Räte und Professoren und 11 Fachhochschullehrer tätig. Zwei Stellen für ordentliche Professoren, 4 Stellen für Fachhochschullehrer und eine Stelle eines Studienprofessors sind noch zu besetzen. Hinzu kommen wiss. Mitarbeiter.

C. 17.1 Situation und Entwicklung des Fachbereichs

Dem Fachbereich obliegt die Ausbildung von Studenten im integrierten Studiengang Mathematik, sowie die fachwissenschaftliche und fachdidaktische Ausbildung der Studenten in den Studiengängen Lehramt Primarstufe, Sekundarstufe I und II im Fach Mathematik. Dazu treten der Lehramtsstudiengang Sek. II berufliche Fachrichtung Informatik und der Fachhochschulstudiengang Informatik. Weiterhin obliegt dem Fachbereich die mathematische Ausbildung der Studenten in den integrierten Studiengängen Physik, Chemie, Elektrotechnik und Maschinenbau.

Im Bereich der Forschung werden besonders die Disziplinen Algebra, Analysis, Angewandte Mathematik, Didaktik der Mathematik und Anwendungen der Informatik gepflegt. Die folgenden Stichworte sollen einen groben Überblick über dabei behandelte Teilgebiete geben; im übrigen wird auf die Bibliographie verwiesen.

a) Algebra:
(kommutative und nichtkommutative) Ringtheorie unter besonderer Berücksichtigung homologischer und bewertungstheoretischer Methoden; algebraische Funktionenkörper höheren Transzendenzgrades; additive und multiplikative Zahlentheorie.

b) Analysis:
Funktionenräume mit Gewichtsbedingungen, Approximationseigenschaften in Funktionenräumen, Fortsetzungssätze für dominierte additive Abbildungen, Integraldarstellungen linearer Abbildungen, nichtlokalkonvexe Vektorräume, Theorie äquivalenter Potenzreihen.

c) Angewandte Mathematik
Partielle Differentialgleichungen aus dem Gebiet der mathematischen Physik (Navier-Stokes-Gleichung, Vlasov-Boltzmann-Gleichung), nichtlineare Diffusionsprobleme und zwar jeweils qualitative Untersuchung und numerische Lösung, Stochastische Differentialgleichungen in Banachräumen, nichtlineare Fixpunktsätze.

d) Didaktik der Mathematik:
Untersuchung des Problemlöseverhaltens bzw. des Aufbaus von Problemlösestrategien.

e) Anwendungen der Informatik
Wahrscheinlichkeitstheoretische Verfahren bei der Strukturplanung elektronischer Rechenanlagen.

Der größte Teil der Forschungsvorhaben in diesen Disziplinen wird im Rahmen des Forschungsschwerpunktes „Analyse von Modellsystemen . . ." behandelt; darauf wird im folgenden hingewiesen.

Gerade im Bereich Mathematik und Informatik ist Kommunikation mit anderen Wissenschaftlern unumgänglich notwendig. Im Rahmen des regelmäßig stattfindenden Mathematischen Kolloquiums gelang es uns, bekannte Mathematiker des In- und Auslandes für Vorträge zu gewinnen.

Zwei größere Veranstaltungen führten im Jahre 1975 eine Reihe von Mathematikern nach Paderborn. An einer Arbeitstagung über „Primitive Ideale in Einhüllenden halbeinfacher Lie-Algebren" nahmen etwa 20 Wissenschaftler anderer deutscher Hochschulen teil. In der Zeit vom 15. 9.– 15. 10. 1975 fand ein Ferienkurs in Angewandter Mathematik statt; in den Vorlesungen, die u. a. von Herrn Neuenzert im Rahmen einer Gastprofessur gegeben wurde, wurden „Nichtlineare Probleme der Plasmaphysik und Hydromechanik" behandelt. Zur Diskussion standen mathematische Modelle für scheinbar weitauseinander liegende Bereiche der Physik, die auch systematisch vom Standpunkt ihrer praktischen Lösung auf elektronischen Rechenanlagen betrachtet wurden.

Eine institutionalisierte Zusammenarbeit mit Wissenschaftlern anderer Hochschulen besteht nicht; dieses scheint im Bereich der Mathematik auch nicht notwendig zu sein. Daß von Fall zu Fall je nach dem anstehenden Problem mit auswärtigen Wissenschaftlern zusammengearbeitet wird, ist selbstverständlich und wird durch die Bibliographie nachgewiesen. Es sei auch darauf hingewiesen, daß bei der Durchführung der numerischen Behandlung der partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik eine enge Kooperation mit dem Rechenzentrum der Kernforschungsanlage in Jülich besteht.

Im Fachbereich wurden bisher zwei Promotionsverfahren erfolgreich abgeschlossen:

W. Lusky: Zur Struktur von Lindenstraußräumen

C. F. Nelius: Ringe mit eindeutiger Addition.

C. 17.2 Einzelprojekte

Prof. Dr. B. Bierstedt

„Holomorphe Funktionen in unendlichdimensionalen Räumen"

Bei diesem Projekt handelt es sich um die Betrachtung von holomorphen Funktionen und Keimen holomorpher Funktionen in unendlichdimensionalen Räumen, insbesondere komplexen (FS)- und nuklearen Fréchet-Räumen. (Dieses Projekt wird wieder in Zusammenarbeit mit Herrn Meise durchgeführt). Eine erste Ankündigung der bereits erzielten Ergebnisse erscheint bald in den C. R. Acad. Sci. Paris, während vor einigen Wochen eine ausführliche Publikation in „preprint"-Form hergestellt wurde. Ausgehend von diesen Ergebnissen, die neue Gesichtspunkte zur Theorie holomorpher Funktionen in lokalkonvexen Räumen liefern, sollen weitere Untersuchungen erfolgen. Es stellt sich u. a. auch die Frage, ob man die Resultate auf differenzierbare Funktionen in reellen topologischen Vektorräumen übertragen kann. Die Forschung in diesem Bereich dauert an.

Prof. Dr. B. Fuchssteiner (Projektleiter)

Teilprojekt „Analysis" im Forschungsschwerpunkt:

„Analyse von Modellsystemen in Naturwissenschaft, Technik, Ökonomie und Pädagogik mit Hilfe mathematischer Strukturen unter besonderer Berücksichtigung ihrer Behandlung durch informationsverarbeitende Systeme" (im weiteren: „Modellsysteme")

Einführung:

Als Bindeglied zwischen den Anwendungen und der abstrakten Grundlagenforschung nimmt die Analysis in der heutigen Mathematik eine besonders wichtige Stellung ein. In diesem Gebiet werden Grundlagen und Methoden entwickelt, auf denen die Verfahren der anwendungsorientierten numerischen Mathematik, der Informatik, sowie der mathematischen Physik beruhen.

In weitem Bogen überspannt die Analysis heute viele Teilgebiete der Mathematik, mannigfache Forschungsaktivitäten lassen sich unter diesem gemeinsamen Begriff einordnen.

Innerhalb der Analysis haben sich in den letzten Jahren die Funktionentheorie und die Funktionalanalysis als Teilgebiete besonderer Bedeutung herausgeschält. Diese Bedeutung wird belegt dadurch, daß die klassischen Grundlagen beider Disziplinen dem Studenten heute bereits im Grundstudium vermittelt werden.

Die Funktionalanalysis hat ihren Ausgang genommen von der von Hilbert und seinen Mitarbeitern entwickelten Theorie der linearen Integralgleichungen. Streckenweise entwickelte sie sich in engem Kontakt mit der Physik, daraus erklärt sich, daß die Funktionalanalysis heute für viele Anwendungen unentbehrlich geworden ist. Eine Vielzahl von mathematischen Theorien und Methoden wird heute durch sie in einen übergreifenden Zusammenhang eingeordnet. In der Funktionentheorie hat eine Entwicklung zu abstrakter Arbeitsweise hin stattgefunden, algebraische Begriffsbildungen spielen eine immer größere Rolle. Besondere Aktivitäten sind heute bei der Erforschung von Funktionen mehrerer Variablen zu beobachten. Die beiden Gebiete ergänzen sich in glücklicher Weise.

Das Teilprojekt Analysis ist in enger Weise mit den benachbarten Bereichen der numerischen und angewandten Mathematik und der Algebra verzahnt. Schon vorhandene gemeinsame Forschungsaktivitäten mit anderen Disziplinen sollen in Zukunft noch stärker ausgebaut werden.

Im Rahmen des Teilprojektes wurden bzw. werden die folgenden Einzelprojekte bearbeitet:

1. Räume stetiger, differenzierbarer oder holomorpher Funktionen mit Gewichtsbedingungen,
2. lokalkonvexe Garben von Funktionen, Distributionen und Produktgarben,
3. topologische Tensorprodukte und Approximationseigenschaft,
4. Integraldarstellung von linearen Abbildungen,
5. Fortsetzung additiver Abbildungen,
6. Partialwellenanalyse bei Evolutionsgleichungen,
7. Existenz von Mittelwerten multiplikativer zahlentheoretischer Funktionen,
8. Werteverteilungsfragen in der additiven Zahlentheorie,
9. Theorie äquivalenter Potenzreihen.

Diese Einzelprojekte werden nachfolgend näher beschrieben.

1. **Räume stetiger, differenzierbarer oder holomorpher Funktionen mit Gewichtsbedingungen**

L. Nachbin hat in Zusammenhang mit Verallgemeinerungen des Bernsteinschen Approximationsproblems gewichtete Räume stetiger Funktionen eingeführt. Diese Räume bilden den geeigneten allgemeinen Rahmen, um ein besseres Verständnis spezieller Resultate zu ermöglichen und, darauf aufbauend, neue Methoden zu entwickeln.

Tensorproduktdarstellungen gewichteter Räume vektorwertiger Funktionen erlaubten es, vektorwertige Probleme oft auf skalare oder mehrdimensionale Probleme in gewisser Weise somit auf eindimensionale zu reduzieren. Bei analogen Untersuchungen für differenzierbare Funktionen blieb eine Reihe von Problemen offen, die in der Zukunft weitgehend geklärt werden sollen. Ähnlich ergab sich bei der Untersuchung induktiver Limites gewichteter Räume stetiger und holomorpher Funktionen eine Reihe interessanter Fragen und Probleme, die in Spezialfällen bereits vollständig gelöst werden konnten. Gewichtete Verallgemeinerungen des Riesz'schen Darstellungssatzes erlaubten eine Erweiterung eines vektorwertigen gewichteten Approximationssatzes vom Stone-Weierstrass Typ. Dies führte zu einer Lokalisierung der Approximationseigenschaft für Teilräume gewichteter Räume stetiger Funktionen. Offen bleibt, ob eine solche Lokalisierung auch bei differenzierbaren Funktionen möglich ist.

Die bewiesenen Resultate lassen sich bereits auf die Theorie der Distributionsrandverteilungen holomorpher Funktionen sowie bei der Fouriertransformation von Distributionen anwenden.

Das beschriebene Einzelprojekt wurde von Prof. Bierstedt und Dr. Kleinstück in Zusammenarbeit mit auswärtigen Mathematikern bearbeitet.

2. Lokalkonvexe Garben von Funktionen, Distributionen und Produktgarben

Hierbei handelt es sich um eine Zusammenarbeit der Professoren Bierstedt, Gramsch (Kaiserslautern) und Meise (Düsseldorf). Angeregt wurden die Untersuchungen durch Arbeiten von Gramsch über gemischte Parameterabhängigkeit von Semi-Fredholmoperatoren. Die hauptsächlichen Anwendungen liegen auf dem Gebiet der Operatorentheorie, der Distributionen und der partiellen Differentialgleichungen.

Bei den bisherigen Untersuchungen standen als Hilfsmittel gewisse Dichtheitsaussagen im Mittelpunkt. Dadurch ist ein enger Zusammenhang mit der Frage nach der Approximationseigenschaft der entsprechenden Räume gegeben. Für Produktgarben, deren einer Faktor die Garbe der stetigen Funktionen ist, ergab sich eine Lokalisierung der Approximationseigenschaft, die sofort die gewünschten Dichtesätze zur Folge hat. In allgemeineren Fällen war zwar keine solche Lokalisierung möglich, doch konnten lokale Ergebnisse über Tensorprodukte auf Produktmengen benutzt werden, um sie unter Verwendung geeigneter Zerlegungen der Eins „zusammenzukleben".

Die Dichtheitsaussagen wurden dann mit ähnlichen Methoden und Mittag-Leffler-Schlüssen dazu benutzt, Liftings von Vektorfunktionen bzw. Vektordistributionen zu bekommen. Dadurch gelang in schärferer Weise als bisher ein Tensorieren exakter Sequenzen. Hieraus folgt dann das Verschwinden gewisser Kohomologiegruppen über regulären offenen bzw. kompakten Mengen in einem Produkt.

3. Topologische Tensorprodukte und Approximationseigenschaft

Die Theorie topologischer Tensorprodukte ist ein wichtiges Hilfsmittel in vielen Bereichen der Funktionalanalysis, z. B. bei der Behandlung vektorwertiger Funktionen und Distributionen. Hierbei werden konkrete Approximationsfragen in eine abstrakte Form gebracht und mit scharfen Methoden der Theorie topologischer Vektorräume gelöst.

In diesem Projekt ging es darum, einen allgemeinen Überblick über die Theorie topologischer Tensorprodukte (hier insbesondere das injektive Tensorprodukt) sowie über positive Ergebnisse zur Approximationseigenschaft zu bekommen, um ein Lehrbuch über dieses Gebiet zu verfassen, das neueren Entwicklungen Rechnung trägt und die bisherige Theorie weiter abrundet und systematisiert. Die Vorarbeiten für ein solches Lehrbuch der Professoren Bierstedt und Meise (Düsseldorf) sind bereits weit gediehen. Außerdem gelang es in der bisherigen Forschung, Ergebnisse zur Vererbung der Approximationseigenschaft zu erhalten und einen überraschenden Satz zur Lokalisierung der Approximationseigenschaft bei Funktionenräumen aus einer Verallgemeinerung des Satzes von Stone-Weierstrass und topologischen Tensorproduktmethoden komplizierter Art herzuleiten.

4. Integraldarstellung von linearen Abbildungen

Es wurde das Problem untersucht, welche linearen Abbildungen auf einem Funktionenkegel sich als Integrale darstellen lassen. Dieses Problem ist deshalb wichtig, weil man diejenigen linearen Abbildungen charakterisieren will, die sich auf vollständige Vektorverbände so fortsetzen lassen, daß die Fortsetzung die Konvergenzeigenschaft hat, welche man üblicherweise von Integralen erwartet.

Die für den Fall reellwertiger Abbildungen bekannten klassischen Sätze von Riesz und Choquet wurden in eine übergreifende Theorie eingeordnet. Die Zusammenhänge zwischen Integraldarstellungen und der Strukturtheorie kompakter konvexer Mengen wurden untersucht.

Es wurden Kriterien erarbeitet, welche Integraldarstellungen für alle positiven linearen Abbildungen garantieren. Ein viel komplizierteres Problem ist jedoch die Charakterisierung derjenigen linearen Abbildungen, die Integraldarstellungen zulassen, auch wenn die globalen Kriterien versagen. Bei der Lösung dieses Problems wurden erste Ergebnisse erzielt.

Diese Untersuchungen wurden von Prof. Fuchssteiner zum Teil in Zusammenarbeit mit Mathematikern ausländischer Universitäten durchgeführt.

5. Fortsetzungen additiver Abbildungen

Es wurden allgemeine Fortsetzungsmethoden für subadditiv dominierte additive Abbildungen auf Halbgruppen gefunden. Diese Fortsetzungssätze beschränken sich nicht nur auf den skalarwertigen Fall, sondern gelten auch für bestimmte Vektorverbände, ja sogar für einige Verbandshalbgruppen.

Die Fortsetzungssätze beinhalten einerseits Sätze vom Hahn-Banach-Typ, andererseits Extremalaussagen vom Krein-Milman-Typ. Erste Ansätze für eine übergreifende Theorie, in die auch die bekannten Ergebnisse über die Fortsetzung kompakter Operatoren eingeordnet werden können, konnten erarbeitet werden.

Besonders wichtig erscheint der Fall additiver Abbildungen mit Werten in Verbandshalbgruppen, da er ein neues Feld für Anwendungen eröffnen würde. Trotz erster Ergebnisse sind für diesen Fall jedoch noch viele Probleme offen.

Das Projekt wurde von Prof. Fuchssteiner bearbeitet.

6. Partialwellenanalyse bei Evolutionsgleichungen

Schwingungsprobleme in anisotropen Medien führen häufig zu nichtlinearen Evolutionsgleichungen, deren Lösungen für große Zeit in Einzelwellen mit bestimmten charakteristischen Geschwindigkeiten zerfallen. Diese Einzelwellen werden Solitone genannt.

Da ähnliche Phänomene auch bei nichtlinearen Differentialgleichungen, die bei den Modellen der axiomatischen Quantenfeldtheorie eine Rolle spielen, vorkommen, fand die Solitonenforschung in der letzten Zeit eine große Aufmerksamkeit.

Für den Fall verschiedener wechselwirkender Solitone konnte die zugrundeliegende nichtlineare partielle Differentialgleichung auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückgeführt werden.

Ein solches System läßt sich natürlich sehr viel einfacher behandeln als die entsprechende nichtlineare partielle Differentialgleichung. Dies berechtigt zur Hoffnung, daß sich in Zukunft einige Solitonwechselwirkungsphänomene leichter erklären lassen. Erste Ergebnisse in dieser Richtung wurden bereits erzielt. Die beschriebene Zurückführung nichtlinearer partieller Differentialgleichungen auf Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen wurde für die Korteweg-de-Vries und für die Sine-Gordon-Gleichung behandelt.

Das Projekt wurde von Prof. Fuchssteiner bearbeitet.

7. Existenz von Mittelwerten multiplikativer zahlentheoretischer Funktionen

Frühere Untersuchungen über Existenz von Mittelwerten multiplikativer zahlentheoretischer Funktionen werden fortgeführt. Es zeigte sich dabei, daß für gewisse multiplikative Funktionen, deren Betrag höchstens 1 ist und für eine Klasse von Folgen natürlicher Zahlen der Mittelwert von f auf dieser Folge existiert und von Null verschieden ist. Im speziellen Fall der Folge $[\alpha n]$, α irrational, wurde eine Vermutung von P. Erdös bestätigt. Die behandelten Folgen sind deswegen von besonderem Interesse, weil sich die bislang benutzten Methoden dabei nicht anwenden ließen. Dieses Projekt wurde von Prof. Indlekofer bearbeitet.

8. Werteverteilungsfragen in der additiven Zahlentheorie

Bei der Untersuchung von Werteverteilungsfragen der additiven Zahlentheorie gelang es – wiederum für Klassen von Folgen natürlicher Zahlen, notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz einer Grenzverteilung anzugeben, wenn f eine additive zahlentheoretische Funktion bezeichnet. Als Anwendung ergaben sich Aussagen über eine Charakterisierung von Eindeutigkeitsmengen für additive Funktionen.

Das Projekt wurde von Prof. Indlekofer bearbeitet.

9. Theorie äquivalenter Potenzreihen

Im Bereich der Funktionentheorie wurde die Theorie äquivalenter Potenzreihen weiterverfolgt. Dabei wurden u. a. Untersuchungen und Vermutungen von G. Halasz über die konforme Invarianz der absoluten Konvergenz vervollständigt bzw. abschließend beantwortet. Darüber hinaus wurde gezeigt, daß diese Ergebnisse die Automorphismen gewisser Algebren holomorpher Funktionen über dem Einheitskreis vollständig charakterisieren. Dadurch wurden u. a. Untersuchungen von J. P. Kahane erheblich erweitert und verschärft.

Zur Vervollständigung der Untersuchungen über äquivalente Potenzreihen sollen in Zukunft Funktionen behandelt werden, die über den Rand des Einheitskreises hinaus fortsetzbar sind. (Alle bisher in diesem Zusammenhang gefundenen Funktionen hatten die Einheitskreislinie als Begrenzung ihres Holomorphiegebietes). Die Ergebnisse hätten dann zahlreiche Anwendungsmöglichkeiten bei Aussagen über die Äquivalenz von Summierungsverfahren.

Das Projekt wird von Prof. Indlekofer bearbeitet.

Zur Förderung des Teilprojektes „Analysis" wird Ende November in Paderborn eine dreitägige Tagung stattfinden, an der etwa 20 Wissenschaftler aus Europa und Übersee über ihre neuesten Ergebnisse berichten werden.

Dr. L. Hefendehl

„Vierdimensionale quadratische Divisionsalgebren über lokal kompakten, unzusammenhängenden Körpern"

Dauer: 1973–1975

K u r z t e x t :

Wie J. M. Osborn 1966 gezeigt hat, ist allgemein eine quadratische Divisionsalgebra bestimmt durch einen linearen Unterraum der Codimension 1, der die Struktur einer antikommutativen Algebra ohne zweidimensionale Unteralgebren, einer sogenannten Q-Algebra, trägt und auf dem zusätzlich eine Bilinearform b definiert ist mit der Eigenschaft, daß die Summenform (1) + (–b) eine anisotrope quadratische Form induziert. Da über einem lokalen Körper jede quadratische Form in mehr als vier Variablen isotrop ist, hat folglich jede endlichdimensionale quadratische Divisionsalgebra über einem lokalen Körper die Dimension 2 oder 4.

Ferner ist bekannt, daß zwei quadratische Divisionsalgebren isomorph sind, wenn zwischen ihren Q-Algebren ein Algebra-Isomorphismus besteht, der zugleich eine Isometrie der zugehörigen Bilinearform ist.

Demnach ist für eine Klassifizierung der vierdimensionalen quadratischen Divisionsalgebren über einem lokalen Körper F folgender Weg möglich:

1. Klassifizierung der dreidimensionalen Q-Algebren über F
2. Bestimmung der zulässigen ternären Bilinearformen über F
3. Bestimmung der Automorphismengruppe einer dreidimensionalen Q-Algebra
4. Klassifizierung der zulässigen Bilinearformen nach Isometrie bezüglich der Automorphismengruppe einer gegebenen Q-Algebra.

Die Problemstellungen in 1. und 3. lassen sich ebenfalls auf Probleme aus der Theorie der quadratischen Formen reduzieren.

Die Untersuchung verbindet darum Methoden und Hilfsmittel aus der Theorie der quadratischen Formen mit den Hilfsmitteln aus der algebraischen Zahlentheorie, die sich auf die Struktur der lokalen Körper beziehen.

Zu den aufgeführten vier Punkten wurden folgende Ergebnisse erzielt:

1. Die dreidimensionalen Q-Algebren sind bis auf Isomorphie durch eine einzige Invariante aus dem Grundkörper bestimmt. In Abhängigkeit von diesen Invarianten werden charakteristische Multiplikationskonstanten explizit bestimmt.
2. Die Bilinearformen werden anhand von Matrixdarstellungen explizit angegeben.
3. Es wird gezeigt, daß die Automorphismengruppe einer Q-Algebra antiisomorph zur Drehgruppe einer quadratischen Form ist.
4. Jede Isometrieklasse besitzt mindestens zwei charakteristische Invarianten. Eine Ermittlung der genauen Zahl der Invarianten steht noch aus.

Prof. Dr. C. Kuck, FHL

Teilprojekt: „Rechenanlagen"

im Forschungsschwerpunkt: „Modellsysteme"

Kurztext:

Es geht hier um die Anwendung wahrscheinlichkeitstheoretischer Verfahren bei der Strukturplanung für die Hard- und Software elektronischer Rechenanlagen.

Die theoretischen Grundlagen des Projektes sind erarbeitet worden. In der Warteschlangentheorie haben die Bediener bekanntlich zwei Zustände: besetzt und frei. Wir haben die Bediener durch deterministische Automaten ersetzt, die sequentiell Programme verarbeiten, deren Eigenschaften statistisch bestimmt sind. Es arbeiten n Automaten, jeder mit einer eigenen

Warteschlange versehen, quasiparallel. Die n Automaten sind dabei durch gemeinsame Benutzung von Betriebsmitteln, deren Quantität beschränkt ist, gekoppelt. Durch die Kopplung behindern sich die Automaten gegenseitig. Ferner kann ein Automat in einem anderen durch Steuerkommandos Übergänge erzwingen. Der Eingang in die deterministischen Automaten ist also stochastisch. Es konnte gezeigt werden, daß der stochastische Eingang entscheidbar ist.

Die n Automaten abstrahieren n Prozesse, die von einem Mehrfach-Programm-Betriebssystem verwaltet werden.

Die Fragestellungen sind dann die gleichen wie in der Warteschlangentheorie: mittlere Anzahl Elemente in den Schlangen und den Systemen, mittlere Wartezeiten und mittlere Antwortzeiten, Reserven in Abhängigkeit der Verteilungen für Einströmungen und Bedienraten. Hinzu kommt hier die Konkurrenz um die beschränkten Betriebsmittel und die Behinderung durch Steuerkommandos.

Das entwickelte Gleichungssystem besteht aus 10 simultanen linearen Gleichungssystemen, deren Koeffizienten jeweils von den Lösungen der anderen Gleichungssysteme abhängen. Das ganze nichtlineare Gleichungssystem wird mit Hilfe des Gradientenverfahrens gelöst. Die Konvergenz ist gut.

Mit Hilfe der berechneten Zustandswahrscheinlichkeiten lassen sich dann alle Kenngrößen angeben. Die bisherigen Ergebnisse zeigen, daß sich ein detaillierter Überblick über die Verkehrsströme im Rechner und über die Abgestimmtheit seiner Hard- und Software-Konfiguration ergibt.

Prof. Dr. H. Lenzing (Projektleiter)

Teilprojekt: „Algebra"

im Forschungsschwerpunkt: „Modellsysteme"

Einführung:

Im Teilprojekt Algebra werden folgende Einzelprojekte behandelt:

1. Direkte Zerlegungen in Modulkategorien,
2. Endomorphismenringe von projektiven (vorzugsweise nicht endlich erzeugten) Moduln,
3. Homologische Untersuchungen von geordneten Mengen und triangulären Matrixringen,
4. Konstantenreduktion in der algebraischen Geometrie,
5. Geschlecht von Funktionenkörpern und Dualität,
6. Bewertungstheoretische Methoden zur Strukturuntersuchung von Ringen.

Diese Einzelprojekte werden nachfolgend näher beschrieben; die ersten drei Projekte werden von Prof. Lenzing, die weiteren drei von Prof. Kiyek bearbeitet.

1. Direkte Zerlegungen in Modulkategorien

Die Darstellung von Moduln als direkte Summe von Moduln vorgegebenen Typs (z. B. zyklischen, endlich erzeugbaren usf.) gehört zu den klassischen Aufgaben der Ringtheorie; es erübrigt sich, hier auf die vielfältige Anwendbarkeit dieser Zerlegungen in der kommutativen und nichtkommutativen Algebra (vor allem auch in der Darstellungstheorie von Gruppen) näher einzugehen. Beschränkt man sich auf die direkten Zerlegungen von endlich erzeugbaren Moduln, so gibt es seit langem eine Fülle von Resultaten. Verlangt man dagegen solche Zerlegungen für alle Moduln über einem vorliegenden Ring, so wurde erst in den letzten Jahren ein entscheidender Durchbruch erzielt, obwohl schon in den dreißiger Jahren in Arbeiten von Köthe und Asano über einreihige Ringe diese Fragen angeschnitten und teilweise gelöst wurden.

Im Zusammenhang mit der untersuchten Fragestellung ist insbesondere die Lösung der Brauer-Thrall-Vermutung (jeder Ring von beschränktem Darstellungstyp ist von endlichem Darstellungstyp) für Algebren durch Roiter und für artinsche Ringe durch M. Auslander von Bedeutung.

Im Rahmen dieser Arbeiten wird gezeigt, daß die Modulkategorien über Ringoiden (d. h. gewisse Kategorien additiver Funktoren) der geeignete Rahmen sind, in dem Ringe von endlichem (bzw. beschränktem) Darstellungstyp zu untersuchen sind. Eine Verbesserung der Ergebnisse von Auslander ergibt sich, wenn man zur Untersuchung von Zerlegungsfragen von Moduln die sogenannten perfekten Ringoide einführt.

In diesem Kontext läßt sich die Brauer-Thrall-Vermutung für artinsche Ringe leicht beweisen.

Mit den geschilderten Methoden lassen sich neben bekannten Aussagen mehr globaler Natur auch Ergebnisse von stärker arithmetischem Charakter erzielen, z. B. Kompositionsverhalten der unzerlegbaren A-Moduln usf. Vor allem dieser Aspekt soll in der weiteren Bearbeitung des Teilprojektes verfolgt werden.

2. Endomorphismenringe von projektiven (vorzugsweise nicht endlich erzeugten) Moduln

Im Anschluß an Untersuchungen von W. Stephenson wurde für freie Moduln von *unendlichem* Rang bisher bewiesen, daß z. B. die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) Die Endomorphismenringe von F über A und G über B sind ringisomorph

(2) Die Ringe A und B sind Morita-äquivalent und F und G haben denselben Rang.

Insbesondere ist es möglich, aus der Kenntnis des Endomorphismenringes von F — bei Vorliegen der Zusatzinformation, ob F endlich erzeugbar ist oder nicht — die Kategorie der A-Moduln und F als Objekt dieser Kategorie zu rekonstruieren.

Bei Übertragung dieser Ergebnisse auf projektive Moduln (Untersuchung also der Frage: wie weit bestimmt für einen projektiven A-Modul F der Endomorphismenring von F den Ring A und den Modul F) treten zusätzliche Schwierigkeiten auf. Es scheint, daß in diesem Zusammenhang der volle Endomorphismenring zu wenig Information über A und F enthält und besser durch den Unterring der Endomorphismen von endlichem Rang zu ersetzen ist.

Im Rahmen des Vorhabens wurde bisher das folgende recht nützliche Ergebnis für projektive Generatoren F von A und G von B bewiesen:

Jeder Isomorphismus des Endomorphismenringes von F über A auf den Endomorphismenring von G über B wird durch eine Kategorieäquivalenz T von Mod-A in Mod-B induziert; insbesondere läßt sich jeder Ringisomorphismus zwischen den Ringen der Endomorphismen von endlichem Rang zu einem Isomorphismus der vollen Endomorphismenringe fortsetzen.

Es soll ferner untersucht werden, wie weit man in diesem Zusammenhang Aussagen für beliebige projektive Moduln oder beliebige Generatoren erhalten kann.

Interessant sind die Untersuchungen vor allem für eine genauere Kenntnis des Wechselspiels zwischen einem Ring A und dem Endomorphismenring B eines projektiven A-Moduls P in homologischer Hinsicht. Ist P ein freier Modul von endlichem Rang, so sind A und B Morita-äquivalent, unterscheiden sich daher in ihren homologischen Eigenschaften (z. B. globale Dimension, schwache globale Dimension usf.) nicht. Ist P frei von unendlichem Rang, so ergeben sich demgegenüber interessante Beziehungen zwischen der schwachen globalen Dimension von B und der globalen Dimension von A. (Es sei darauf verzichtet, die bisherigen Ergebnisse detailliert zu beschreiben und nur vermerkt, daß für genügend hohen Rang von P die beiden genannten Dimensionen übereinstimmen).

3. Homologische Untersuchungen von geordneten Mengen und triangulären Matrixringen

Ist I eine geordnete Menge, so werden

a) seit längerer Zeit die homologischen Beziehungen zwischen Mod-A und der Funktorkategorie [I,Mod-A] untersucht. Vgl. hierzu vor allem die Arbeiten von B. Mitchell.

Ferner ist die Untersuchung

b) der Funktoren

   lim proj [I,Mod-A] $\rightarrow$ Mod-A

   lim ind [I°,Mod-A] $\rightarrow$ Mod-A

   sowie ihrer Ableitungen von Interesse und führt auf den Begriff der homologischen bzw. cohomologischen Dimension von I, die ein Maß für die Exaktheit von lim proj bzw. lim ind bilden und sich als flache bzw. projektive Dimension eines geeigneten Objektes von [I°, Mod-A] beschreiben lassen.

Zur Frage a) sind durch Mitchells Arbeiten die Differenzen d = gl. dim [I,Mod-A] − gl. dim A, entsprechend auch für die schwache globale Dimension, vor allem für endliche geordnete Mengen untersucht worden. Für unendliche geordnete Mengen wurden im Rahmen des Vorhabens zunächst die notwendigen Techniken zur Beschreibung der projektiven bzw. flachen Objekte in [I,Mod-A] entwickelt, mit deren Hilfe der unendliche Fall untersucht werden soll. Teilergebnisse (für kleine Werte von d) liegen vor.

Zu b) ist darauf zu verweisen, daß nach den Untersuchungen von Mitchell, Osofsky und Jensen für gerichtete Mengen die cohomologische Dimension von I durch Mächtigkeitsüberlegungen bestimmt werden kann. Dagegen ist nach Vorarbeiten von Oberst (1968) die Bestimmung der geordneten Mengen (und Kategorien) der homologischen Dimension Null (die Frage, wann ist lim exakt) erst durch Isbell und Mitchell vollständig gelöst worden.

Fußend auf den o. a. Beschreibungen von projektiven bzw. flachen Objekten in [I,Mod-A] sind im Rahmen des Vorhabens Erweiterungen dieser Resultate (zunächst für den Fall kleiner homologischer bzw. cohomologischer Dimensionen) angestrebt.

4. Konstantenreduktion in der algebraischen Geometrie

Es sei R ein Bewertungsring mit dem Quotientenkörper K und dem Restkörper K′. Einem projektiven Schema X über R lassen sich bei vorgegebener Einbettung von X in einen projektiven Raum über R in kanonischer Weise projektive Schemata X_1 über K und X′ über K′ zuordnen. Mittels Pseudobewertungen der zugehörigen Koordinatenringe läßt sich dieser zweifache Basiswechselprozeß algebraisch gut beschreiben und liefert insbesondere, daß die Dimension der Kohomologiegruppen kohärenter Garben auf X_1 bei Reduktion zu Garben auf X′ nicht abnimmt. Für nach Reduktion integre reduzierte Schemata ergibt das die Invarianz des geometrischen Geschlechts. Ist das nach Konstantenreduktion erhaltene Schema nicht integer, so ist ein Verhalten des geometrischen Geschlechts zu erwarten, das der bekannten Neringschen Formel der Konstantenreduktion algebraischer Funktionenkörper einer Veränderlichen entspricht. Nach Klärung dieses Sachverhaltes soll das Verhalten von Divisoren, insbesondere Differentialdivisoren, bei Konstantenreduktion untersucht werden.

Für die Reduktion abelscher Varietäten wurde von Néron der Begriff des minimalen Modells eingeführt. Das minimale Modell einer abelschen Varietät ist durch universelle Abbildungseigenschaften charakterisiert.

Für nur projektive Varietäten gibt es im Sinne von Néron kein minimales Modell. Es soll untersucht werden, ob durch Invarianzforderungen an arithmetische Größen der Varietät ein „minimales" Modell ausgezeichnet werden kann.

5. Geschlecht von Funktionenkörpern und Dualität

Für algebraische Funktionenkörper einer Veränderlichen hängen Geschlecht und Differentialformen eng zusammen.

Die Kohomologiegruppen der Strukturgarbe von Funktionenkörpern höheren Geschlecht wurden von Snapper und Kiyek untersucht. Die Kohomologiegruppe der höchsten Dimension erwies sich als ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Inwieweit trifft das auch auf die anderen Kohomologiegruppen zu? Reicht es zur Charakterisierung des Geschlechts aus, nur die Punkte der Riemannschen Fläche zu betrachten, die diskrete Bewertungsringe sind? Hierauf scheint ein Ergebnis von Berndt hinzudeuten. Lassen sich mit den Ansätzen von Kunz „Dualitätssätze" für die „diskrete" und „allgemeine" Riemannsche Fläche beschreiben?

6. Bewertungstheoretische Methoden zur Strukturuntersuchung von Ringen

Eine Bewertung eines Ringes R ist eine Abbildung v von R in eine vollständig geordnete abelsche Gruppe G mit den üblichen Eigenschaften. Nun sei weiter v surjektiv. Dann läßt sich der Ring R° der Elemente mit nichtnegativem Wert durch eine Maximaleigenschaft charakterisieren. Weiter läßt sich die Familie der Ideale A von R°, die mit x auch jedes Element y enthält, dessen Wert höchstens gleich den Wert von x ist, charakterisieren. Gilt nur die abgeschwächte Multiplikationsregel, so heißt v eine Pseudobewertung von R. Diese wurden unter einschränkenden Bedingungen – insbesondere ist G reell – von Benz untersucht.

Jede homogene Pseudobewertung mit Werten in R — homogen bzw. Potenzen — läßt sich als Infimum einer Familie von Bewertungen von R darstellen. Solche Ringe können als Verallgemeinerung Krullscher Ringe aufgefaßt werden. Eine Klasse ähnlicher Ringe wurde von Heinzer und Ohm betrachtet. Es sollen nun folgende Fragestellungen studiert werden: Wann läßt sich ein Ring S als Ring R° für homogenes v darstellen? Was läßt sich über die Idealtheorie in solchen Ringen aussagen? Hier sind auch Arbeiten von Kelly, Larsen, Griffin und Eggert zu erwähnen. Ferner soll die Frage nach der Minimalität solcher Familien von Bewertungen untersucht werden.

In einer Reihe von Arbeiten (es seien Warner und Kiltinen genannt) werden Struktursätze für topologische Ringe hergeleitet. Unter anderem ergeben sich Bedingungen dafür, daß die Topologie von einer Bewertung herrührt. Wie lassen sich die Topologien charakterisieren, die von Pseudobewertungen herrühren?

Das hängt eng mit der Frage zusammen, ob eine Pseudobewertung zu ihrer Homogenisierung äquivalent ist. Für Dedekindringe in Zahlkörpern ist dies stets der Fall.

Das Fortsetzungsproblem für Bewertungen auf Ringen wurde von Manis in Angriff genommen.

Fortsetzungen von Pseudobewertungen auf ganze Oberringe bzw. Quotientenringe wurden von Huckaba bzw. Kiyek untersucht. Hier soll die Existenz von Fortsetzungen von Pseudobewertungen auf endliche Oberringe studiert werden; weiter sollen Analoge der klassischen Formel $e_1f_1 + e_2f_2 + \ldots = n$ entwickelt werden.

Prof. Dr. R. Rautmann (Projektleiter)

Teilprojekt: „Angewandte Mathematik"

im Forschungsschwerpunkt: „Modellsysteme"

Kurztext:

Im Rahmen dieses Teilprojektes wird die qualitative Untersuchung und numerische Lösung von Grundgleichungen der mathematischen Physik behandelt.

Die *Navier-Stokesschen Gleichungen* bilden die Grundgleichungen für die Meteorologie, für Meereskunde und für die Beurteilung der Ausbreitung von Schadstoffen in Luft und Wasser. Die entsprechenden Randwertaufgaben (gegebenenfalls mit Berücksichtigung von freien Rändern) sind grundlegend für Flugzeug- und Schiffbau, für Wettervorhersage und Gezeitenberechnung. Numerische Lösungen und Lösungsverfahren mit Fehlerabschätzungen, vor allen Dingen für die dreidimensionalen Aufgaben, sind von größter praktischer Bedeutung. Die *Vlasov-Boltzmannsche Grundgleichung der Plasmaphysik* ist bedeutsam für die Kosmologie, da unsere Welt weitaus die meiste Materie im Plasmazustand enthält. Die Vlasov-Boltzmannsche Gleichung besitzt aber auch große praktische Bedeutung bei den Bemühungen, Energie durch Kernfusion zu gewinnen. Denn die Anfangsrandwertaufgabe dieser Gleichung (mit Magnetfeldterm) ist das mathematische Modell der technisch bisher ungelösten, für die Kernfusion grundlegenden Aufgabe, ein Plasma längere Zeit innerhalb eines vorgegegebenen Raumgebietes einzuschließen. *Nichtlineare Diffusionsprobleme* haben in den letzten Jahren vor allem für die Biophysik und Plasmaphysik (im Zusammenhang mit der Beurteilung kritischer Wachstums- und Konzentrationsraten) große Bedeutung gewonnen.

Folgende Einzelprojekte sind in Angriff genommen.

1. Näherungsverfahren und numerische Lösungen für Navier-Stokes--Probleme,
2. Qualitative Untersuchung und numerische Lösung der Vlasov-Boltzmannschen-Gleichung und verwandter Gleichungen,
3. Theorie und numerische Lösung nichtlinearer Diffusionsprobleme.

Die gemeinsame mathematische Struktur dieser Grundprobleme der mathematischen Physik soll besonders herausgearbeitet werden. Ziel des numerischen Teils der Untersuchung sind praktisch brauchbare numerische Lösungsverfahren.

Zu 1 Es sollen Näherungsverfahren (Galerkin- und Iterationsverfahren) für Anfangs(rand)wertaufgaben der Navier-Stokesschen Gleichung sowie der Wirbeltransportgleichung untersucht werden. Von besonderem Interesse sind daher numerische Fragen der Stabilität und die Möglichkeit von Fehlerabschätzungen.

Zu 2 Es sollen für die angegebenen Gleichungen Existenzsätze, Fehlerabschätzungen, singuläre Störungen und die Konvergenz von Galerkin-Verfahren behandelt werden. Ferner sollen numerische Verfahren studiert werden.

Zu 3 Für die Gleichungen der nichtlinearen Diffusion sollen Existenz-Eindeutigkeits- und Stabilitätsaussagen gewonnen sowie numerische Verfahren entwickelt werden.

Zu allen drei Einzelpunkten ist auszuführen:

Die *Navier-Stokeschen Gleichungen* bilden seit mehr als 40 Jahren ein zentrales Problem der Angewandten Mathematik. Grundlegende Beiträge stammen von Leray, E. Hopf, Ladyzenskaya, Prodi, Lion und Serrin. Eine befriedigende mathematische Theorie konnte bisher nur für zweidimensionale Aufgabenstellungen entwickelt werden. Numerische Verfahren wurden bisher vorwiegend für stationäre Probleme in mathematisch gesicherter Form entwickelt. Überwiegend empirisch, weniger mathematisch abgesicherte Verfahren existieren in der Meteorologie und in der Meereskunde. Die leistungsfähigen modernen mathematischen Methoden haben in diesen beiden Bereichen bisher erst in erstaunlich geringem Umfang Eingang gefunden.

Der erste globale Existenzsatz für die 3-dimensionale *Vlasovsche Anfangswertaufgabe* wurde erst in diesem Jahr von Herrn Batt bewiesen. Eine singuläre Störtheorie der Vlasov-Gleichung führte ebenfalls in diesem Jahr Herr Lange in seiner Habilitationsschrift durch. Eine vollständige Approximationstheorie der Vlasov-Gleichung mit Mittelung gab Herr Neunzert auf dem diesjährigen Paderborner Ferienkurs in Angewandter Mathematik. Mit Fixpunktverfahren wurden diese Probleme während der letzten Jahre im Mitarbeiterkreis von Herrn Batt in München und von Herrn Hannoschöck in Zusammenarbeit mit Herrn Rautmann bearbeitet.

Nichtlineare Diffusionsgleichungen für die Biophysik wurden während der letzten Jahre von Prigogine und Nikoles aufgestellt. Ein zentrales Problem bei Diffusionsvorgängen in einem Plasma ist die Frage, wie kritische Teilchenkonzentrationen entstehen können.

Von Herrn Rautmann und Herrn Lange wurden während der letzten Jahre neue Approximations- und Störungsmethoden entwickelt. Ihre numerische Auswertung soll mit den modernen Verfahren Finiter Elemente und mit den speziellen Aufgabestellungen angepaßten Iterationsverfahren erfolgen. Wesentliches Hilfsmittel sind neue funktionalanalytische Abschätzungsmethoden (z. B. Temam 1975) und Methoden der Differential- und Integralungleichungen. Damit ergeben sich Fehlerschranken für Näherungslösungen und Aussagen über die Konvergenzgeschwindigkeit und Konvergenzordnung unserer Verfahren.

Mit dem Gelingen des Projektes würde eine fühlbare Lücke im gegenwärtigen Wissenstand der Angewandten Mathematik geschlossen, und zwar gerade in einem Bereich, dessen Bedeutung für Naturwissenschaft und Technik gar nicht überschätzt werden kann.

Das Forschungsprojekt ist zunächst auf drei Jahre angelegt. Im ersten Jahr sollen die bisherigen Ergebnisse über verallgemeinerte und klassische Lösungen der verschiedenen Formen der Anfangswert- und Anfangsrandwertaufgaben weiter entwickelt werden. Von besonderem Interesse ist dabei die Verschärfung und Weiterentwicklung der bisher erhaltenen Fehlerabschätzungen. Die bisher vor allem für die Vlasov-Gleichung an eindimensionalen Modellen durchgeführten Rechnungen sollen fortgeführt werden und optimale Programme zunächst für zweidimensionale Modelle von Navier-Stokes-Problemen, Vlasov-Boltzmann-Problemen und Diffusionsproblemen entwickelt werden. Im zweiten und dritten Jahr sollte das Verhalten der Lösungen dreidimensionaler Probleme untersucht werden und Rechenprogramme für diese dreidimensionalen Aufgabenstellungen entwickelt und getestet werden.

Prof. Dr. H.-D. Rinkens (Projektleiter)

Teilprojekt „Didaktik"

im Forschungsschwerpunkt „Modellsysteme"

in Zusammenarbeit mit

Dipl.-Math. B. Zimmermann
Dr. L. Hefendehl

„Problemlösungsverhalten im Mathematikunterricht"

Dauer: 1974—1977

Kurztext:

Das Projekt ist dem Bereich der auf Mathematik bezogenen empirischen Didaktik zuzuordnen. Ziel des Forschungsprojekts ist

1. die empirische Ermittlung von Problemlösestrategien bei mathematischen Aufgaben,
2. die Schulung von Problemlösefähigkeit unter Ausnutzung der in (1) ermittelten Kenntnisse.

Mit Hilfe der Methode des „lauten Denkens" wird das Verhalten der Vpn beim Aufgabenlösen protokolliert und anschließend einer informationstheoretischen Analyse unterworfen. Um bereits vorliegende Untersuchungen anderer Forscher auf den Mathematikunterricht anwendbar zu machen, muß überprüft werden, inwieweit

1. sich die vorliegenden Ergebnisse auf verschiedene Aufgabenstellungen des Mathematikunterrichts übertragen lassen;
2. bisher nicht berücksichtigte Variable (verschiedene Repräsentationsmodi, Fehler, logische Operationen, affektives Verhalten) für das Lösungsverhalten von Vpn charakteristisch sind;
3. unter Berücksichtigung der Ergebnisse von (1) und (2) Modifikationen und Ergänzungen an bereits vorliegenden Unterweisungsvorschlägen anzubringen sind.

Im Rahmen seiner Dissertation hat Herr Zimmermann ein Kategoriensystem entwickelt, das durch die Bildung von ca. 1500 Einzelbegriffen eine geeignete Codierung des beobachteten Verhaltens ermöglicht (für die Codierung des Verhaltens von 20 Vpn bei 3 Aufgaben sind ca. 10^6 alphanumerische Zeichen auf Lochkarten erforderlich). Ein Vergleich mit anderen Untersuchungen liegt bereits vor. Bezüglich der Frage nach der Rolle der Anschauung können vorläufige Ergebnisse als Hypothesen formuliert werden. Die Analyse von Fehlern befindet sich bislang am Anfang.

Neben der Ergänzungsbedürftigkeit der bisherigen Untersuchungen ergab sich auch eine Reihe weiterführender Problemstellungen.

Außer der Vervollständigung der im Kurztext genannten Untersuchungen, ist daran gedacht, das Alter der Vpn (zunächst Abiturienten und Studenten des 1. Semesters) allmählich zu senken. Darüberhinaus ergaben sich folgende weiterführende Problemstellungen:

– Klassifikation von Problemlösern nach verwendeten Strategien und Fehlern,
– Rolle und Art logischer Operationen beim Problemlösen (logische Operationen kommen selten vor!),
– Vergleich affektiver Verhaltensweisen mit objektivem „Zielabstand",
– Erstellung einer Instruktionsanweisung, die stärker an der subjektiven Problemrepräsentation der Vp und den Schwierigkeiten (Fehlern) der Vp orientiert ist,
– Wirkung von Vl-Instruktionen auf die Vp
– Rolle der Sprache im Problemlöseprozeß bei mathematischen Aufgaben.

Der letztgenannte Punkt hat das Gewicht eines eigenständigen Projekts. Hierzu liegt auch bereits eine eigene Pilot-Studie vor. Eine Beobachtung an Schülern der 4. und 7. Klasse beim Lösen von Sachaufgaben (im Rahmen einer Staatsarbeit) diente dem Zweck, semantische Faktoren beim Lösen mathematischer Aufgaben zu analysieren.