Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften

Natorp, Paul

Leipzig [u.a.], 1910

Drittes Kapitel. Zahl und Rechnung.

urn:nbn:de:hbz:466:1-35817

Drittes Kapitel.

Zahl und Rechnung.

§ 1. (*Die Grundreihe.*) Die Zahl stellt sich schon historisch dar als zugleich das reinste und das einfachste Gebilde des Denkens, welches die Wissenschaft als exakte begründet hat. An ihr hat von den Pythagoreern an die Logik der Wissenschaft sich orientiert, an ihr den Begriff der „reinen" Erkenntnis zuerst gewonnen und immer neu befestigt. Sie gibt zugleich das erstaunlichste Beispiel für die unbeschränkte Entwicklungsmöglichkeit, die den reinen Urbegriffen des Denkens innewohnt. Daher würde sie das tiefste Interesse des Logikers auch dann fordern, wenn sonst aller Gebrauch, der von den Zahlen und Zeichen der Arithmetik und Algebra gemacht wird, ihn gleichgültig lassen dürfte.

Die erste Vorbedingung für das logische Verständnis der Zahl ist aber die Einsicht, daß man es bei ihr nicht irgend mit gegebenen Dingen zu tun hat, sondern mit reinen Gesetzmäßigkeiten des Denkens, das heißt mit reinen Grundbeziehungen, die nicht von den Dingen, auf die sie hernach Anwendung finden mögen, abhängen und an ihnen erst Bestand gewinnen, sondern an sich Bestand haben müssen, um bestandhafte Dinge mitaufbauen zu können. Die Zahl von den Dingen abzuleiten ist, wenn unter Ableiten Begründen verstanden wird, ein offenbarer Zirkel. Denn die Begriffe von Dingen sind komplexe Begriffe, in die als einer der unerläßlichsten Bestandteile die Zahl miteingeht. Einzahl oder Mehrzahl oder sonst irgendeine Bestimmung der Zahl kann von Dingen, die in Einzahl oder Mehrzahl usw. vorhanden sind, hinterher zwar abstrahiert werden, aber nur weil sie in deren Begriff voraus mitgesetzt war; unmöglich kann ihr Begriff in dieser Abstraktion erst seinen Ursprung haben.

Was heißt es aber, daß die Zahl ihren Ursprung im reinen Denken hat? Vom Denken als Tun oder psychologischem Vorgang hat die Logik nichts zu sagen. Dem Inhalte nach aber ist Denken: Setzen von Beziehung, nichts anderes. Beziehung fordert Termini; aber auch nicht diese gehen der Beziehung voran, sondern die Beziehung setzt auch erst die Termini. Nichts also als dies: das Setzen von Beziehung, mit welchem zugleich die Termini der Beziehung gesetzt werden, legen wir zugrunde. In jedem Fall muß alles, was hieraus folgt, an der Zahl sich darstellen, da die Zahlsetzung Setzung von Beziehung ist. Zeigt sich nun aber, daß dies allein genügt, um die Zahl mit allen ihren Gesetzen aufzubauen, so ist nach keiner ferneren Grundlage zu suchen. Es kann ja für das Denken nichts geben, das ursprünglicher wäre als es selbst, das Denken, das heißt das Setzen von Beziehung. Was man auch sonst als Grund der Zahl in Anspruch nehmen möchte, würde eben dies, das Beziehungsetzen, einschließen und kann als Grund der Zahl nur darum erscheinen, weil es den wahren Grund, das Beziehungsetzen, als Voraussetzung enthält.

Eine Beziehung nun fordert, wie gesagt, Bezugspunkte, Termini, und im ursprünglichen Fall deren zwei. Etwas wird zu Etwas in Beziehung gesetzt. Und die Termini unterscheiden sich: das, worauf Beziehung stattfindet, wird eben damit als das Vorhergehende, Frühere (πρότερον, *prius*), als Grundlage der Beziehung gedacht; es muß gesetzt sein, damit in Bezug auf es das Andere, somit als das jenem Folgende, Spätere (ὕστερον, *posterius*) gesetzt werden könne. Beziehung schließt also notwendig ein: Grundsetzung und Gegensetzung; Setzung des Einen, nicht als Absolutes, von der Beziehung „Abgelöstes", für sich Stehendes, sondern eben Bezugsgrundlage für ein Anderes: das Andere dieses Einen.

Das Verhältnis der beiden Termini, durch das sie in Beziehung stehen, schließt somit zugleich dies beides ein: Sonderung, ja Ausschließung (das Eine ist nicht das Andere, das Andere nicht das Eine; beide werden, eben als das Eine und das Andere, in geschiedene Denkpunkte gesetzt), und wiederum Vereinigung in einem Denkinhalt, denn Beziehen heißt: in einem Denken vereinigen.

Diese Vereinigung ist noch nicht sofort das, was den Begriff eines Ganzen oder Vereins (*totale*, *unio*) ausmacht, aber sie ist die hinreichende Bedingung für die Möglichkeit dieser neuen, den vorigen eng verknüpften Setzung des Denkens. In der Relation des Zusammen liegt noch dies Neue: daß die Zwei, sofern in Beziehung und zwar in eine Beziehung gesetzt, wiederum Eins sind, das heißt wiederum in einer neuen Beziehung dieselbe Funktion übernehmen können wie ein Terminus der ursprünglichen Beziehung; also das durch diese Beziehung geschaffene Ganze, der Verein der bezogenen Termini, kann wiederum Bezugsglied werden für eine neue Beziehung, kann wieder auf andere bezogen oder für andere Bezugsgrundlage werden.

So ergibt sich der Begriff eines neuen „Einen", den ursprünglichen darin gleichartig, daß es selbst Terminus von Beziehung sein kann, aber darin von ihnen unterschieden, daß es eine Einheit aus anderen Einheiten darstellt, diese also als Bestandteile (Elemente) in sich vereint. Es sind aber genau nicht bloß zwei, sondern bisher drei Bedeutungen des „Einen" zu unterscheiden:

1. das Eine gegenüber dem Anderen, im Unterschied von ihm; das in der jedesmaligen Beziehung Erstgesetzte;

2. das Eine in der abstrakten Bedeutung, in der das Andere auch wieder Eines ist, also der Begriff des Einen

unterschiedslos dem Einen in erster Bedeutung und allemal seinem Anderen zukommt;

3. das Eine aus jenen beiden, der Verein beider.[1])

Die zweite Bedeutung mag als die leerste erscheinen. Doch fordert die anscheinende Gleichgültigkeit der Einheit dieser Bedeutung gegen die Stellung als Grund- oder Gegenglied in der Relation, und ebenso als Element oder Verein aus Elementen, besondere Aufmerksamkeit. Wären die Termini unabhängig von der Relation überhaupt, das heißt absolut, so wäre diese Indifferenz freilich auch gegeben. Aber diese Absolutheit wurde schon als trügerisch erkannt; die Termini bestehen für das Denken überhaupt nur in der Relation und durch sie. Aber um solche zu sein, brauchen sie nicht mehr zu sein als Inhalte oder Setzungen des Denkens überhaupt, und als solche können sie ebensowohl Grundglied wie Gegenglied, Element wie Verein von Elementen sein. Doch damit ist der Kern des Problems noch nicht getroffen. Sondern das Gegenglied einer Relation kann, nicht in derselben, aber in einer neuen Relation, die Funktion des Grundglieds, das Grundglied nicht in derselben, aber in einer neuen Relation die des Gegenglieds, das Totale die des Elements, das Element die des Totale übernehmen. Sei eine Relation Q zu P gegeben, wo P das Grundglied, Q das Gegenglied sei, so kann in einer neuen Relation Q Grundglied werden, welches dann ein ferneres Glied als Gegenglied fordert, etwa R; es kann andererseits P in einer neuen Relation als Gegenglied auftreten, welches dann ein ferneres Glied als Grundglied fordert, etwa O; und das nicht, indem die ganze Reihe dieser Glieder (wie in unserer Bezeichnung das Alphabet) schon als gegeben angenommen wird, sondern indem sämtliche Glieder durch die immer gleichartig sich wiederholende

1) Diese drei Begriffe des Einen unterscheidet schon Plato, Parm. 153—154; vgl. „Platos Ideenlehre" S. 252.

Beziehung erst gesetzt werden. So ergibt sich eine beiderseits offene Gliederreihe, etwa darzustellen durch eine Reihe

$$\ldots \frown | \frown | \frown | \frown | \frown | \frown \ldots,$$

worin jedes Einzelglied zugleich doppelter Beziehung (in unserer Darstellung vor- und rückwärts), nämlich als Grundglied zu einem Gegenglied oder Gegenglied zu einem Grundglied, fähig ist. Es kann ebenso irgendein Verein von Terminis als Terminus eines neuen, übergeordneten Vereins dienen, und umgekehrt ein Terminus eines gegebenen Vereins als Verein neuer, untergeordneter Termini, und so unbeschränkt weiter, so daß wiederum jeder Terminus diese doppelte Beziehung: als Teil eines Ganzen oder Ganzes aus Teilen, zuläßt.

Noch etwas Weiteres schließt sich gleich hier an, das sich in der Folge wichtig erweisen wird. Eine gegebene Beziehung ist als solche in Gedanken umkehrbar, das heißt mit jeder Beziehung unter zwei Terminis sind in Wahrheit zwei Beziehungen gesetzt; jeder Beziehung Q zu P entspricht eine Beziehung P zu Q. Es ist z. B. schon eine Beziehung von P auf Q, daß P Grundglied ist zum Q als Gegenglied. Man darf hierbei nur nicht in den Mißverstand verfallen, als ob dasselbe in einer und derselben Relation zugleich Grund- und Gegenglied sein könne; sondern die Beziehung ist allemal eine neue, in der das Gegenglied einer erstgesetzten Beziehung Grundglied, das Grundglied Gegenglied wird. Aber wo immer die eine Beziehung stattfindet, findet auch die andere statt, und wegen dieses ständigen Zusammengehens der zueinander reziproken Beziehungen bezeichnet man kürzehalber diese doppelte Beziehung als e i n e, gleichzeitig doppelt gerichtete, etwa so wie man in der Geometrie den Plus- und Minus-Sinn in den Begriff einer einzigen „Richtung“ zusammenfaßt.

Das Gemeinsame in beiden zuletzt betrachteten Fällen ist, daß dieselbe gedankliche Setzung als Ausgangs- und als Bezugsglied, als Teil und als Ganzes fungieren kann; stets aber nicht in einer und derselben, sondern in verschiedener Relation. Dies erklärt den Schein einer absoluten Unabhängigkeit der Termini von der Relation. Die scheinbare Bezugslosigkeit ist in Wahrheit doppelte, überhaupt mehrfache Beziehbarkeit, die daher rührt, daß durch irgendeine Beziehung sofort weitere Beziehungen mitgesetzt werden und so das Gebiet des Denkens wie durch Selbsterzeugung sich ständig erweitert. Im ersten der eben betrachteten Fälle entstanden die verschiedenen Relationen durch Nocheinmalsetzen der gleichen Beziehung auch in der gleichen Beziehungsrichtung, im zweiten Fall durch Umkehren der Beziehungsrichtung.

Auf diesen Grundlagen lassen sich nun schon einige einfachste Grundeigenschaften der Zahl ableiten.

§ 2. (*Ordnungszahl und Anzahl.*) Unsere Reihe enthält zunächst die Voraussetzungen für zwei Hauptfunktionen, die an der Zahl wohl zu unterscheiden sind, die Funktionen der Ordnungsbestimmung und der Bestimmung des Wieviel, oder Ordnungszahl und Anzahl.

Daß dies beides begrifflich verschieden, ist ebenso klar wie daß mit jeder dieser Arten der Zahlsetzung die Möglichkeit für die andere zugleich gegeben ist. Zunächst der Unterschied: das Erste, Zweite usw. existiert in einer und derselben von einem bestimmten Gliede an gerechneten Reihe nur je einmal; dagegen ist jedes von diesen der Anzahl nach Eines, ein beliebiges von ihnen mit einem beliebigen anderen zusammen sind zwei usw., also die Anzahlen 1, 2 usw. existieren in derselben Reihe unendlich vielmal. Ferner in den Zwei ist das Eins (der Anzahl nach), in den Drei sind die Zwei und ist das Eins eingeschlossen usw.; dagegen steht das Zweite dem Ersten, das Dritte dem Zweiten und Ersten usf. (sowie umgekehrt) ausschließend gegenüber. Indessen wo ein Erstes, da gibt es notwendig auch der Zahl nach Eines; es ist ja eben ein Erstes, nur eines; und wo ein Zweites, da gibt es (weil jedenfalls auch ein Erstes) notwendig Zwei, wo ein Drittes, auch Drei, weil ja auch ein Erstes und Zweites; und umgekehrt: wo Eines, da ist dieses zugleich das Erste; wo Zwei, da gibt es, in jeder beliebigen Anordnung, ein Erstes und Zweites, wo Drei, ein Erstes, Zweites und Drittes usf.

Man sagt wohl: die Anzahl, zum Beispiel Drei, sei von der Reihenfolge unabhängig; drei bleiben drei, gleichviel was als erstes, zweites, drittes gesetzt wird. Das ist richtig, wenn man von zu zählenden Dingen ausgeht. Aber es ist hier gar nicht zu fragen nach Dingen, die als 1, 2 oder 3, oder als 1. 2. oder 3. gezählt würden, sondern rein nach diesen Setzungsweisen selbst, als 1, 2, 3 oder als 1. 2. 3., und deren Gesetz. Da aber ist notwendig, sobald die Sonderung und Gegenüberstellung der Einzelglieder ins Auge gefaßt wird, allemal Eines das Erste, Eines das diesem Folgende d. i. Zweite, Eines das wieder diesem Folgende d. i. Dritte usf.; also es besteht notwendig die Folge des 1. 2. 3. usf., wo immer 1, 2, 3 usf. gesetzt sind. Und ebenso gilt das Umgekehrte.

Man glaubt die Anzahl unabhängig von der Ordnungsbeziehung aufzustellen auf Grund der „ein-eindeutigen Entsprechung“ unter den Elementen je zweier Klassen (Inbegriffe, Mengen, Mannigfaltigkeiten). Die hohe Bedeutung, welche dem Begriff der Zuordnung innewohnt, daß nämlich dadurch endliche und unendliche Mengen von Anfang an unter einen Gesichtspunkt gebracht werden, ist unbestritten und unbestreitbar; es wird im nächsten Kapitel davon zu reden sein. Auch ist richtig, daß die ein-eindeutige Entsprechung nicht eine voraus feststehende Reihenordnung jeder der verglichenen Mengen verlangt. Aber diese Entsprechung ist gar nicht vollziehbar, ohne daß eben damit eine Reihenordnung hergestellt wird. Mit allem Grund spricht man von Zu-ordnung, worin schon die Unumgänglichkeit der Befolgung einer Ordnung, wofern die durchgängige, kein Glied auslassende Entsprechung vollzogen und gewiß werden soll, sich ausdrückt. Es sind also die Momente der Anzahl und Reihenfolge allerdings begrifflich scharf auseinanderzuhalten; aber ein Irrtum wäre es, daß die Erkenntnis der einen sich vollziehen ließe, ohne daß die Erkenntnis der anderen, wenigstens der Grundlage nach, zugleich damit vollzogen würde. Man setzt eben tatsächlich und unvermeidlich, indem man je Eines je Einem entsprechen läßt, die Einzelglieder auseinander, und zwar in einer Folge, ohne deren Innehaltung die Vergewisserung, daß kein Glied ausgelassen und keines mehrfach gesetzt ist, unmöglich wäre. Das auf jeder Stufe schon Gezählte ist eben damit das Voraufgehende, das noch nicht Gezählte das Nachfolgende, und ohne solchen stufenmäßigen Fortgang ist die ein-eindeutige Entsprechung nicht in Gedanken vollziehbar, also nicht erkennbar. Diese Betrachtung gilt natürlich auch für unendliche Mengen, z. B. für die Zuordnung zwischen den ganzen positiven und den geraden Zahlen. Man muß die ersteren, und damit auch die letzteren, indem jeder ganzen Zahl ihr Doppeltes entsprechend gesetzt wird, um sie in ihrer Allheit zu denken nach irgendeinem System, (dem Dezimalsystem oder einem anderen) der Reihe nach gesetzt denken.

Nach dem allen ist es ein unfruchtbarer Streit, welche von beiden Funktionen der Zahl die ursprüngliche, welche von der anderen abhängig und bloß folgeweise durch sie mitgesetzt sei. Die Wahrheit ist, daß beide zueinander streng korrelativ sind. Gewiß, wenn ich nicht Drei habe, habe ich auch kein Drittes. Aber auch mit dem Dritten werden die Drei erst fertig. Sobald man sich die Zahl im Entstehen denkt, tritt notwendig die Funktion der Aufeinanderfolge (das Aristotelische „Früher und Später") voran; läßt man sie fertig sein, geht man vollends von Mengen vorhandener Dinge aus, so erscheint die Aufeinanderfolge gleichgültig und sekundär. Genau um diesen Unterschied des genetischen und ontischen Sinnes der Denksetzung handelt es sich. Wir erklären: beide sind berechtigt und beide sind notwendig. Die Denkbewegung aber, das Denkverfahren, das Procedere ordnet sich — dafür dürfen wir uns jetzt einfach auf das Ergebnis der beiden vorigen Kapitel berufen — in letztem Betracht notwendig über jeder Art des Denkens, die beim fertigen Sein zum Stillstand gekommen ist. Vor allem: der Prozeß allein begründet die Kontinuität; die Kontinuität des Denkens aber ist, wie wir uns überzeugten, das Letzte, worauf alles Fragen schließlich zurückgeht. Nur um sie selbst aufzuhellen und zu scharf bestimmtem Begriff zu bringen, ist allerdings der Denkstillstand ebenso notwendig, der in dem Kontinuum die Diskretion vollzieht.

In dem dreistufigen Gange des synthetischen Prozesses, wie wir im vorigen Kapitel ihn konstruiert haben, vertritt die erste und dritte Stufe vorzugweise die Diskretion, obgleich immer in Rückbeziehung auf die Kontinuität des Denkens; die zweite vorzugsweise den Denkfortschritt, obgleich immer als Fortschritt von Denkpunkt zu Denkpunkt. Nur für einen Augenblick kann es paradox erscheinen, daß in der Fortschreitung, die doch die Glieder auseinanderstellt, die Kontinuität, in dem Anhalt des Denkens dagegen, in dem das vorher Auseinandertretende sich erst zusammenschließt, die Diskretion sich darstelle. Denn es ist klar, daß in letztem Betracht Kontinuität nur der Bewegung des Denkens zukommen kann, Diskretion ein Anhalten beim jedesmal erreichten Punkt verlangt. Erst in sekundärer Betrachtung sind gerade im Fortschreiten die Einschnitte, gleichsam die Meilensteile zu beachten, an denen die Fortschreitung selbst zur Bestimmung kommt, und wird umgekehrt beim Anhalt, weil er den Sinn des Rückblicks auf den vollzogenen Denkfortschritt und der Bergung des dadurch Gewonnenen erhält, innerhalb der jedesmal gesetzten Grenzen der kontinuierliche Zusammenhang des Ganzen zu einem vorzüglich wichtigen Moment. Es soll ja allemal die dritte Stufe des Prozesses die erste und zweite in sich vereinigen; die erste Stufe aber vertritt am reinsten die Sonderung, die zweite den Übergang und damit die Kontinuität des Denkprozesses, die dritte also die Vereinigung von Sonderung und Kontinuität. Der Zusammenschluß soll ja nicht Abschluß sein im Sinne des *Ne plus ultra*, sondern gerade im Sinne des *Plus ultra*; es ist ein Anhalten, nur um weiterzuschreiten; der Endpunkt wird zugleich Punkt des Übergangs. Der Unterschied der zweiten und dritten Stufe des Prozesses aber ist das Fundament für den Unterschied der beiden Funktionen der Zahl als Ordnungszahl und Anzahl. Die Anzahl wird so zugleich Maßzahl, die Zahl das Bestimmungsmittel der Größe.

So wird es ganz klar, daß diese beiden Funktionen der Zahl, so eng sie, und in beiden die Momente der Diskretion und der Kontinuität, miteinander verflochten sind, doch dem Begriff nach immer deutlich geschieden bleiben. Der Unterschied ist kein geringerer als der zwischen Zeit und Raum, der, wie sich künftig zeigen wird, auf nichts als diesem letzten Unterschied der beiden Grundmomente des Denkens: Sonderung und Vereinigung (Sonderung des zugleich zu Vereinigenden, Vereinigung des zugleich zu Sondernden) beruht. Die Aufeinanderfolge in der Zahl, das Aristotelische πρότερον καὶ ὕστερον (Vor und Nach, oder Nacheinander) ist darum noch nicht die Zeitfolge; aber es ist an der reinen Zahl der Ausdruck desselben fundamentalen Merkmals jedes Denkprozesses, welches in anderer, hier uns noch nicht angehender Entwicklung des reinen Denkens (oder des Prozesses der synthetischen Einheit) die zeitliche Setzung begründet. Ebensowenig ist die Zahl als Inbegriff (Totale) schon räumliche Vereinigung; aber sie drückt an der reinen Zahl (die der räumlichen ebenso wie der zeitlichen Setzung logisch voraufgeht) dasselbe fundamentale Merkmal des Denkprozesses aus, das in jener anderen Entwicklung des Denkens die räumliche Setzung begründen wird. So behält der Widerspruch vieler Mathematiker gegen die Ansicht, daß die Zahl die „Anschauung“ von Zeit oder Raum (oder beider) zur Voraussetzung habe, völlig recht, und wird doch auch das gesunde Motiv dieser Meinung klar, der nicht bloß Kant gehuldigt hat, sondern an der nicht wenige bedeutende Mathematiker bis heute, auch unabhängig von Kant, festhalten.

§ 3. (*Kritische Anmerkung*). Der regelmäßige Fehler der Grunddefinitionen der Zahl, wie man sie bei den Arithmetikern findet, besteht darin, daß man von gegebenen Mengen von Dingen ausgeht. Nur beispielsweise nenne ich die Arithmetik von Stolz (1885), die vielleicht als Ausdruck der herrschenden Meinung der Mathematiker über diesen Punkt — oder dessen, was bis vor nicht langer Zeit die herrschende Meinung war — angesehen werden darf. Er definiert: Zwei Vielheiten heißen einander gleich, wenn sich jedem Dinge der ersteren je eines der letzteren zuordnen läßt und keines von dieser unverbunden bleibt; wobei besonders bewiesen wird, daß die Reihenfolge, in der man die Glieder einer jeden der verglichenen Vielheiten je einem der anderen Vielheit zuordnet, für das Ergebnis (Gleichheit oder Ungleichheit) gleichgültig ist.

Aber indem man Vielheiten von „Dingen“ vergleicht, fällt man aus der Betrachtung des reinen Denkverfahrens schon heraus. Es wären statt Vielheiten von Dingen vielmehr Folgen von Setzungen und zwar beziehentlichen Setzungen zu vergleichen. Dann sind aber die Einzelglieder durch nichts mehr unterscheidbar als durch die Reihenfolge, in der sie gesetzt werden. Zähle ich Dinge, z. B. die Fenster eines Saales, so sind diese noch durch irgendwelche sonstigen Merkmale unterschieden; z. B. eins liegt gegen Osten, eins gegen Westen, die anderen, in der und der

Aufeinanderfolge, dazwischen. Aber das reine Verfahren der Zählung weiß von solchen Unterschieden nichts, darf nichts davon wissen, es kennt nur Eins, Eins, Eins usf. und kann unter diesen nicht anders unterscheiden als nach der Folge, in der sie gesetzt werden: Eines als Ausgangsglied, Eines diesem zunächst, Eines wiederum diesem usf. Es kann also in verschiedenen Zählungen — sofern solche überhaupt zulässig sind — immer nur das erste Glied dem ersten, das zweite dem zweiten usf. entsprechen. So bleibt für einen Beweis der Gleichgültigkeit der Reihenfolge für die Anzahl überhaupt kein Raum; die Identität der Anzahl der Glieder bis zum jedesmaligen Schlußglied (dieses eingeschlossen) ist ohne weiteres gegeben.

Vielleicht denkt man, auch wenn die Glieder verschiedener Reihen bloß durch die Stelle in der Reihe unterschieden werden, könne man doch etwa das erstgezählte einer Reihe z. B. von drei Gliedern dem drittgezählten der zweiten, das zweite der ersten dem ersten der zweiten zuordnen, wo dann zu beweisen bleibe, daß das drittgezählte der ersten Reihe nun notwendig dem zweitgezählten der zweiten zufällt und kein Glied der anderen Reihe mehr übrig bleibt. Aber das ist leerer Schein. Indem ich die Ordnung der Glieder der zweiten Reihe verändere, mache ich das vorher dritte Glied zum ersten, das vorher erste zum zweiten, und damit das vorher zweite zum dritten, und so entsprechen sich wieder richtig das erste und erste, zweite und zweite, dritte und dritte Glied eben dieser Zählungen. Das Glied, das ich zuerst in Vergleichung ziehe, ist eben damit das erste, da nur nach der Reihenfolge dieser meiner Setzungen hier die Frage ist.

So kann man gar nicht dazu kommen einen Satz aufzustellen: „Die Anzahl ist unabhängig von der Reihenfolge der Glieder“, solange man rein mit dem Zählverfahren selbst, nicht mit abzuzählenden Dingen zu tun hat. Im Zählverfahren selbst und durch es ist die Folge der Glieder bestimmt und wird nur dadurch der Inbegriff oder Verein der Einzelglieder bestimmbar, daß die Reihenfolge es ist. Es ist nichts wesentlich anderes, was ich auf solche Art bestimme, nur daß ich das eine Mal das letzte Glied, stets aber im Verhältnis zu allen vorausgegangenen, das andere Mal die Gesamtheit der Glieder bis zu diesem letzten, dieses eingeschlossen, ins Auge fasse. Es bleibt immer ein Unterschied der Betrachtungsweise, aber beide Betrachtungsweisen entsprechen sich genau und gehen streng miteinander. Deshalb findet auch die Arithmetik wenigstens der endlichen Zahlen keine Veranlassung, Ordnungszahl und Anzahl gesondert zu behandeln.

Der Fehler ist aber bei den Arithmetikern fast durchgehend, daß man, statt von der Zahl, von zu zählenden Dingen spricht. Dieser Fehler wiederholt sich in der seltsamen Forderung der Gleichartigkeit oder Abstraktion von den qualitativen Verschiedenheiten der zu zählenden Dinge. Wie sind es überhaupt noch „Dinge", wenn von aller Verschiedenheit abgesehen wird? Man wird vielleicht sagen, es bleibe als unterscheidend die Stelle in Zeit oder Raum. Aber auch Zeit und Raum dürfen nicht vorausgesetzt werden, wenn nach den Gesetzen der reinen Zahl die Frage ist; denn umgekehrt sind Zeit und Raum nicht ohne die Voraussetzung der Zahl erklärbar. Nicht Gleichartigkeit ist zu fordern, sondern jede Nachfrage nach qualitativer Gleichheit oder Verschiedenheit des Gezählten, weil überhaupt nach dem Gezählten, ist bestimmt auf Seite zu stellen. Gleichartig sind die reinen Setzungen unserer Grundreihe, sofern sie nichts als die Setzung überhaupt vertreten, bei der von gar keiner anderen Verschiedenheit, als daß sie eben eine, eine andere und wieder eine andere sind, die Rede ist und sein darf. Diese Gleichartigkeit genügt, nach keiner anderen ist überhaupt zu fragen, wenn nach der Zahl die Frage ist und nicht nach dem Gezählten.

In dieser Grundvoraussetzung treffe ich besonders mit

G. F. Lipps [*105*, *106*] zusammen. Er legt, ähnlich wie wir, eine Normalreihe zugrunde, d. h. eine Reihe fixierter Zeichen, deren Glieder lediglich „Träger von Merkmalen der Reihenform“ sind; welche also rein das Verfahren der Zählung und was aus diesem folgt, nichts darüber, vor allem keinerlei Merkmale zählbarer Dinge darstellt. Dieser Reihe schreibt er die folgenden Eigenschaften zu:

1. Notwendigkeit und Allgemeingültigkeit. — Diese folgt für uns aus der rein logischen Begründung und also reinen Methodenbedeutung der Zahl.

2. Einzigkeit. — In der Tat, da unsere Reihe nur der Ausdruck des Zählverfahrens, das Verfahren als solches aber nur in der Einzahl vorhanden ist, so ist unsere Reihe selbst (vielmehr das, was sie bezeichnet) nur einfach existierend zu denken.

3. Sie geht aus von einem Anfangsglied, ist dagegen ins Unendliche fortsetzbar, weil Ausdruck des immer gleichen, stets wieder zur Verfügung stehenden Verfahrens der Setzung des Anderen zum Einen. — Für uns ergab sich sofort die beiderseitige Unendlichkeit. Es gibt kein absolutes Anfangsglied, sondern man kann von jedem Glied anfangen und dann vor- und rückwärts schreiten.

4. Alle Glieder sind gleichwertig (äquivalent), denn sie sind durch nichts als ihre Stelle verschieden. — Aber man wird sie nicht ohne weiteres „vertauschbar“ nennen dürfen. Die Vertauschbarkeit hat wohl einen Sinn, der aber nicht primär ist. Zunächst ist es vielmehr die ganze Funktion jedes Einzelgliedes der Reihe, eine Stelle, unvertauschbar mit jeder anderen, zu bestimmen. Sie austauschen zu wollen, würde voraussetzen, daß sie noch etwas anderes als Stellzeichen wären. Aber etwas anderes sind sie für uns bis dahin nicht.

5. Die Reihe ist homogen, d. h. sie besitzt kein ausgezeichnetes Glied außer dem Anfangsglied. — Diese Ausnahmestellung wäre bedenklich; sie besteht für uns von

Anfang an nicht, da wir kein absolutes Anfangsglied anerkennen.

6. Jedes Glied involviert die ganze Reihe, denn das Verfahren ist, als gesetzmäßiges, von seinem Anfang an, und so von jedem beliebigen Glied rückwärts bis zum Anfangsglied und vorwärts ins Unendliche bestimmt. — Wir haben statt dessen zu sagen: rückwärts und vorwärts ins Unendliche, da das Verfahren nicht bloß von seinem (etwa absoluten) Anfang, sondern von jedem (willkürlich wählbaren, also relativen) Anfang an rückwärts und vorwärts bestimmt ist.

Die Sonderstellung der Eins ist es also, welche die Aufstellung von Lipps von der unsrigen unterscheidet. Dieser und im engen Zusammenhang damit der ganz eigenartige arithmetische Begriff der Null fordert aber überhaupt noch eine besondere Betrachtung, mit der zugleich der Aufbau der gebräuchlichen Zahlreihe und die Erklärung der gewöhnlichen Rechnungsarten sich füglich einleiten läßt.

§ 4. (*Die Null und die Eins. Der Ableitungsversuch Freges.*) Fast jeder bisherige Versuch eines logischen Aufbaues der Zahlgesetze ging von dem Fundamente der Zahleinheit aus. Überaus selten aber findet sich auch nur ein Ansatz dazu, für diesen Begriff selbst eine zwingende logische Begründung zu geben. Geradezu der einzige ernstere Versuch einer solchen Begründung ist der von G. Frege, den Russell und Couturat im wesentlichen reproduzieren. Mit und vor der Eins aber will Frege die Null begründen. Der Versuch ist scharfsinnig und auch, wenn er nicht geglückt sein sollte, der Prüfung wohl wert.

Die Schrift Freges: „Die Grundlagen der Arithmetik", ausdrücklich als logisch-mathematische Untersuchung bezeichnet, hat beträchtliche, von den Logikern der Mathematik nicht sogleich nach Gebühr gewürdigte Verdienste. Sehr treffend ist vor allem die Widerlegung der von J. Stuart Mill versuchten Begründung der Zahl auf Induktion, die Abwehr überhaupt jeder Herleitung der Zahl aus Eigenschaften zu zählender Dinge; nicht minder treffend die Ablehnung der unklaren Begründung auf „Anschauung", der entschlossene Rückgang allein auf die eigenen Gesetze des Denkens, der „Idee"; die Zurückweisung aber auch eines Formalismus, der „so tut, als ob Forderung schon Erfüllung wäre", indem er z. B. fordert, daß Subtraktion, Division, Radizierung immer ausführbar sei, und damit dann genug getan zu haben glaubt. „Warum fordert man nicht auch, daß durch beliebige drei Punkte eine Gerade gezogen werden kann?" Daß Frege den Aufstellungen Kants nicht voll gerecht wird, ist dem Mathematiker nicht zu verargen, vielmehr anzuerkennen, daß er dabei teilweise im Recht ist oder Richtiges wenigstens im Sinne hat. So lehnt er das „synthetische Urteil a priori" zwar ab, aber indem er, nach Kantischen Worterklärungen nicht ganz ohne Berechtigung, unter Synthesis Vereinigung eines sinnlich gegebenen Mannigfaltigen versteht. Aber nach Kants definitiver Festsetzung ist die Synthesis gerade die Urfunktion des Denkens; also ergibt sich die hier freilich notwendige Korrektur aus dem richtigeren und entscheidenden Ansatz bei Kant selbst. Frege seinerseits behauptet, daß das arithmetische Urteil „analytisch" sei, will aber damit ersichtlich nur sagen, daß es reine Denkleistung sei; aber nicht bloß „erläuternd", sondern „erweiternd". Die Folgerungen, sagt er (S. 101), sind „in der Definition enthalten, aber wie die Pflanze im Samen, nicht wie der Balken im Hause". Nun, diese Entwicklung wie der Pflanze aus dem Samen (der doch nicht die Pflanze ist), genau dies ist es, was in Kants Sprache Synthesis heißt. Und daß Frege wirklich (in Kants Sinn) synthetische Urteile meint, bestätigt im besonderen vieles, so die Bemerkung gegen Mill (S. 31): Zwei und ein Paar seien keineswegs dasselbe, wie Mill sonderbarerweise zu glauben scheine. Das heißt in Kants Sprache: das Additionsurteil ist synthetisch. Zwei Einer „sind" ein Zweier, nicht als ob die Begriffe identisch oder der zweite aus dem ersten analytisch herauszuholen wäre, sondern sie sind äquivalent: Was immer als zwei Einer, dasselbe kann als ein Zweier gedacht werden, aber in einer anderen, neuen logischen Auffassung, die zur vorigen korrelativ, also stets mit ihr, nicht aber in ihr selbst gesetzt ist.

Den Grundfehler in Freges Begründung der Zahl aber sehe ich nicht in diesen Allgemeinheiten, über die es bei der Gleichheit der Grundlage unserer Anschauungen leicht sein sollte sich zu verständigen, sondern in folgendem. Indem er die Zahl, richtig, auf reine Grundgesetze des Denkens zurückführen will, glaubt er diese, wenigstens die fundamentalen und für seinen Zweck ausreichenden, aus der überlieferten Logik einfach entnehmen zu können. Ob deren Aufstellungen aber, ihre Richtigkeit übrigens vorausgesetzt, nicht die Zahl, vor allem die Zahleinheit, offen oder versteckt schon einschließen, hat er nicht untersucht. Ohne Zweifel ist dies der Fall. Frege stützt sich nämlich auf die überkommenen Begriffe von Essenz und Existenz; diese sieht er an als mit jedem Akte des Denkens unvermeidlich gesetzt und darum selbst nicht weiter reduzierbar. Aber zum wenigsten was damit vorausgesetzt wird, müßte genauer angegeben werden. Ich finde darüber bei ihm nur eine Andeutung (S. 77, Anm. **): „Begriff ist für mich ein mögliches Prädikat eines singulären, beurteilbaren Inhalts, Gegenstand ein mögliches Subjekt eines solchen.“ Hier ist im singulären Urteils-, also Erkenntnisinhalt die Einzahl ersichtlich vorausgesetzt. Allgemeiner: es wird als bekannt und gegeben vorausgesetzt, was es heißt: „*X* fällt unter den Begriff *A*“. Vorausgesetzt wird dies aber durchaus im Sinne der traditionellen Logik, d. h. im Sinne des Aristoteles, nach welchem das Enthaltensein unter einem Begriff zweifellos das Verhältnis des (gegebenen!) Einzelnen zum Allgemeinen bedeutet. Also vorausgesetzt wird auf jede Weise das Einzelne, d. h. in der Einzahl Gedachte, aus dem es dann freilich leicht ist den Begriff der Einzahl selbst analytisch herauszuholen. Diesen Fehler, der in einer einfachen *petitio principii* besteht, teilen alle Ableitungen der Zahl aus dem Begriff der Zugehörigkeit von Gegenständen zu Klassen (Mengen, Gesamtheiten). Unvermeidlich werden dabei die Gegenstände von Anfang an als (in letztem Betracht) einzelne, d. h. je einer der Zahl nach, gedacht.

Das ist nun nicht bloß überhaupt eine Erklärung desselben durch dasselbe, sondern Frege tut damit im Grunde eben das, was er vermeiden wollte: er setzt die fertigen Dinge voraus, um an diesen, als ihnen anhängende Eigenschaften, die Zahlbeziehungen aufzuweisen. Gewiß nicht im rohen empiristischen Sinne; nicht die vorhandenen Dinge setzt er voraus; aber doch im Begriff ist ihm das Ding, unter dem Namen des Gegenstandes, voraus fertig. Darin aber ist unvermeidlich die Zahl, jedenfalls die Einzahl, schon mitgesetzt. D. h. er ist der reinen Denkfunktion, welche die Zahl ausdrückt, wohl auf der Spur, aber weiß sie von den übrigen reinen Denkfunktionen, mit denen zusammen sie das Ding oder den Gegenstand erst aufzubauen hat, nicht rein abzulösen und in die wahre logische Beziehung zu setzen, jene Beziehung, die wir ihrem allgemeinen Charakter nach als Korrelation, nicht Identität, bereits erkannten. Es drückt sich dies bei Frege auch darin aus, daß er die Zahl — nach wieder sehr treffender Zurückweisung jeder subjektiven Begründung auf psychologische Vorgänge — auf etwas wie Platonische Ideen, nämlich objektive Denkinhalte stützt. D. h., er sucht die Denkinhalte zwar, wie Plato, rein, aber, wie Plato in seiner Frühzeit, einseitig ontisch, nicht genetisch zu erfassen. Die reinen Denkgebilde sind ihm ein- für allemal fertig, er kennt keine Erzeugung reiner Denkinhalte und keine sich entwickelnden Beziehungen, sondern nur stehende unter stehenden Denkpunkten. Damit mußte der synthetische Sinn des Denkens, den er in der Auffassung des arithmetischen Urteils als erweiternd, nicht bloß erläuternd, doch im letzten Grunde anerkennt, wo nicht gänzlich wieder verloren gehen, doch seine volle Entfaltung nicht erreichen.

Was nun ist nach Frege die Zahl, zunächst die Einheit? Nicht eine Eigenschaft von Dingen; eine seltsame Eigenschaft in der Tat, die unterschiedslos allem zukäme, eine Unbegrenztheit des Umfangs also besäße, die jede Bestimmtheit des Inhalts ausschlösse. Sie ist also auch nicht als Gemeinsames aus vielen oder allen möglichen gegebenen Dingen herauszuholen, also im herkömmlichen Sinn durch „Abstraktion" des Gemeinsamen aus vielem Gegebenen zu „definieren". Leibniz zwar habe eine solche Definition versucht: „Eins ist, was wir durch einen Akt des Denkens zusammenfassen." Aber diese Definition sei ein Zirkel, weil in dem „einen" Akt des Denkens der Begriff „Eins" schon vorausgesetzt sei. Allerdings sei es Sache unserer Auffassung, welchen Gegenstand wir als einen ansehen wollen; aber gerade darum könne der Begriff des Einen nicht eben hiervon abhängen. — In der Sache ist das gewiß richtig. Aber vielleicht darf man annehmen, daß Leibniz gerade dies hat sagen wollen: die Einheit liege allein in der Art der Setzung, nicht im Gegenstande unabhängig von der Art seiner Setzung; was abgesehen von der psychologischen Wendung des Ausdrucks (der von Akten spricht) genau richtig ist. — Auch nicht die Abstraktion von den Verschiedenheiten der Dinge oder die Fiktion ihrer völligen Gleichheit könne den Begriff des Einen ursprünglich geben; denn mit Verschiedenheiten existierender Dinge habe die Zahl überhaupt nichts zu tun. Übrigens setze Mehrheit Verschiedenheit voraus; wie namentlich Jevons die Einheit auf die Identität, die Mehrheit auf die Verschiedenheit habe zurückführen, in der Mehrheit nichts als die „leere Form der Verschiedenheit" sehen wollen. — Dies alles ist richtig und vorzüglich klar entwickelt; doch kündigt sich in der letzten Wendung der Hauptfehler bereits an, dem

Frege dann verfällt. Es sind gewisse Beziehungen (Korrelationen!) der Zahl zu anderen Kategorien, besonders denen der Qualität, von ihm erkannt; aber diese Erkenntnis hat ihn dazu verleitet, jene auf diese zurückführen zu wollen. Neben der Qualität ist es die Existenz, mit der Frege die Zahl zusammenbringt. Einheit wird Existenz in der Einzahl; diese nähere Bestimmung der Existenz soll dann in der Identität liegen: Einheit sei Existenz als Identisches. Der sehr sichtbare Fehler dieser Ableitung soll sogleich aufgedeckt werden; das positiv Bedeutsame aber sei voraus anerkannt: Frege empfindet, daß die Zahl etwas Gleichartiges hat mit den reinen Begriffen der Qualität (Identität und Verschiedenheit) und ferner mit dem Begriff der Existenz; überhaupt also mit Kantischen „Kategorien", d. h. solchen Begriffen, die in ihrem Zusammenwirken den Gegenstand vielmehr erst ursprünglich aufbauen, als aus den fertigen Gegenständen hinterher zu schöpfen sind. Er empfindet auch einen notwendigen Zusammenhang unter den Begriffen dieser Art oder einigen derselben, und gerade den hier wichtigen. Aber er versucht dann, eine bestimmte Gruppe dieser Begriffe, eben die, welche die Zahl direkt begründen, die der Quantität, auf gewisse andere, anscheinend fundamentalere, nämlich die der Qualität und der Existenz, zurückzuführen. So ist das Ergebnis zwar falsch, aber es werden auf dem Wege zu ihm wichtige Dinge, wenn auch nicht bis aufs letzte ergründet, doch in Sicht gebracht und nach wichtigen Seiten beleuchtet.

§ 5. (*Fortsetzung.*) Wir sind nun vorbereitet, Freges Erklärungen der Null, der Eins, und dann der übrigen Zahlen in direkte Prüfung zu nehmen. Seine Erklärungen der Null und Eins lauten:

A) „Einem Begriff kommt die Zahl Null zu, wenn allgemein, was auch *a* sei, der Satz gilt, daß *a* nicht unter diesen Begriff fällt." D. h. der Begriff Null (= Keines) wird reduziert auf die logische Kategorie des „allgemein verneinenden Urteils".

B) „Wenn 1. dies nicht der Fall, und wenn 2. aus den Sätzen: '*a* fällt unter *B*' und '*b* fällt unter *B*' allgemein folgt, daß *a* und *b* dasselbe sind, so kommt dem Begriff *B* die Zahl Eins zu." — Also der Begriff der Einheit wird reduziert auf den der Identität.

Nun sind wirklich (um bei dem letzten zu beginnen) die Begriffe des Einen und des Identischen zueinander streng korrelativ: was immer als identisch, läßt sich in gleicher Hinsicht als Eines auffassen, und was als Eines, in gleicher Hinsicht als identisch; aber doch ist keiner von beiden Begriffen auf den anderen reduzierbar. Der Versuch der Reduktion ist denn auch offenbar mißglückt. Identität soll Einzahl besagen. Welche Identität? Man hat mit Grund mehrere Begriffe von Identität unterschieden; einer von diesen und der einzige hier brauchbare ist — die numerische Identität. In dieser aber ist eben die Zahl, nämlich Einzahl, als unterscheidendes Merkmal von Anfang an mitgesetzt; also ist es leerer Schein, wenn man sie aus ihr herleitet. Nicht Identität eines Denkinhaltes schlechtweg, sondern numerische Identität, oder Identität des Exemplars, d. i. des Einzelnen, schließt die Zahleinheit ein; aber sie begründet sie nicht, sondern wird vielmehr, als numerische, durch sie erst begründet. Oder in anderer Wendung: Frege versteht von Anfang an unter Identität: Identität in der Existenz, nicht in der Essenz. Nun ist das in der Existenz Identische gewiß als solches notwendig in der Einzahl zu denken, aber eben indem die Einzahl als begriffliches Moment darin eingeht. Überhaupt ist die Existenz nichts weniger als der ursprünglichste unter den reinen Begriffen, sondern vielmehr der komplexeste von allen. Die Existenz, der Gegenstand als existierend ist es genau, der durch die Gesamtheit der Kategorien erst aufgebaut wird.

Bei dem allen bleibt hoch verdienstlich, daß die Einheit aufgewiesen werden soll in den Urbeziehungen, die das Denken eines Gegenstandes überhaupt ausmachen; also in dem, was Kant die synthetische Einheit nennt. Nur wird der Rückgang auf diese, hauptsächlich infolge der Isolierung, in der das Problem ins Auge gefaßt wird, nicht richtig vollzogen. Unmittelbar in der Funktion der synthetischen Einheit selbst, in der Grundkorrelation des Einen und Mannigfaltigen, der Sonderung und Vereinigung (Sonderung des zu Vereinigenden, Vereinigung des zu Sondernden) liegt beides: die Einheit und Mehrheit der Quantität und der Qualität, die sich untereinander aufs engste verflechten, aber zugleich doch in aller Bestimmtheit begrifflich auseinandertreten.

Frege kennt die Kantische „synthetische Einheit" nur in der viel zu engen Form der Subsumption: „X fällt unter den Begriff A". Diese setzt er als Letztes voraus, wohinter nicht weiter zurückzugehen möglich sei, da bei allem Denkgebrauch, d. h. bei allem Gebrauch von Begriffen und Urteilen, dies schon vorausgesetzt werde. Gewiß ist die Subsumption sehr fundamental; aber doch nicht fundamentaler als alle anderen Urausdrücke der synthetischen Einheit, von denen sie nur einen darstellt. Und zwar ist sie einer ihrer Ausdrücke nach Seite der Qualität. Diese ist korrelativ zur Quantität; aber nicht sind darum die Bestimmungen der Quantität aus denen der Qualität herauszuholen. Auch die traditionelle Logik unterscheidet doch Inhalt und Umfang des Begriffs; und wenngleich der Umfang in bestimmtem Sinne vom Inhalt abhängt, so bleiben beide immer begrifflich verschieden als die einander korrespondierenden Grundrichtungen der im Begriff sich darstellenden synthetischen Einheit. Die Zahl aber gehört ohne Zweifel unmittelbar der Umfangsbestimmung an, ihr Begriff kann daher aus Inhaltsbestimmungen als solchen nicht geschöpft werden; vielmehr fordert es die Reinheit der logischen Darstellung, daß, sofern es um Umfangsbestimmungen sich handelt, von allen Inhaltsbestimmungen vorerst abgesehen wird.

Man könnte etwa sagen: die Zahleinheit sei die Umfangsbestimmung, welche der Inhaltsbestimmung der Identität entspricht. In der bei den Schullogikern beliebten graphischen Darstellung begrifflicher Verhältnisse wird der Fall der Identität zweier (!) Begriffe veranschaulicht durch das Zusammenfallen zweier (!) Kreise, durch das sie in der Tat — vielmehr einer werden. Interessant ist hierbei, daß von der Zweiheit ausgegangen, die (der Identität entsprechende) Einheit also als Grenzfall der verschwindenden Zweiheit (die eben mit der Verschiedenheit verschwindet) aufgestellt wird. Im Grunde ist es bei Frege dasselbe: die zwei Dinge *a* und *b* werden der Zahl nach eines im Falle ihrer Identität. Frege merkt gar nicht, daß er also die Zweiheit voraussetzt und die Einheit zu einem besonderen Fall, einem Grenzfall der Zweiheit macht; während er sich sonst gewiß darüber klar ist, daß vielmehr die Zweiheit nur unter Voraussetzung der Einheit aufgestellt werden kann.

Wie durchweg die Umfangsbeziehungen der Begriffe, die den Inhaltsbeziehungen zwar entsprechen, aber doch dem ganzen Begriff nach von ihnen verschieden sind, als richtiger Kern seiner Begründung zugrunde liegen, bei der mangelnden Unterscheidung der Umfangs- und Inhaltsbeziehungen aber alles Abzuleitende versteckt schon vorausgesetzt wird, das wird noch deutlicher an seiner Ableitung der Nullzahl. Diese ließe sich füglich in folgende Fassung bringen: „x fällt unter A in der Nullzahl, wenn von allen x richtig ist, daß sie nicht A sind," das heißt, wenn ich recht verstehe: die Null wird erklärt als der Umfang der Begriffe, die keinen Umfang haben. Denn ohne Zweifel soll Null nicht eine Inhalts-, sondern Umfangsbestimmung sein, aber den Umfang solcher Begriffe bezeichnen, unter die — nichts fällt, d. h. die keinen Umfang haben.

Gibt es Begriffe ohne Umfang? Frege bemüht sich, es glaubhaft zu machen. Es müsse den Begriff des Widersprechenden, z. B. des kleinsten Bruchs, doch geben, damit von ihm ausgesagt werden könne, er sei widersprechend, nur entspreche ihm eben kein Gegenstand; er sei also zwar ein Begriff, aber ohne Umfang. — Schließlich ist die logische wie jede Terminologie bis zu gewissem Grade der Willkür anheimgegeben; aber zweckmäßig ist es wohl nicht, Begriff zu nennen, wodurch nicht etwas begriffen wird. Ich verstehe unter Begriff eine vollziehbare Denkeinheit; der Widerspruch aber ist im Denken unvollziehbar. Die Aussage, daß etwas ein Widerspruch sei, setzt nicht den Begriff dieses Widersprechenden voraus, sondern nur die Frage, ob aus gegebenen begrifflichen Elementen (z. B. Bruch und Kleinstes) eine Denkeinheit (die dann dargestellt sein würde durch einen Begriff „kleinster Bruch") vollziehbar sei oder nicht.

Aber gäbe man auch die Existenz des Begriffs des logisch Nichtexistierenden zu, so gibt es jedenfalls nicht einen Umfang solcher Begriffe, da das Nichtexistierende eben keinen Umfang hat. Will man darauf antworten: eben dies, keinen Umfang haben, bedeute den Umfang Null haben? Ich fürchte, daß man damit auf leeres Wortgefecht hinauskäme. Der Streit erledigt sich dadurch: der arithmetische Begriff der Null kann nicht der des logischen Nichts, des im logischen Sinne Nichtexistierenden sein; denn der Null kommt ohne Zweifel Existenz (im logischen Sinne) zu. Nicht erst die physikalischen Anwendungen (der Wärmegrad Null, die Geschwindigkeit Null) oder auch die geometrischen (Punkt als Nullwert der Strecke usw.) lassen die Null als sicher existierenden Begriff erkennen, sondern ganz ebenso ihr Gebrauch in der reinen Arithmetik. Die Differenz $1 - 1 = 0$ ist sicher nicht „null und nichtig" im Sinne logischer Nichtexistenz, sondern sie existiert so sicher wie die Differenz $\gtrless 0$, deren Grenze sie darstellt.

Nur weil der Begriff Null existiert, läßt sich der Umfang von Begriffen, denen kein Gegenstand entspricht, als Umfang Null symbolisch bezeichnen; nämlich es läßt sich ein Umfang Null als Grenze setzen, bei der der Umfang von Begriffen verschwindet. Mit anderen Worten, es kann das logische Feld frei gelassen werden für mögliche Besetzung mit existierendem Inhalt, während noch keine bestimmte Besetzung mit solchem angenommen wird. So wird der logische leere Raum zum „seienden Nichtsein", ganz wie der leere Raum, in den Demokrit seine Atome setzte. Dies Nichtsein ist aber vielmehr ein sehr bestandhaftes Sein; nicht „null und nichtig", nicht logische Nichtexistenz, die, wenn sonst ein zulässiger und brauchbarer Begriff, jedenfalls nicht einen Umfang, auch nicht einen „Umfang Null" begründen könnte, sondern rein in der Qualität verbliebe.

Diese kritische Erwägung führt nun auf ein Ergebnis, zu dem wir auf Grund unserer eigenen Ansätze allerdings ganz direkt gelangen konnten: die Null bedeutet nicht Nichtsetzung, sondern die Setzung der Bezugsgrundlage zu jeder Zahlrelation[1]. Eins, Zwei usf. sind von Anfang an zu verstehen in Relation zur Bezugsgrundlage Null. Die Null bedeutet den Denkpunkt, von dem aus irgend ein Denkschritt oder eine Folge von solchen (mit 1, 2 . . .) gezählt wird. Daher „zählt" sie selbst freilich nicht als Schritt; sie ist aber darum nicht überhaupt nichts, sondern eine unerläßliche Vorbedingung oder Grundlage aller Zahlsetzung, im eigentlichen Sinne der Setzung von Denkschritten. Auch wenn man die Null als verschwindende Zahl denkt, so verschwindet sie nicht ins logische Nichts, sondern sie bleibt beim Verschwinden jedes von Null verschiedenen Zahlwertes stehen als Bedingung, als Ausgang, von dem jeder mögliche, von Null verschiedene Wert zu rechnen ist. Unter dem Begriff des Stetigen wird in der

1) Diesen Sinn der Null kennen auch Arithmetiker wie Gergonne, nach Simon [*161*], S. 109 und 71, [*162*], S. 25.

Tat jeder endliche Wert von Null an sich erzeugend gedacht. Was dies in logischer Strenge besagt, ist hier noch nicht zu erörtern; jedenfalls aber setzt es, wenn es in irgendeinem Sinne gelten soll, voraus, daß der Nullwert als Grenze so sicher existieren muß, wie der von ihr an stetig wachsende oder bis zu ihr stetig abnehmende (positive oder negative, endliche oder unendliche) Zahlwert, der nicht Null ist.

Nachdem wir Freges Ableitung der Null und der Eins nicht zugeben konnten, ist natürlich auch seine Ableitung der übrigen Zahlen für uns nicht annehmbar. Er sagt weiter:

C) Die x sind Zwei, wenn sie 1. nicht Null sind (nach der ersten Definition), 2. nicht Eins (nach der zweiten), sondern Verschiedenes, z. B. a, b..., und wenn 3., gesetzt daß eines der Verschiedenen a ist, das Übrige, d. h. das von diesem Verschiedene, identisch (also nach der zweiten Definition Eins) ist. — Man könnte dafür offenbar das ganz Gewöhnliche sagen: Zwei sind Eins und Eins. Im Begriff des von a Verschiedenen, als des Übrigbleibenden, ist dieses im Grunde schon als Eines, und als das Andere d. i. Zweite zum a (als dem Einen im Sinne des Ersten) gedacht. Es ist also auch hier nur Schein, daß die Zahlbestimmung (hier die Zweiheit) auf etwas anderes (Verschiedenheit und Identität) zurückgeführt wäre; die Verschiedenen mußten schon zwei sein, um verschieden sein zu können. In gleicher Weise erfolgt dann die Definition der Drei, Vier usw., die allgemeine Definition des Folgenden und damit der Folge der endlichen Zahlen überhaupt. Die Verwendung der Negation in allen diesen Definitionen hat nur den begründeten Sinn, daß in der Vereinigung allerdings auch Auseinanderstellung, also der Begriff des Anderen gegenüber dem Einen liegt. Aber der quantitative und der qualitative Sinn des Einen und Anderen sind und bleiben einer auf den anderen unreduzierbar, obgleich zueinander streng korrelativ.

§ 6. (*Dedekind und andere. Relativität der Eins und Möglichkeit verschiedener Zählungen.*) Von Frege unterscheidet sich Dedekind [*33*] schon dadurch, daß er weit entschiedener die „freie Schöpfung" oder „Erzeugung" der Zahlbegriffe anerkennt. Ihr Ausdruck ist die „Abbildung eines Systems in sich selbst", d. h. die immer gleichartige Wiederkehr derselben Beziehungsart, gemäß welcher allemal einem Element im System ein folgendes entspricht. Hierbei wird von aller besonderen Beschaffenheit der Elemente abgesehen, nur ihre Unterscheidbarkeit überhaupt festgehalten und ausschließlich die Beziehung ins Auge gefaßt, in welche die Elemente durch die „ordnende Abbildung" (d. h. jene immer gleiche Beziehung von Element zu Element) zueinander gesetzt sind (§ 73). Allerdings wird das Grundelement Eins wieder einfach vorausgesetzt; es soll sich von den übrigen Elementen dadurch unterscheiden, daß es selbst zu keinem anderen (voraufgehenden) in jener Beziehung steht, durch welche von ihm an alle weiteren mit ihm selbst und untereinander zusammenhängen oder eine „Kette" bilden (s. bes. 134 a. E., neben 44, 57, 58). Den Vorzug gegenüber Frege erkennen wir darin, daß die immer gleiche Beziehung von Glied zu Glied als das erzeugende Prinzip der Zahl bestimmt erkannt ist. Die Subsumption unter Begriffe wird ersetzt durch die Zugehörigkeit von „Dingen" (die nicht mehr bedeuten als Setzungen des Denkens überhaupt) als Elemente zu einem „System" (Inbegriff, Mannigfaltigkeit, Gesamtheit, d. h. der Sache nach: zu einer Ordnung), sofern sie „unter einem gemeinsamen Gesichtspunkt aufgefaßt, im Geiste zusammengestellt" werden (2). So kann der Fehler den Worten nach derselbe zu sein scheinen wie bei Frege. Aber jener gemeinsame Gesichtspunkt ist eben nur der der Ordnung selbst. Hiermit ist die Quantität 1. rein abgelöst von der Qualität, während sie bei Frege ganz auf diese zurückgedeutet wurde, und es ist 2. der reine Relations-Charakter der Zahl, ungleich bestimmter als bei Frege, als entscheidend erkannt. Unbefriedigend bleibt, abgesehen davon, daß die Null, die negative Zahl, überhaupt die sogenannten Erweiterungen der Zahl nicht ausdrücklich erklärt werden, hauptsächlich, was ebenso bei Frege, bei Hilbert und allen anderen unbefriedigend ist: die Sonderstellung der Eins, die auch hier nicht begründet, sondern einfach definitorisch aufgestellt wird. Da sie nach Dedekind (97) die kleinste Zahl sein, nichts ihr voraufgehen soll, so muß wohl die Null keine Zahl sein, oder es muß der Begriff der Zahl sich, kaum aufgestellt, eine logisch nicht wohl verständliche Wandlung gefallen lassen. Die Eins als kleinste Zahl wäre ein Absolutes. Aber dann wäre auch die Zwei ein Absolutes und die Drei, überhaupt jede bestimmte Zahl. Es wäre die Zahl von der Zeit und dem Raum darin radikal verschieden, daß (wie übrigens Frege S. 19 f. geradezu ausspricht) die Zahlen nicht wie die Zeit- und Raumpunkte alle gleichartig sind, sondern „jede ihre Eigentümlichkeit hat". Zwar könnte man versuchen zu antworten, es bleibe selbst bei dem von der Eins ausgehenden Aufbau der Zahl die Gleichartigkeit in einem Sinne gewahrt; nämlich die Eins in der Bedeutung der Einer seien ebenso gleichartig wie die Punkte; wenn aber ihre Zusammenfassung zur Einheit, Zweiheit, Dreiheit usf. allerdings Verschiedenheiten begründe, so seien diese nicht größer als etwa die der Zusammenstellungen von Einzelpunkten zu Punktpaaren, Punkttripeln usf. im Raume oder auch in der Zeit. In der Tat aber wären nach jener Auffassung schon die Einer nicht durchaus begriffsgleich, da es einen Einer gäbe, dem kein anderer vorhergeht, einen weiteren, dem nur einer, einen, dem genau zwei vorhergehen usf. Wirklich vermieden wird also auch unter dieser Betrachtung die Ungleichartigkeit nicht; sie hat nur das Gute, zu zeigen, daß der Forderung der Gleichartigkeit eben doch nicht auszuweichen ist.

Dagegen besteht eine solche Ungleichheit bei unserem Aufbau von Anfang an nicht. Es fällt damit der absolute

Begriff der Eins ganz aus; jedes Glied der Reihe kann im bloßen Stellverhältnis nach Belieben als erstes gesetzt und dann das ihm folgende als zweites, das diesem folgende als drittes usf. gezählt werden. Damit aber ergibt sich die Möglichkeit unendlich vieler, immer nach demselben Gesetz sich aufbauender, nur dem Ausgangsglied nach verschiedener Zählungen und unerschöpflicher neuer Beziehungen unter diesen, welche, wie wir bald sehen werden, die erste Art der sogenannten Rechenoperationen begründen. Ihre Verschiedenheit ist, wie sich zeigen wird, schärfer zu bezeichnen als Verschiedenheit der Nullbeziehung. Andererseits begründet die Möglichkeit der Zusammenfassung irgendeiner Vielheit gegebener Einheiten zu einer neuen Einheit die Möglichkeit verschiedener Zählungen in einer zweiten Art: verschieden nach der Einheit, mit der gezählt wird. Diese begründet die andere Grundart von Operationen, welche wir die metrischen nennen werden: Multiplikation und Division, die sich dann weiter entwickeln zur Potenzierung, Radizierung und Logarithmierung.

Zwar kann gegen die Aufstellung des Begriffs verschiedener Zählungen sich leicht der Zweifel erheben: ob denn nicht die Zahlreihe als Ausdruck des in sich einzigen Verfahrens der Zählung überhaupt schlechthin einzig sei. Diese Einzigkeit wurde von Frege besonders betont; auch Lipps gab sie als eines der charakteristischen Merkmale der Zahlreihe an, und wir haben sie unsererseits ausdrücklich anerkannt. In der Tat wird die Einzigkeit in einem Sinne mit allem Recht behauptet. Die Funktion der Null, der Eins usf. ist in allen verschiedenen Zählungen eine und dieselbe. Aber sie kann von Stelle zu Stelle der Grundreihe, oder von Vielheit zu Vielheit, sich übertragen und gleichsam wandern, so wie (um eine gerade von Frege herangezogene historische Vergleichung zu benutzen) die Platonische Idee, unbeschadet ihrer Identität und numerischen Einheit, doch wandern, d.h. ihre Funktion von Stelle zu Stelle (des Raumes und der Zeit) übertragen kann. Oder man denke (um etwas Moderneres zur Analogie zu wählen) an das Wandern der Energie in der Mechanik, die dabei doch immer dieselbe, nur einmal existierende, unvermehrbare und unverminderbare Größe bleiben soll. Man sieht wohl schon hier ab, daß das Wandern der Zahlfunktion beruhen wird auf dem Unterschied und Verhältnis jener in der Zahl jederzeit eingeschlossenen drei Momente: der zunächst unterschiedslosen Setzung von Einem und wieder Einem usf.; der Gliederung nach Grund- und Gegenglied; und endlich der Zusammensetzung. Auf diese Weise behält die Einzigkeit der Zahl ihren strengen Sinn und besteht doch die Möglichkeit immer neuer Zählungen, nicht je nachdem zählbare Gegenstände gegeben oder denkbar sind, sondern an und für sich nach den eigenen Gesetzen der Zahl. Hierbei hat die „Möglichkeit“ nicht bloß den Sinn der Zulässigkeit zufolge der Widerspruchslosigkeit; sondern es gibt (im mathematischen Sinn des Existierens) alle diese unendlichen Zählungen von immer neuen Nullpunkten aus und mit immer neuen Einheiten, und es gibt eben damit die immer neuen Relationen unter diesen verschiedenen Zählungen. Die Rechenoperationen sind nichts als die Entwicklungen dieser unendlichen, existierenden Zählungen und Relationen unter solchen. Also reden sie alle von seienden Relationen, aber indem sie diese von den einfachsten an Stufe um Stufe entwickeln. Also widerspricht jenes Sein nicht dem Werden, der Erzeugung neuer und neuer Zahlwerte; wie es sich besonders zu erkennen gibt in der Unendlichkeit ihrer Entwicklung, die eine Erschöpfung der existierenden Möglichkeiten geradezu ausschließt, während es zugleich ausgeschlossen ist, anders als durch bestimmte Zwischenglieder von den einfachsten zu höheren und höheren Relationsarten logisch überzugehen.

Zur Betrachtung dieser Entwicklungen der Zahlbeziehungen, d. h. zur Ableitung der sogenannten Rechenoperationen schreiten wir jetzt.

§ 7. (*Zahlgleichung und Zahloperation.*) Alle Rechnung vollzieht sich in Gleichungen. Es scheint daher, als müsse man zuerst den Begriff der Zahlgleichheit aufstellen. Aber da stößt man sofort auf eine ernste Schwierigkeit. Was kann es heißen: zwei Zahlen sind gleich? Da die Zahlreihe, als Ausdruck des Zählverfahrens, schlechthin einzig ist, so wären gleiche Zahlen dieselben Zahlen, es hätte keinen Sinn, sie erst gleich zu setzen. Die Zahl 1, die Zahl 2 usf. existiert überhaupt nur ein einziges Mal, also hat es keinen Sinn, als Satz der Arithmetik aufzustellen: $1 = 1$, $2 = 2$ usf. So sagt man in der Tat auch nicht, sondern etwa $1 + 1 = 2$, $3 - 1 = 2$, $2 \cdot 1 = 2$, $4 : 2 = 2$. Man gelangt, scheint es, auf verschiedenen Wegen zu demselben Ziel; und man setzt die Operationen, die in sich durchaus verschieden sind, einander „gleich", sofern sie dieselbe Zahl zum Ergebnis haben: $1 + 1 = 3 - 1 = 2 \cdot 1 = 4 : 2$. Die Operationen sind in der Tat nur darin einander gleich, daß sie auf dasselbe Resultat Zwei führen, sonst sind sie durchaus verschieden. Ihre Gleichheit ist vielmehr Äquivalenz, wie auch von Leibniz an vielfach bemerkt worden ist.

Aber wir wissen noch gar nicht, was Zahloperationen sind. Man spricht von „Ableitung" einer neuen Zahl aus gegebenen. Aber Zahlen sind nicht Dinge, die der Veränderung unterliegen, die aus etwas etwas anderes werden können. Sie sind schlechthin, aus ihnen läßt sich nichts machen, mit ihnen läßt sich nichts tun; man kann sie nicht rücken noch wandeln, zusammen- oder voneinandertun, vermehren oder vermindern, vervielfältigen oder teilen, noch können sie verschwinden und gar mehr als verschwinden; sie sind in unveränderlicher Bestimmtheit. Schon Plato hat die Behandlung der Zahlen nach Art veränderlicher und verrückbarer Dinge weidlich verspottet: Waren die

Zwei etwa nicht Zwei, bevor man sie zusammentat? Soll aus Eins Zwei werden bald durch Zusammentun, bald im Gegenteil durch Trennen? Dergleichen mag von Dingen gesagt werden, die dem Werden und Vergehen und der Veränderung und Verrückung unterliegen, nicht aber von Zahlen, die doch Begriffe sein wollen.

Man hat, wie es scheint, die „Synthesis" psychologisch mißverstanden, als Zusammentun zwar nicht äußerer Dinge, aber wenigstens ihrer stellvertretenden Abbilder in der Vorstellung. Psychologisch hat es auch wohl Sinn, davon zu reden, wie Denkfunktionen sich verflechten, aus gegebenen, d. h. bereits eingeübten Verbindungen neue hervorwachsen oder schon gebildete wieder zergehen. So mag der Psychologe die Zahlgebilde (Summen, Produkte usf.) wachsen und sich entwickeln lassen. Aber mit dem allen hat die Logik der Zahl nichts zu schaffen. Für sie existieren auf der jetzt erreichten Stufe der Betrachtung nur Bestimmtheiten, welche sind, nicht werden. Es hat für sie keinen Sinn zu sagen, daß aus zwei Zahlen eine neue wird. Wieso wird sie, wenn sie doch zuvor schon ist? Denn wenn man von Rechnung spricht, setzt man die Zahlen doch schon voraus.

Auch scheitert man bei jedem Versuch der Durchführung sehr bald. Wenn es einen Sinn zu haben wenigstens scheinen kann: aus der Zwei und der Eins erzeuge sich die Drei, was soll es dagegen heißen, durch Wegnahme des Einen vom Einen erzeuge sich die Null; und gar durch Wegnahme der Drei von der Zwei die negative Eins? Was ist die Null, die negative Zahl, und ebenso der Bruch, die irrationale Wurzel, das Irrationale überhaupt, das Imaginäre? Man spricht von „Erweiterungen des Zahlbegriffs". Man will sagen: Erweiterung des Bereiches der Rechnungsoperationen. Aber worauf erweitert man sie? Auf Zahlen doch nicht? Wenigstens hatte man voraus keinen Begriff der Zahl gegeben, nach welchem dies alles Zahlen wären. Man verständigt sich, das Wort Zahl zu gebrauchen über den anfänglich definierten Sinn hinaus — ohne doch einen neuen Sinn dieses Wortes aufzustellen. Also sind es leere Symbole, mit denen man rechnet. Merkwürdig nur, daß dabei (oft, nicht immer) Ergebnisse herauskommen, die wieder einen den Anfangsdefinitionen entsprechenden Sinn geben und in der Anwendung sich als richtig erproben. Damit sind die Mathematiker lange zufrieden gewesen; sie vermißten gar nicht einen Sinn der Operation, wenn sie nur Resultate sahen. Aber gerade die großen Mathematiker haben sich dabei nie beruhigt, und allgemein darf gesagt werden, daß die heutige Mathematik gegen die Forderung einer logischen Durchdringung des Sinnes der arithmetischen Operationen nicht mehr taub ist. Nur finde ich nicht, daß eine befriedigende logische Erklärung der Rechenoperationen bis jetzt gegeben sei.

Man darf nicht hoffen, zu einer solchen anders zu gelangen, als indem man als erste Voraussetzung zugrunde legt, daß Zahlen schlechthin *sind* und, einmal ihren Begriff gesetzt, als eben das, als was sie gesetzt sind, gesetzt bleiben, unentstanden, unvergänglich, unveränderlich. Aber indem sie sind, *verhalten* sie sich irgendwie gegeneinander, und die vollständige Entwicklung dieser in und mit den Zahlen selbst gesetzten Verhältnisse, das und nichts anderes ist der Sinn der Rechnung. Das allein ist das Tun der Mathematik, daß sie diese Verhältnisse, die an sich in und mit den Zahlen selbst und gleich ihnen sind, nicht werden, in methodischem Fortschritt sich entwickelt. Was so keine überzeugende Erklärung fände, entzöge sich überhaupt klarem Begriff, dürfte also in einer Wissenschaft von der Zahl überhaupt nicht zugelassen werden. Doch wird sich zeigen, daß alle bisher mit Erfolg entwickelten Zahlgebilde auf diesem Wege ihre Erklärung wirklich finden.

Zunächst wird der Sinn der Gleichung, der so problematisch erschien, aus dieser Grundvoraussetzung sofort klar. Was gleichzusetzen, sind nicht Zahlen, als eine Art Dinge, sondern Relationen unter Zahlen, die selbst nichts als Termini von Relationen bedeuten. Auch eine Zahlrelation einer für sich stehenden Zahl gleichzusetzen, hat keinen aus sich klaren Sinn, sondern kann allenfalls nur als abkürzender Ausdruck zugelassen werden; an sich, nach genauer Logik, kann nur eine Relation einer Relation gleichgesetzt werden.

Daraus ergibt sich freilich die zunächst vielleicht befremdende Folgerung, daß arithmetische Gleichungen ihrem Begriff nach notwendig viergliederig sind, also eigentlich stets Proportionen darstellen. Dies wird sich uns aber in der Durchführung wirklich bestätigen. Wir beginnen, schon um uns vom Herkommen nicht zu weit zu entfernen, mit der Untersuchung der Addition.

§ 8. (*Die Addition.*) Was heißt $1 + 1 = 2$? Man darf nicht Anstoß daran nehmen, daß eine solche anscheinende Kinderfrage hier gestellt wird. So paradox es ist, eine logisch voll befriedigende Antwort auf diese Frage ist bisher auch bei den gelehrtesten Arithmetikern nicht zu finden. Schon oft aber hat die gründliche Lösung der denkbar einfachsten Fragen sich fruchtbar erwiesen für die Lösung viel größerer Fragen. Das ist auch nicht zu verwundern. In den Fundamenten steckt alles; ist in den Grundlagen der Wissenschaft nur das geringste, vielleicht in weite Konsequenzen hinein unschädliche Versehen begangen, irgendwo wird es doch, wenn auch vielleicht erst in fernen Ableitungen, sich verhängnisvoll erweisen. Also darf man es nicht scheuen, eine solche scheinbar einfachste Frage einmal scharf ins Auge zu nehmen.

Und da zeigt sich sofort, daß in diesem schlichten $1 + 1$ ein seltsames Problem liegt. Vorausgesetzt sei die Reihe der ganzen Zahlen: 1, 2, . . ., wobei die gewöhnliche Erklärung eintweilen gelten möge, daß 1 die (willkürliche) Anfangssetzung, 2 das diesem Anfang zunächst, 3 das wieder diesem zunächst Gesetzte bedeutet usf. Diese Reihe ist (wie allgemein anerkannt wird) einzig, unabänderlich. Es darf also stets nur gezählt werden: 1, 2, 3, 4, 5, ...; in welcher Reihe jedes folgende Glied durch das vorhergehende und alle vorhergehenden bis zur 1 zurück bestimmt ist. Woher nehme ich nun die Berechtigung zu sagen: Eins und Eins; also gewissermaßen zu zählen: 1, 1, da doch nach der Voraussetzung auf 1 jedenfalls 2 folgen müßte, und nie nochmals 1? Oder wie darf ich sagen $3 + 2$, also gewissermaßen zählen: 1, 2, 3, 1, 2, statt, was bisher einzig zulässig war: 1, 2, 3, 4, 5?

Aber indem die Frage bestimmt so gestellt ist, ist die Antwort fast schon gegeben. *Nicht in einer und derselben Zählung* kann ich zählen: 1, 2, 3, 1, 2. Aber ich kann eine erste Zählung mit der 3 abbrechen und eine neue beginnen; bei der ich aber die erste (bis zur 3) im Sinne behalte. Diese neue Zählung (1, 2) ist also nicht, wie die erste, voraussetzungslos, sondern, als neue, auf jene als voraufgehende *zurückbezüglich*.

In der Zahlgleichung $3 + 2 = 5$ sind es somit drei verschiedene Zählungen, die untereinander in eine noch näher zu untersuchende Beziehung treten:

1, 2, 3 | . . . . .
1, 2 | . . .
1, 2, 3, 4, 5 | . . .

Also ist es, um das Problem der Addition aufzulösen, vor allem nötig, sich klar darüber zu werden, inwiefern, und zwar in reiner Arithmetik, nicht etwa in Anwendung auf Dinge, von *verschiedenen Zählungen* mit Fug geredet werden kann, da doch an sich die Zählung als Verfahren einzig, die Reihe der ganzen Zahlen, 1, 2, 3 ... nur einmal vorhanden ist. Dies ist nun in der Tat und bleibt so lange logisch ungerechtfertigt, als man die Zahl 1, und so folgerecht 2, 3 und jede Zahl, als Absolute ansieht, also nicht zugeben will, daß Zahlsetzung in jedem Fall relative Setzung, Setzung von Relationen ist. Die Relationen s i n d unveränderlich; aber nicht Zahlen als absolute Dinge. Wir haben ursprünglich nicht eine absolute Erstsetzung, dann Folgesetzung, Folgesetzung dieser Folgesetzung usf., sondern die Setzung von Etwas überhaupt in Beziehung zu Etwas, dann die Wiederholbarkeit dieser relativen Setzung, und diese von Anfang an in der doppelten Weise, daß die vorherige Grundsetzung Gegensetzung (zu einer anderen Grundsetzung), und daß die Gegensetzung Grundsetzung (zu einer anderen Gegensetzung) wird. Hiermit ist sofort gegeben, daß jedes Glied der ursprünglichen Reihe

$$\cdots \frown | \frown | \frown | \frown | \frown | \frown \cdots$$

die Funktion der Null, der Eins, und so auch der Zwei, der Drei usf. übernehmen kann. Damit ist die Möglichkeit immer neuer Zählungen und immer neuer Relationen unter solchen begründet. Es gibt, mit anderen Worten, nicht einen absoluten Begriff, z. B. der Eins, der Zwei, sondern Eins ist von Anfang an Eins gegen Null, d. h. Erstgesetztes von einer bestimmten, in der ursprünglich indifferenten Reihe willkürlich wählbaren Ausgangsstelle der Zählung aus, als der gleichfalls nie absolut, sondern stets nur relativ zu verstehenden Null, der Null für d i e s e Z ä h l u n g.

Die gewöhnliche Erklärung der Null läßt diese auf wunderliche Weise entstehen aus der im Grunde widersinnigen Forderung, Gleiches von Gleichem abzuzählen. Abzählen läßt sich nur, was zuvor zugezählt war; durch Abzählen wiedererhalten kann man nur, was man vor der Zuzählung hatte; soll also durch Abzählung Null herauskommen, so muß von Anfang an zur Null zugezählt worden sein. So ist es nun in der Tat. Die Null zählt nicht, erst die Eins zählt; aber die Null bezeichnet den Punkt, von wo aus (mit 1, 2, 3 . . .) gezählt wird. In die Zahlreihe, die das Verfahren der Zählung allgemein ausdrücken soll, ist sie eben deshalb einzustellen, aber, ebenso wie die 1, die 2 usf., nicht in irgendeinem absoluten Sinne (des absoluten Nichts der Zahl nach), sondern von Anfang an in dem relativen der Ausgangsstelle der jedesmaligen Zählung, welche Ausgangsstelle nämlich wechseln, d. h. auf jede Stelle der ursprünglichen, indifferenten Reihe

$$\ldots \frown | \frown | \frown | \frown \ldots$$

ihre Funktion übertragen kann.

Unter diesen Voraussetzungen ergibt sich die folgende Erklärung der Addition. $+ 1$ heiße, nach auch sonst geltender Auffassung: „Eins zugezählt". Der Allgemeinausdruck dessen aber, wozu zugezählt wird, ist die Null; also würde der Ausdruck $+ 1$ vollständig lauten: $0 + 1$, d. h. „von Null aus Eins gezählt". Was heißt nun $1 + 1$? Der Analogie nach: von 1 aus 1 gezählt. Aber wie darf ich von 1, statt von 0 aus, 1 zählen? Darauf ist nun geantwortet: nicht in derselben, aber in einer neuen Zählung, in welcher die Eins der vorigen Zählung die Funktion der Null übernimmt; also:

$$\begin{array}{lllll} 0 & 1 & \ldots & & \\ & 0 & 1 & \ldots & \end{array}$$

Hiernach ergibt sich dieser Sinn der Summation $1 + 1 = 2$: Von 0 aus 1 gezählt, und von dieser 1, als 0 einer neuen Zählung, wiederum 1 gezählt, ist „gleich", d. h. gilt gleichviel wie von der ursprünglichen 0 aus 2 gezählt.

Wir sagten nun: gleichgesetzt werden können ursprünglich nur Verhältnisse; eine Zahlgleichung müsse in Wahrheit eine Proportion darstellen. Wo ist hier die Proportion? Welches ist das vierte Glied? Die Antwort kann nach der eben gegebenen Erklärung nur lauten: Dies vierte Glied ist die Null der ursprünglichen Zählung. Von der Eins einer ersten Zählung als neuer relativer Null aus, in einer neuen Zählung also, Eins gezählt, ist in bestimmtem Sinne dasselbe oder gilt gleichviel wie in der ersten Zählung von der Null dieser Zählung aus Zwei gezählt. Also

$$1 + 1 = 0 + 2.$$

In welchem Sinne aber ist es dasselbe oder gilt es gleichviel? Der ganze Sinn des auf beiden Seiten der Gleichung Gesetzten ist verschieden; es kann gar nicht der Schein entstehen, als sei in diesem Urteil das Prädikat im Subjekt eingeschlossen und nach dem Satze des Widerspruchs daraus hervorzuholen. Die erste Stelle nach der ersten, sofern nach dieser die Zählung neu, also mit Eins, einsetzt, ist nicht 2, sondern 1; aber ihr entspricht die 2 der ursprünglichen Zählung, und diese Entsprechung ist es, welche die Gleichung aussagt. Allemal wenn in einer ursprünglichen Zählung 1, 2 gezählt wird, läßt sich auch in zwei verschiedenen Zählungen (nämlich der ursprünglichen, die bei 1 abbricht, und einer neuen, in welcher die Funktion der Null auf das vorher als Eins gezählte Glied übertragen wird) Eins und wiederum Eins zählen, und umgekehrt. Diese zwei Zählungen sind jener einen (und umgekehrt) substituierbar, sie sind einander gleichwertig, äquivalent, nicht aber gleich, sofern darunter verstanden wird: identisch.

Es mag diese Erklärung auf den ersten Anblick weniger einfach erscheinen als die sonst gebräuchlichen; daß sie aber in der Tat die gesamte Auffassung der arithmetischen Prinzipien vereinfacht, wird sich zeigen. Voraus schon sieht man den Gewinn ab, daß jetzt die Gleichheit unterschiedslos in allen Anwendungen, von den einfachsten bis zu den kompliziertesten, dasselbe bedeuten wird, nämlich Substituierbarkeit, Äquivalenz auf Grund einer bestimmten Korrespondenz (Korrelativität), und nicht bald dies, bald etwas ganz anderes: Identität.

§ 9. (*Die Subtraktion.*) Wenn aber bei dieser Erklärung der Addition irgend noch als störend empfunden werden möchte, daß sie nicht einfach sei, so schwindet dies Bedenken ganz, wenn wir nun zur Subtraktion übergehen. Die Einfachheit einer Voraussetzung ist nicht danach zu bemessen, wie vieler Worte man bedarf, um sie selbst zumal dem, dessen ganzer Gedankenrichtung sie fern lag, verständlich zu machen, sondern die Einfachheit muß sich erweisen in der Ableitung der Konsequenzen. Die Einfachheit unserer Voraussetzung wäre unmittelbar zutage getreten, wenn wir statt von der Addition von der Subtraktion ausgegangen wären.

Wir erklärten die Addition als Ausdruck eines Verhältnisses, genauer des Verhältnisses zweier Verhältnisse, und zwar Stellverhältnisse: die erste Stelle der neuen Zählung, die nach der 1 einer ersten Zählung einsetzt (d. h. diese zur Null macht), entspricht der zweiten der ursprünglichen (von der ursprünglichen Null ausgehenden) Zählung. Man gewinnt nun leicht einen anderen Ausdruck derselben Entsprechung, wenn man bloß die Frage anders richtet. In der Addition war die Frage: Der ersten Stelle nach der ersten entspricht welche Stelle der ursprünglichen Zählung? Antwort: die zweite. Lautet dagegen die Frage: Die zweite Stelle ist, von der ersten aus gezählt, die wievielte? (worauf zu antworten: die erste), so erhält man, als nur anderen Ausdruck desselben Sachverhalts, die Subtraktionsgleichung $2 - 1 = 1$.

Schon so erscheint die Subtraktion mit der Addition mindestens gleich ursprünglich; es ist kein Grund, sie dieser, als die indirekte oder inverse Operation der direkten, entgegenzusetzen; sondern jeder der beiden Ausdrücke verhält sich zum anderen als inverser, oder beide sind gegeneinander reziprok. Sobald man aber die Proportion vollständig ausschreibt, ergibt sich die Subtraktion als der unmittelbarere und durchsichtigere Ausdruck des ihr und der Addition gleichermaßen zugrunde liegenden Sachverhalts:

2 ist, vom Ausgangspunkt 1 gerechnet, 1, d. h. 2 verhält sich zu 1, als neuem Ausgangspunkt, wie 1 zum ursprünglichen Ausgangspunkt, also zur 0 der ursprünglichen Zählung: $2 - 1 = 1 - 0$. Das aber ist der ganz direkte Ausdruck der Gleichheit des Stellverhältnisses: die 2 hat zur 1 die gleiche Stellung wie die 1 zur 0. So ist das Verhältnis irgendwelcher zwei Zahlen, nämlich der Stelle nach (wobei vorerst stets von der in der Reihe späteren Zahl ausgegangen werde), ausdrückbar durch das Verhältnis irgendeiner bestimmten Zahl zu Null, auf Grund der Gleichheit, d. h. Äquivalenz des Stellverhältnisses.

Diese Erklärung konnte von unseren Voraussetzungen aus natürlich auch unmittelbar, ohne den Umweg über die Addition aufgestellt werden. Doch hat der Umweg den Nutzen, es ungleich deutlicher zu machen, daß es sich notwendig um verschiedene Zählungen handelt. In der Tat, nur indem ich die Stellen z. B. nach der 3 bis zur 5 zähle, kann ich den Satz aussprechen: 5 hat zu 3 die gleiche Stellung wie 2 zu 0. Also um die Subtraktionsgleichung $5 - 3 = 2 - 0$ einzusehen, muß ich eben das Verhältnis, welches die Additionsgleichung $3 + 2 = 0 + 5$ ausspricht, mir zum Bewußtsein bringen. Es bleibt also dabei, daß beide Gleichungen denselben zugrunde liegenden Sachverhalt aussprechen, also logisch reziprok sind. Aber sofern dieser zugrunde liegende Sachverhalt, nämlich das Stellverhältnis, sich direkt in der Subtraktion ausspricht (das Minuszeichen kann geradezu als Ausdruck des Stellverhältnisses gedeutet werden), ist die Subtraktion der direkte, die Addition der inverse Ausdruck des zugrunde liegenden Sachverhalts. Für die Übertragung aus der einen Ausdrucksform in die andere gilt die Regel: daß der Stellproportion die Additionsgleichung aus den Summen der äußeren und inneren Glieder entspricht und umgekehrt; z. B. der Subtraktionsgleichung $5 - 3 = 2 - 0$ entspricht die Additionsgleichung $3 + 2 = 0 + 5$.

Diese Erklärung der Subtraktion ist nun nicht bloß in sich äußerst einfach, da mit der Reihenfolge der Zahlen die Stellverhältnisse unter diesen, welche die Subtraktion unmittelbar begründen, ohne weiteres gegeben sind, sondern namentlich bietet sie die denkbar einfachste Lösung von Problemen, welche den Arithmetikern eine schier unglaubliche Mühe gekostet haben: den Problemen der Null und der negativen Zahl. Das hat uns als Schuljungen schon gequält, daß man in der Arithmetik nicht bloß, was schon schwer genug fällt, mit dem Nichts, sondern mit dem Weniger-als-nichts arbeiten und es in seinen Kopf bringen soll; daß es möglich sein soll, nicht bloß gleichviel von gleichviel, sondern mehr von weniger „abzuziehen". Hier versagt sofort jede Auffassung, die irgend noch Zahlen wie Dinge behandelt. Aber auch als inverse Operation zu der des Zusammentuns läßt sich die Subtraktion hier nicht mehr verstehen. Dagegen wenn es sich um eine Verhältnisgleichung handelt, so ist nichts einfacher, als daß ein Verhältnis als solches im Ausdruck umkehrbar ist. Keinem Schuljungen macht das Schwierigkeit, daß mit einem Mehr zugleich ein Weniger, mit dem So-viel-mehr das So-viel-weniger gegeben ist. Dem entspricht in unserer Deutung die doppelseitige Auffaßbarkeit des Stellverhältnisses. Ist die Stellung von 2 gegen 1 bestimmt, so ist es damit auch die Stellung von 1 gegen 2; ist jene auszudrücken durch die Stellung von 1 gegen 0, so diese folgerecht durch die von 0 gegen 1; diese beiden Ausdrücke sind zueinander einfach reziprok; wenn immer der eine, ist auch der andere möglich und begründet. In unserer Symbolik drückt sich dies einfach aus durch die Umkehrung der Proportion:

$$2 - 1 = 1 - 0,$$
$$0 - 1 = 1 - 2;$$

d. h. also nicht: 2 weniger als 1 ist 1 weniger als **keins**, sondern: 1 hat zu 2 dasselbe Stellverhältnis wie 0 zu 1.

Es ist dies sogar der denkbar direkteste Ausdruck dafür, daß man von 1 auf 2 in derselben Weise gelangt wie von 0 auf 1.

Hierdurch ist ohne weiteres auch die Bedeutung der Addition und Subtraktion für die Anzahl: eben der Begriff von 1 mehr, 1 weniger gegeben. Unsere Gleichungen können ebensowohl gelesen werden: 2 ist, gegen 1, 1 mehr, wie nach der Ordnungsfunktion der Zahl: eine Stelle weiter; 1 ist, gegen 2, 1 weniger, wie nach der Ordnungsfunktion: eine Stelle zurück. $1 - 0$ („wie sich der Stelle nach 1 zu 0 verhält"), heißt nach der Anzahl: eins mehr; $0 - 1$ (wie sich 0 zu 1 verhält): eins weniger. Man braucht dann nur noch durch Definition zu setzen: $1 - 0 = +1$ (was der oben gegebenen Erklärung des $+$ entspricht), $0 - 1 = -1$ (indem der ursprüngliche Ausgang der Zählung, sofern nichts anderes bestimmt ist, vorausgesetzt bleibt, also nicht hingeschrieben zu werden braucht, analog der Weglassung der 1 als Faktors), so hat man ohne weiteres die Begriffe der positiven und negativen Zahlen, im Unterschied von den absoluten, d. h. außer bestimmter Vergleichung (dem Stellverhältnis nach) gedachten. Der Unterschied liegt, wie man sieht, darin, daß bei den absoluten Zahlen oder „numerischen Werten" überhaupt nur an eine Zählung gedacht, bei den relativen verschiedene (dem Ausgangspunkt nach verschiedene) Zählungen in Betracht gezogen werden. Da aber die Zahlreihe Allgemeinausdruck des Zählverfahrens sein soll, so ist es gerechtfertigt, die Zulässigkeit relativer Zählungen in ihr von Anfang an mit zum Ausdruck zu bringen; dann treten an die Stelle der absoluten die positiven Zahlen, und die Null und die negativen Zahlen sind hinzuzufügen, so daß die Minusreihe über die Null hinaus in der von irgendeiner positiven Zahl zur Null beschriebenen Richtung weitergeht, wie es in der Arithmetik dargestellt zu werden pflegt. Die Null bildet den gemeinsamen Ausgangspunkt der Plus- und Minusreihe, weil sie die gemeinschaftliche Vergleichsgrundlage des Mehr und Weniger, d. h. weil sie stets den einen Terminus des Stellverhältnisses bildet. Zugleich dient die Null zum Ausdruck der Gleichheit, des Weder-mehr-noch-weniger: $1 - 1 = 0$, d. h. 1 ist gegen 1 weder mehr noch weniger. Das Verhältnis irgendeiner Zahl n zu 0 wie das der 0 zu irgendeiner Zahl n hat, wenn n sich der 0 unbegrenzt nähert, gleicherweise zur Grenze das Verhältnis 0 zu 0 oder ± 0.

§ 10. (*Kritische Anmerkung.*) Einige kritische Bemerkungen über sonstige Ableitungen der Addition und Subtraktion scheinen nicht überflüssig zu sein. Den vollen Gegensatz zu unserer Ableitung zeigt wiederum die (ältere) Arithmetik von Stolz [*167*]. Da wird durch ausdrücklich willkürliche Festsetzung dekretiert: Für den Fall, daß $a < b$ in der Subtraktion, soll ein und nur ein Ding (dafür hernach: Größe) existieren, das mit $(a - b)$ bezeichnet wird und der Gleichung genügt $(a - b) + b = a$. Das heißt, wenn ich recht verstehe: für den Fall, daß es keine Lösung der Aufgabe, b von a abzuziehen, gibt, setze man, es gäbe doch eine, und bezeichne das diese Lösung darstellende Ding, das es nicht gibt, mit dem genannten Ausdruck. „So wie das System der rationalen Zahlen hier abgeleitet ist," hieß es in jenem Buche, „besteht es aus zwei verschiedenartigen Teilen, der eine (die natürlichen Zahlen) hat eine reale Bedeutung, der andere existiert nur auf dem Papier." Von der Bruchzahl hieß es geradezu — dasselbe würde aber nach dem Gesagten von der negativen Zahl gelten —: sie ist nichts als dieses Zeichen. Diese Ungleichheit lasse sich indessen leicht heben; nämlich wie? indem man — auch die natürlichen Zahlen nur als ein System gesetzmäßig gebildeter Zeichen ansieht! Das heißt dann „Erweiterung des Zahlbegriffs". Man kann ebenso gut den Begriff des Messers erweitern auf Gegenstände ohne Heft und Klinge.

Worin liegt der ursprüngliche Fehler? Darin, daß man verlangt, Zahlen sollten Begriffe oder vielmehr Abbilder von Dingen, von existierenden Gegenständen sein; das versteht man unter: „reale Bedeutung haben"; statt daß es sich um reine Funktionsbegriffe handelt. Finden sich dann sogenannte Zahlen, welche jene Forderung offenbar nicht erfüllen (während es vielleicht ganz richtig gebildete Funktionsbegriffe sind), so erklärt man sie für etwas, was bloß auf dem Papier existiere.

Zwar trat neben diese „analytische" Ableitung (die vielmehr nominalistisch heißen sollte) noch eine zweite, „synthetische", die offenbar realistischer sein wollte. „Manchmal (!) lassen sich aus den natürlichen Zahlen von einer Benennung durch Hinzufügung einer weiteren Bestimmung zwei Reihen von benannten Zahlen ableiten, entspringend aus zwei Einheiten, welchen selbst, sowie je zwei Zahlen der beiden Reihen vom nämlichen numerischen Wert, die Eigenschaft beigelegt wird, daß sie bei ihrer Vereinigung einander vernichten." Solche Zahlen heißen entgegengesetzte Zahlen. Beispiele eines solchen Gegensatzes bieten dar: Vermögen und Schulden, die geradlinigen Wege vor- und rückwärts usw. Man nennt die beiden entgegengesetzten Einheiten 1 und 1′, setzt durch Definition (dies ganz willkürlich!) die eine > 0, die andere < 0, so sind es dann die positiven und negativen Zahlen. Also man beobachtet an Dingen die Eigentümlichkeit, daß sie einander entgegengesetzt sein, d. h. „in der Vereinigung einander vernichten" können (schon bei Dingen eine schwierige Sache), und überträgt diese vermeinte Eigenschaft von Dingen auf Zahlen, ohne irgendwelche Rechenschaft davon zu geben, wie aus der Natur der Zahl eine solche Eigenschaft etwa folge; wie zwei Zahlen es anfangen sollen, erstens sich, nachdem sie getrennt waren, zu vereinigen, zweitens in dieser Vereinigung und kraft ihrer einander zu vernichten. Rein formalistisch übrigens, ohne jeden Versuch einer Begründung, wird hierbei das Verhältnis zur

Null eingeführt. Es ist schwer zu verstehen, wie bei einer solchen Erklärung sonst logisch interessierte Mathematiker sich auch nur vorübergehend [1]) haben beruhigen können.

Hingegen protestiert z. B. schon Durège [42] nachdrücklich dagegen, daß man die Existenz und die Bedeutung der negativen Größen etwa in einem Gegensatz wie zwischen rechts und links, vorwärts und rückwärts, Bejahung und Verneinung, Vermögen und Schulden, oder überhaupt in irgendeiner ihrer mannigfachen Anwendungen begründet sein lasse, und nicht lediglich in der Definition, durch die sie eingeführt werden. Allein für diese Definition genügt ihm als Begründung die einfache Forderung, daß den arithmetischen Grundoperationen allgemeine Anwendbarkeit zukomme; das von Hankel aufgestellte, neuerdings von den Arithmetikern mit Recht skeptisch angesehene Prinzip der „Permanenz der formalen Gesetze". Hankel selbst, ein feinsinniger, philosophisch und historisch gebildeter Mathematiker, betont wenigstens [65], daß doch eine Zahl heute nicht mehr, wie für die Pythagoreer, ein Ding, eine Substanz bedeute; die Frage nach der Existenz der Zahl könne nur auf das „denkende Subjekt" oder das „gedachte Objekt" (das Objekt als gedachtes!) bezogen werden. Er bringt in Erinnerung, daß nach Gauß die „Vernichtung in der Vereinigung", durch die allerdings auch er den Gegensatz des Plus und Minus erklärt, doch nicht Substanzen, sondern nur Relationen zwischen zwei Gegenständen betreffen sollte. Aber freilich Relationen von Gegenständen. Und Hankel selbst weiß sich schließlich nur zu helfen durch die Unterscheidung zwischen „formalen" (d. h. durch

1) S. Stolz und Gmeiner, Theoretische Arithmetik, 1892, z. B. S. 51. Durchweg ist diese jüngere Darstellung den neueren Anschauungen angepaßt. Es wurde dennoch auf das ältere Buch Bezug genommen, weil es typisch ist für eine Ansicht, die lange Zeit fast die allgemein herrschende war und auch heute wohl noch hier und da begegnet.

Willkürdefinition gesetzten) und „aktuellen“ Zahlen, welche letzteren in „wirklichen Größen“ (z. B. räumlichen) ihre Repräsentation finden; die Grenze zwischen beiden sei übrigens fließend. Solange es hierbei bleibt, wird man der Berufung auf Beispiele, wie rechts und links usw., offenbar nicht entgehen. Das einzig Förderliche liegt hier darin, daß doch wenigstens auf die Relation zurückgegangen wird. An dieser war der Gegensatz leicht aufzuzeigen; aber nicht als „Vernichtung in der Vereinigung“, sondern als das einfache und klare Verhältnis der Reziprozität.

Lipps [*105, 106*] kennt die Reziprozität des Verhältnisses, aber benutzt sie nicht zur Aufstellung der Subtraktion sogleich in voller Allgemeinheit. Er rügt, daß man zur Begründung des kommutativen und assoziativen Gesetzes der Addition nicht die homogene Beschaffenheit der Zahlreihe ausdrücklich herangezogen und zur Grundlage der Beweisführung gemacht habe. Dieser Vorwurf scheint mir namentlich Dedekind gegenüber nicht begründet, der die Homogeneïtät nicht bloß „unausgesprochen“ zugrunde legt, sondern die Zahlreihe von Anfang an durch die immer gleiche Beziehung von Glied zu Glied in der Kette begründet und die Einzelglieder ausschließlich durch ihre Stelle in der Kette bestimmt, diese also von Anfang an als homogen vorausgesetzt hat.

Ausdrücklich auf die reine Verhältnisbetrachtung gründet dagegen die Addition wie die Subtraktion Simon [*161*], von dem ich die entscheidende Anregung zu meiner Auffassung empfangen zu haben mit Dank bekenne. Als Didaktiker und Methodiker des Mathematikunterrichts ist Simon davon durchdrungen, daß der mathematische Unterricht die eigentliche Denkschule sein müsse, und empfindet aus diesem pädagogischen Motiv stärker als die große Mehrheit der Mathematiker das Bedürfnis einer „erkenntniskritischen“ Grundlage. Die reine Arithmetik ist ihm, wie Frege, nicht nur eine, sondern geradezu die reine Vernunftwissenschaft. Einheit und Vielheit, sagt er, sind „subjektive“ Begriffe, sie liegen nicht in den Dingen, sondern „in uns“. — Dieser Ausdruck ist vielleicht nur etwas zu sehr philosophisch. Aber es ist das Richtige gemeint: daß die mathematischen Begriffe Funktionsbegriffe, nicht Dingbegriffe sind. In der Begründung der Rechnungsarten nun geht Simon durchweg aus vom Gesichtspunkt der Vergleichung. Aus ihr entspringen die ersten allgemeinen Zahlbegriffe: mehr, gleichviel, weniger; diese zu präzisieren dient die Subtraktion, die also ebenso ursprünglich (er hätte sagen dürfen: ursprünglicher) ist wie die Addition. Nur sekundär kann die Vergleichung auch dargestellt werden als Trennung und als Verminderung; aber nicht nur bleibt die Vergleichung die Grundoperation, sondern der Gesichtspunkt der Trennung versagt schon bei der Subtraktion $a - a$, die Verminderung (die hier zur Not noch standhält) scheitert an der Subtraktion $a - b$ für den Fall, daß $b > a$. Unter dem Gesichtspunkt der Vergleichung dagegen ergibt sich unmittelbar: $8 - 5 = 3$ in der Bedeutung: 8 ist 3 mehr als 5; $5 - 8 = - 3$: 5 ist 3 weniger als 8; beides ist miteinander gesetzt, denn die Relationen des Mehr und Weniger sind zueinander reziprok. Also bedeuten die positiven und negativen Zahlen einfach die „Abstufungen der Beziehungsbegriffe mehr und weniger“. Erst davon abgeleitet ist die Bedeutung der positiven und negativen als unter sich entgegengesetzter Zahlen. In voller Klarheit sagt Simon: die negativen Zahlen entspringen aus der Vergleichung, sind also Zahlen; ihr ursprünglicher Gegensatz (d. h. das Gegenseitigkeitsverhältnis der Begriffe mehr und weniger) hat den Gegensatz der Operationen erst zur Folge.

Das sind die wesentlichen Grundlagen der oben gegebenen Erklärung, welche denselben Grundgedanken nur mehr zu entwickeln bemüht war. Es bedurfte besonders noch der Erklärung, wie man zu den „Abstufungen“ des Mehr und

Weniger gelangt. Das kommt zur vollen Klarheit erst durch die Einführung des Begriffs verschiedener Zählungen oder den Begriff der „relativen" Zählung, d. h. einer solchen, die eine andere sich voraussetzt, im Unterschied von der absoluten, d. h. keine andere voraussetzenden. Dies führt dann weiter zur Einführung der Null in unserem Sinne, und schließlich zum Ausgang von der reinen, von Anfang an zweiseitigen Relation überhaupt.

Auch nach Russells und Couturats Erklärung sind die positiven und negativen Zahlen (ebenso die Brüche) nicht sowohl Zahlen als vielmehr Operationen „oder besser Beziehungen" zwischen den ganzen absoluten Zahlen, keineswegs mit diesen zu identifizieren. — Hieran ist nur mangelhaft, daß nicht erkannt ist, daß Zahlbegriffe überhaupt Beziehungsbegriffe, „absolute" Zahlen nicht außer und vor aller Beziehung gegebene, sondern nur auf eine einzige, fest gedachte Bezugsgrundlage zurückbezogene sind. Sie stellen die Zahl in der Unbeweglichkeit des reinen Funktionsgesetzes, die relativen Zahlen in der ganzen Beweglichkeit der Funktion selbst dar; ganz wie Plato in der späteren, tieferen Entwicklung seiner Lehre die Idee in starrer Ruhe und in ihrer Selbstbewegung unterscheidet.

§ 11. (*Multiplikation.*) Mit der gewöhnlichen Erklärung der Multiplikation verhält es sich ähnlich wie mit der der Addition: sie lautet einfach, enthüllt aber bei näherer Prüfung kaum überwindliche Schwierigkeiten, die sich anfangs nur versteckten, weil man mit Zahlen wie mit Dingen umgehen zu können meinte.

Multiplikation, so sagen die Arithmetiker fast ausnahmslos, ist nur Summierung gleicher Summen, also nur eine verkürzte Form der Addition, für den besonderen Fall, daß die Summanden gleich sind.

An dieser Erklärung ist nicht bloß das auszusetzen, daß sie sogleich auf die Eins als Multiplikanden nicht zutrifft, denn Eins ist keine Summe; sondern wenn man auch den Weg fände, sie auf diesen Fall künstlich auszudehnen, jedenfalls rückt sie die Hauptsache aus den Augen: daß die Zahl hier, gegenüber der Addition und Subtraktion, in einer neuen Funktion auftritt, also, da die ursprüngliche Funktion der Zählung ohne Zweifel auch darin liegt, gleichzeitig in zwei verschiedenen Funktionen. Summen werden summiert, d. h. Zählungen werden gezählt. Bisher aber wußten wir nur, daß die Zahl zählt, nicht daß sie gezählt wird. Wir hatten es nur mit verschiedenen Zählungen, d. h. Weisen des Zählens zu tun; was gezählt wird, danach zu fragen war bis dahin überhaupt keine Veranlassung. Soll die Frage nachträglich beantwortet werden, so läßt sich nur sagen: Einheiten werden gezählt. Denn eine Vielheit entsteht durch wiederholte Setzung der Einheit, und das Wieviel dieser Einheiten bestimmen heißt Zählen. Kann man überhaupt etwas anderes zählen als Einheiten?

Nein: also, wenn man statt Einheiten, nämlich der ursprünglichen Einheiten, Vielheiten dieser ursprünglichen Einheiten zählt, so setzt man damit diese Vielheiten als neue Einheiten. Damit relativiert sich der Sinn der zu zählenden Einheit selbst, so wie bei der Addition und Subtraktion die Null sich relativierte. Diese Relativierung der zu zählenden Einheit ist die Grundlage der Multiplikation und Division.

Schon Aristoteles unterscheidet die zählende und die gezählte Zahl. Die Zahl als Zähler ist es, mit der wir im Stellverhältnis, daher in der Addition und Subtraktion, allein zu tun hatten. Sie tritt in ihrer Eigenheit besonders deutlich hervor in der Funktion der Ordnungszahl; obgleich es nicht richtig wäre, die Addition und Subtraktion ausschließlich auf die Ordnungsbedeutung der Zahl zu gründen; $+1$, -1 bedeutet, wie wir gesehen haben, ebensogut nach der Anzahl eins mehr, eins weniger, wie nach der Ordnungszahl eine Stelle weiter, eine Stelle zurück. Aber man zählt eben mit 1, 2 . . ., welche zunächst der Stelle nach, als voraufgehend und nachfolgend, sich unterscheiden, und erst dann auch die Vielheiten 1, 2, 3 . . . zu bezeichnen dienen. Aber eben Vielheiten von Einheiten, im Sinne der Einer; diese sind hier das Gezählte. Man sollte im Ausdruck bestimmt unterscheiden: die Eins als zählend, den Einer als das, was gezählt wird. Dies letztere ist zunächst und unmittelbar die Anzahl Eins, und nur sofern auch die Anzahlen sich selbst wiederum ordnen (nämlich in der Erzeugung der Vielheiten der Einer dem Zweier, dieser dem Dreier usf., als Teil dem Ganzen, vorhergeht), also die Ordnungszahlen sich den Anzahlen eindeutig zuordnen, dient der Ausdruck der Vielheiten 1, 2, . . . zugleich für die Ordnungszahlen.

Wie nun aber die Null, die Eins, und so jede Zahl im Stellverhältnis sich relativierte, d. h. in verschiedenen, aber aufeinander bezogenen Zählungen dasselbe bald als Stelle Null, bald als Stelle Eins, Zwei usf. fungierte, so relativiert sich ebenfalls die Einheit in der anderen Bedeutung, der des Gezählten, indem irgendeine Vielheit aus den ursprünglichen Einheiten wieder die Funktion jener Einheit übernimmt, aus der andere Vielheiten sich bilden lassen; damit ist dann die Möglichkeit der „Vervielfältigung" (Multiplikation) gegeben.

Zunächst, wie im Stellverhältnis jede Stelle (1, 2, . . .) auszudrücken war durch ihr Verhältnis zur Ausgangsstelle Null, so ist in dem neuen Verhältnis, das wir jetzt zu betrachten haben, eine jede Vielheit auszudrücken im Verhältnis zu der Einheit, deren Vielheit sie ist:

$$1 = 1 \cdot 1 \text{ (1 Einer)},$$
$$2 = 2 \cdot 1 \text{ (2 Einer) usf.}$$

Und wie nach dem Stellverhältnis eine Gleichung von Verhältnissen (Stellproportion) sich ergab durch Vergleichung verschiedener, nämlich dem Ausgangspunkt nach verschiedener Zählungen, indem eine von 0 verschiedene Stelle einer ersten Zählung in einer neuen zur 0 gemacht und von ihr aus mit 1, 2, . . . gezählt, dann diese neue Zählung, unter Festhaltung und auf Grund ihrer Beziehung zur ursprünglichen, mit dieser verglichen wurde, so entsteht eine neue Gleichung von Verhältnissen (also Proportion) in jener anderen, noch unbenannten Funktion der Zahl durch Vergleichung verschiedener, nämlich der Einheit nach verschiedener Zählungen, indem eine von 1 verschiedene Zahl (d. h. Vielheit) der ersten Zählung, z. B. 2, in einer neuen Zählung als Einheit genommen und mit ihr weiter gezählt wird: ein Zweier, zwei Zweier usf., und dann solche verschiedene Zählungen, auf Grund der Beziehung, gemäß welcher jede folgende aus der vorigen abgeleitet (d. h. von ihr aus bestimmt) wurde, miteinander verglichen werden, z. B. 2 Einer sind 1 Zweier, 4 Einer sind 2 Zweier, d. h. den Vielheiten 2, 4, 6 . . . der Zählung mit der ursprünglichen Einheit entsprechen die Vielheiten 1, 2, 3 . . . der neuen Zählung, die mit der Zweiheit der ersten Zählung als neuer, abgeleiteter Einheit vollführt wird. Als neuer Einheit, denn anders als mit einer Einheit läßt sich nicht zählen; aber als Einheit fungiert jetzt die Zweiheit der ursprünglichen Zählung, genauer: die Einheit der neuen Zählung entspricht der Zweiheit der ursprünglichen.

Auch hier ist, wie bei der Addition, der Begriff einer neuen Zählung, also überhaupt verschiedener (hier: der Einheit nach verschiedener) Zählungen nicht zu entbehren. Es ist nicht anders als in verschiedenen Zählungen möglich, daß etwas „Ein Zweier", also zugleich Eins und Zwei sei. Die Zwei einer Zählung zur Eins machen kann man nicht, indem man in dieser selben Zählung verbleibt, sondern nur indem man eine neue Zählung aufstellt, die der ersten so entspricht, daß ihre Einheit der Zweiheit der ursprünglichen Zählung korrespondiert; in symbolischer Darstellung:

‖ ‖ ‖ . . .

| | | . . .

Wir nennen diese neue Funktion der Zahl die **metrische**, weil die Einheit die ihr entsprechenden Vielheiten mißt. Zwei sind zwei Einer, d. h. 2 gemessen durch 1, oder es sind 2, wenn das Maß 1 ist. Dieser Begriff des Maßes schließt nichts von Raum- oder Zeitbeziehung ein (während die Bezeichnung: geometrisches Verhältnis, geometrische Proportion, unnötiger und ungehöriger Weise Raumverhältnisse herbeizieht). Auch eine Strecke oder sonst ein räumliches oder auch zeitliches Gebilde ist Maß nur, sofern es zählt, d. h. als Einheit zu jeder Vielheit diese selbst mißt, und nicht, sofern es räumlich oder zeitlich ist.

Soll es aber ein Verhältnis (eben das metrische) sein, welches die Multiplikation ausdrückt, so muß die Multiplikationsgleichung eine versteckte Proportion sein, deren viertes Glied denn auch nicht schwer zu finden ist. Liest man $2 \cdot 3 = 6$: „2 Dreier sind 6“, so fragt sich natürlich: was denn? und die Antwort lautet dann notwendig: 6 Einer. Umständlicher: mit der 3, als abgeleiteter Einheit, 2 gezählt, ist dasselbe, wie mit der ursprünglichen Einheit 6 gezählt. Es ist dasselbe, d. h. keineswegs, es sei logisch damit identisch, sondern es sind gleichwertige, sich entsprechende, durcheinander ersetzbare Zählungsweisen; allemal wo die eine Art der Zählung möglich ist, ist es auch die andere.

Ich habe bei der Addition unterlassen, die besonderen Gesetze, welche die Arithmetik für diese Operationen aufstellt: das kommutative, assoziative und distributive Gesetz ausdrücklich abzuleiten, weil die Ableitung keine besonderen Schwierigkeiten bietet; hier bei der Multiplikation mag es dagegen am Platze sein, wenigstens das kommutative Gesetz, dessen Begründung den Arithmetikern oft unnötige Mühe gemacht hat, in aller Kürze abzuleiten. Völlig unbrauchbar ist für uns irgendeine Ableitung, die, statt in den Begriffen der Arithmetik zu verbleiben, auf räumliche Anschauung zurückgreift. Setzt man zwei Reihen von je drei Punkten untereinander

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

so sieht man freilich auf einen Blick, daß man hier ebensowohl, wenn man die horizontale Folge ins Auge faßt, drei Reihen von je zwei, wie, wenn die vertikale, zwei Reihen von je drei Gliedern, und dabei doch beide Male dieselben Punkte hat. So mag der Satz $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$ manchem wohl gar als identischer erscheinen. Aber das ist eine handgreifliche *petitio principii*, daß man nach Belieben den Multiplikator zum Multiplikanden machen dürfe und umgekehrt; gerade dafür wird vielmehr der Beweis verlangt. Woher überhaupt die zweidimensionale Betrachtung, da man doch immer gesagt hat, daß die Zahlreihe nur eine Dimension habe? Stellt man die 6 Punkte vielmehr, wie es sich gebührt, in eine Reihe, so schwindet jeder Schein der Identität; man hat zwar noch dieselben 6 Punkte, aber es kann auch nicht einmal so scheinen, als ob mit der Auffassung derselben als $3 \cdot 2$ die andere Auffassung als $2 \cdot 3$ von selbst gegeben sei.

In den zwei Dimensionen bergen sich die zwei grundverschiedenen Funktionen der Zahl als zählende und als gezählte. Diese sind an sich schlechthin unvertauschbar; nicht sie werden vertauscht, wenn ich aus $2 \cdot 3$ $3 \cdot 2$ mache, oder, um den einfachsten Fall zu wählen, 2 Einer als 1 Zweier auffasse. Sondern die Glieder werden vertauscht. Das also steht zu beweisen, daß die Glieder gegeneinander ausgetauscht, das Gezählte zum Zählenden, das Zählende zum Gezählten gemacht werden darf.

Dies ist nun schon bewiesen für den Fall, daß der eine der beiden Faktoren 1 ist. Denn wir fanden als Grundlage der Multiplikation überhaupt: zwei Einer einer Zählung können in einer neuen Zählung als neue Einheit (nämlich als ein Zweier) gesetzt werden. Sie können so gesetzt werden, weil sie in der Tat auch wiederum Eines sind; wir dürfen in Zurückbeziehung auf das vorige Kapitel einfach sagen: zufolge der dritten Stufe des quantitativen Verfahrens, die eben darin besteht, die vielen Einheiten als eine Vielheit zu setzen. Auf dieser gegebenen Grundlage läßt sich nun leicht das kommutative Gesetz in voller Allgemeinheit beweisen. Nämlich es können die einander entsprechenden Einheiten der a Vielheiten b zu Vielheiten a verbunden werden: die ersten Glieder der a Vielheiten b sind a Glieder, die zweiten sind a, und so fort bis zu den letzten, d. h. $b$ten Gliedern, denn b Einheiten hat jede Vielheit b; also erhält man b Vielheiten a. Dazu ist kein Untereinanderschreiben, keine räumliche Anordnung irgendeiner Art erforderlich. Man kann ebensogut an zwei Takten von je drei Zeiteinheiten sich klar machen, daß in jedem Takt ein erster, ein zweiter, ein dritter Taktteil ist, also zwei erste, zwei zweite, zwei dritte, mithin dreimal zwei. Aber die Zeitanschauung ist als solche für den Beweis ebenso gleichgültig wie die Raumanschauung.

§ 12. (*Division.*) Wie der Gewinn unserer Erklärung der Addition sich bei der der Subtraktion zeigte, so zeigt sich der Gewinn unserer Erklärung der Multiplikation, indem wir das gleiche Erklärungsprinzip auf die Division übertragen. Die gewöhnliche Begründung der Division durch die Teilung als Umkehrung der Vervielfältigung führt zu einem reinen Ergebnis einzig für den Fall, daß der Dividend ein ganzes Vielfaches des Divisors ist. Aber auch wenn man sich gestattet, wie in einem ungenauen Haushalt Reste stehen zu lassen, so bleibt wenigstens gefordert, daß der Dividend größer als der Divisor sei. Eine Teilung des Weniger durch Mehr hat keinen Sinn, da das Mehrere im Minderen nicht einmal, geschweige mehrmals, sondern gar nicht enthalten ist und, was nicht darin ist, auch nicht herausgeholt werden kann. So reicht diese Erklärungsart nur für eine äußerst enge Auffassung der Division zu, und man braucht dann erst künstliche Hilfen, um die zu enge Auffassung hinterher so zu erweitern, wie es die Bewegungsfreiheit der Rechnung gebieterisch fordert.

Statt dessen gestattet unsere Auffassung der Multiplikation ohne weiteres aufzustellen: da jede Vielheit einer gegebenen Einheit auch wieder als Einheit zu einer neuen Vielheit verstanden werden kann, also der Begriff der zählbaren Einheit gleichgültig dagegen ist, ob die Einheit als ursprüngliche oder aus anderen Einheiten abgeleitete angesehen wird, so kann „die“ Einheit sofort als aus irgendwelchen, beliebig vielen Einheiten durch Multiplikation gebildet, also nach gewöhnlicher Bezeichnung beliebig teilbar angesehen werden. Dasselbe gilt dann folgeweise für jede aus der gedachten Einheit dargestellte Vielheit.

D. h., die Division ist gegeben mit eben jenem Verhältnis von Vielheit und Einheit, welches nur in anderer Wendung die Multiplikation zum Ausdruck brachte. Und zwar zeigt sich sofort die Division als der direktere Ausdruck dieses Verhältnisses. $2 \cdot 3 = 6 \cdot 1$ heißt: mit der 3 als neuer Einheit 2 gezählt, gilt gleichviel, wie mit der ursprünglichen Einheit 6 gezählt. Damit ist aber schon gesagt: 6 ist zur 3 (als relativer Einheit), was 2 zur ursprünglichen Einheit (nämlich das Doppelte); und eben dies spricht sich direkt aus in der Proportion (die in der Multiplikation also schlummerte) $6 : 3 = 2 : 1$. Nun gestattet jedes Verhältnis als solches eine Umkehrung; es gilt also ohne weiteres auch die Proportion $1 : 2 = 3 : 6$, womit die Division auch des Weniger durch Mehr, oder der B r u c h in voller Allgemeinheit gegeben ist.

Also nicht: 3 verändert durch 2 wird 6, und 6 umgekehrt verändert durch 2 wird wieder 3. Das ließe sich ohne geometrische oder sonstige existentielle Voraussetzungen überhaupt nicht verständlich machen, da Zahlen keine Veränderung vertragen, sondern als solche nur sind. Sondern 6 hat zu 3 die unveränderliche Relation, welche ausdrückbar ist durch die allgemeine Relation 2 : 1; ja man kann sagen 6 ist 2, wenn nämlich als (neue, relative) Einheit 3 angenommen ist; sowie in der Addition 5 2 ist, sofern von 3 als (neuer, relativer) 0 aus gezählt wird. Und so die Division: 3 hat zu 6, indem beide immer und ewig, unveränderlich sind, auch immer und ewig dasselbe seiende Verhältnis, nämlich das von 1 zu 2; was natürlich nur zutrifft, wenn man die 2 als neue Einheit versteht; denn ursprünglich gibt es ein metrisches Verhältnis nur zur Einheit, wie ein Stellverhältnis nur zur Null. Aber nachdem der Begriff der Einheit, ebenso wie vorher der der Null, sich relativiert hat, indem jede Vielheit wieder als Einheit verstanden werden, also umgekehrt die Einheit jede Vielheit vertreten kann, so läßt sich in dem Verhältnis 1 : 2 die 2 als neue Einheit verstehen, im Verhältnis zu welcher dann die 1 einen unterscheidenden Ausdruck braucht, in diesem Fall $^1/_2$. Die Einführung der Bruchzahl bietet jetzt nicht die geringste Schwierigkeit mehr und behält nicht den mindesten Schein eines bloßen Kunstgriffs zur Erweiterung des Bereiches der Rechnungsoperationen. Ein Halbes ist ein genau so rechtmäßiger arithmetischer Begriff wie ein Doppeltes; beide beruhen genau auf derselben Grundlage: daß 2 Einer 1 Zweier, also 2 wiederum bezüglich 1, 1 bezüglich 2 ist, nicht in derselben, aber in einer neuen Zählung, die indessen zur vorigen in einer genau bestimmten Beziehung steht.

Wie im Stellverhältnis die Auffassung als Verbindung und Trennung oder Vermehrung und Verminderung sich leicht auf die reine Verhältnisbetrachtung zurückführt, so im metrischen Verhältnis die Auffassung als Vervielfältigung und Teilung. Dagegen ist das Umgekehrte nicht möglich, so daß man dann genötigt wird, den Begriff des Verhältnisses hinterher doch zu Hilfe zu nehmen. Dabei wird dann wohl ausdrücklich davor gewarnt, daß man nur ja nicht das Verhältnis mit dem Bruch verwechsle. Als ob es Sinn hätte, 6 in 2 Dreier zu teilen, wenn nicht 6 2 Dreier wären, d. h. 2 wären zur Einheit 3, oder zu 3 sich verhielten wie 2 zu 1. Mit dem Verhältnis 3 : 1 aber hat man ohne weiteres auch das Verhältnis 1 : 3, und dieses ist gleichbedeutend mit dem Bruch $^1/_3$; denn wie 3 : 1 das Verhältnis des Dreifachen zum Einfachen, so bedeutet 1 : 3 das Verhältnis des Einfachen zum Dreifachen, d. h. des Drittels zum Ganzen, da ja ein Dreifaches auch wieder Eines, dessen Einfaches also das Drittel dieser neuen, relativen Eins ist. Es ist dann ebenso leicht, zu den Verhältnissen 3 : 2, 2 : 3 zu gelangen, und so allgemein zum Verhältnis jeder rechtmäßig gesetzten Zahl zu jeder anderen. Auch daß Verhältnisse gezählt und alle Rechenoperationen auf sie angewandt werden, bietet jetzt keine Schwierigkeit mehr, da von Anfang an jede Zahl im metrischen Verhältnis zu 1 zu verstehen ist, also überhaupt in allen Rechnungen Verhältnisse mit Verhältnissen (metrischen wie Stellverhältnissen) wieder in (metrischen und Stell-)Verhältnissen betrachtet werden.

§ 13. (*Kritische Anmerkung.*) Man findet diese einfachste Auffassung der Multiplikation und Division am nächsten entsprechend bei Simon [*161*]. Er erklärt die Multiplikation (S. 73) dadurch, daß eine Mehrheit zur Einheit (Übereinheit) gemacht wird. $a \cdot b$ ist die Zahl, die so aus a „erzählt" ist wie b aus 1. Und entsprechend (S. 79): der Bruch ist keine benannte und keine unbenannte, sondern eine relative Zahl. „Es kann auch eine Zahl (verstehe: Vielheit) wie etwa 8 in unserem Geiste als Einheit gesetzt werden;" dann wird die frühere 1 zu $^1/_8$, der Bruch enthält also außer der reinen Anzahl (dem Zähler) noch eine Beziehung (Relation) seiner Einheit oder seines Nenners zur Haupteinheit. Bei der Regeldetri kann dann die Verhältnisauffassung keine Schwierigkeit mehr machen, da „den Schülern die Subjektivität der Begriffe Einheit und Vielheit in Fleisch und Blut übergegangen“ ist. Wir würden hier nur wieder statt „Subjektivität“ sagen: die Funktionsbedeutung der arithmetischen Begriffe.

Das Richtige liegt übrigens in diesem Fall so nahe, daß es nicht leicht ganz verfehlt werden konnte. Auch Stolz streift wenigstens daran. Er führt zwar den Bruch (wie schon erwähnt wurde) ganz formalistisch ein, als „Zeichen auf dem Papier“, aber begründet ihn wenigstens hinterher „synthetisch“ durch die Auffassung des Nenners als „Untereinheit“; die dann leider ihrerseits erst ihre Begründung finden soll durch die Voraussetzung, daß in der „Schar unter sich gleicher Dinge“ (von deren Betrachtung er nun einmal nicht loskommt) ein jedes sich in eine beliebige Anzahl gleicher Teile zerlegen lasse. Schon Hankel hat gegen jede solche Auffassung mit vollem Recht eingewandt, daß doch diese Voraussetzung für Dinge nur in bestimmten Fällen zutreffe, so daß dem Begriff die für arithmetische Begriffe notwendige Allgemeinheit mangeln würde. Aber er wie Durège u. a. flüchtete deshalb wieder zur rein formalistischen Begründung aus dem Bedürfnis der Rechnung; er sprach von Zahlen als besonderen rein „mentalen“ Objekten, die mit Dingen, also auch mit dem Zählen (das man eben für ein Operieren mit Dingen hält) nichts zu tun hätten. So langt man glücklich bei Zahlen an, die mit dem Zählen nichts zu tun haben; während man doch denken sollte, daß sie überhaupt nichts als die Zählung selbst, als gesetzmäßige Funktion des Erkennens, zu entwickeln hätten. Das Beiwort „mental“ zu „Objekte“ ist also leider kein Hinweis auf den echten Begriff des Denkens als gesetzmäßiges Vorstellen, Gesetzesbewußtsein im Vorstellen, sondern es bleibt dabei, daß Zahlen Dinge sein sollen, wenn nicht äußere, dann Dinge des Geistes, die er sich gleichsam zum

Zeitvertreib macht, und die nicht etwa der Erkenntnis der Gegenstände dienen. Bedeutet Eins die Funktion der Einssetzung, dann folgt alles einfach und leicht; dann lassen sich auch 8 als 1, 1 als 8 setzen, aus dem einfachen Grunde, weil eine Vielheit auch wieder Eins ist, also die Einheit, als Funktion, auch eine Vielheit, und zwar jede, vertreten kann, womit alles gegeben ist, was man braucht.

Die scharfsinnige Erklärung, welche Lipps für die unbegrenzt teilbare Größe gibt (*106*, S. 127 ff.) darzulegen und im einzelnen zu prüfen, würde zu viel Raum in Anspruch nehmen. Lipps beweist mehr, als wir hier zu beweisen hatten; aber die Grundlage scheint mir von der unsrigen nicht wesentlich verschieden zu sein; alle seine Folgerungen würden sich aus unseren Voraussetzungen ebensowohl ableiten lassen. Er legt Gewicht darauf, daß die positiven reellen Zahlen nicht aus der Reihe der ganzen Zahlen ableitbar oder auf sie reduzierbar seien, vielmehr beruhen auf der „ständig sich wiederholenden Entfaltung der Einheit zu der in ihr hervortretenden und mit ihr äquivalenten Vielheit" (S. 138). Dagegen ist nur zu sagen, daß schon der Aufbau der Reihe der ganzen Zahlen dieses selben Prinzips bedarf, daß also die positiven reellen Zahlen zwar nicht aus der Reihe der ganzen Zahlen, wohl aber aus demselben Prinzip ableitbar sind, welches mit diesen zugleich schon gesetzt war. In der „Darstellung der Urreihe" bei Lipps (§ 3 und 4 desselben Kapitels) ist faktisch allemal einer Vielheit (a, b, c) eine Einheit (a) äquivalent gesetzt, also das angeblich neue Prinzip wirklich schon verwendet, nur in einer Einschränkung, für die von Anfang an keine Notwendigkeit vorlag. Eine sachliche Verschiedenheit prinzipieller Art gegenüber unserer Ableitung vermag ich nicht zu erkennen.

Nicht unbemerkt soll bleiben, daß Cantor (Zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, § 3, vgl. § 4, Math. Ann. 46, 1895) die Multiplikation, um ihr allgemeine Anwendbarkeit auf seine Kardinalzahlen oder Mächtigkeiten zu geben, auf die Kombination zurückführt. Nämlich jedes Element m einer Menge M läßt sich mit einem Element n einer Menge N verbinden zu einem neuen Element (m, n). Die Menge dieser Verbindungen (m, n) heißt die Verbindungsmenge von M und N (M, N), deren Mächtigkeit abhängt von den Mächtigkeiten von M $(\overline{\overline{M}} = a)$ und von N $(\overline{\overline{N}} = b)$; sie definiert das Produkt $a \cdot b = (M \cdot N)$. Einen ähnlichen Weg schlägt Whitehead (*183*) ein, dem Russell (*154*, § 115) und Couturat (*31*, S. 56) sich anschließen. In gewisser Weise liegt die Kombination auch in unserer Deutung der Multiplikation. Sollte dies aber so verstanden werden, daß überhaupt die Multiplikation auf die Kombination zurückzuführen sei, so würde darin, wie mir scheint, ein *Hysteron-proteron* liegen. Aus 3 Dingen m und 2 Dingen n sind 6 Kombinationen je eines m mit einem n möglich, weil dieser Kombinationen eben notwendig $3 \cdot 2$ oder $2 \cdot 3$ sind; nicht aber ist $3 \cdot 2$ oder $2 \cdot 3 = 6$ darum, weil aus 2 Gruppen von 3 und 2 Dingen 6 Kombinationen je eines Dinges der einen und eines der anderen Gruppe möglich sind. Man kann auf dies *Hysteron-proteron* freilich leicht kommen, wenn unter den Faktoren 3 und 2 Mengen von Dingen verstanden werden und das Produkt nun aus diesen Dingen, statt aus den reinen Zahlen, gebildet werden soll. Dann könnte das Produkt, da es doch einmal eine Zahl sein muß, nicht wohl etwas anderes sein als die Zahl der Kombinationen jener Dinge, die glücklicherweise sich deckt mit dem wahren Produkt der Zahlen. Daß das kommutative Gesetz bei dieser Ableitung keines Beweises bedürfe (wie Couturat meint), ist sicher irrig. Cantor wenigstens hat nicht unterlassen, den Beweis ausdrücklich zu führen. Es wird als Vorzug dieser Erklärung gerühmt, daß sie unterschiedslos auf endliche und unendliche Zahlen Anwendung finde, also schlechthin allgemein sei. Aber dieser Weite entzieht sich auch nicht die Erklärung der Multiplikation durch Zählung von Zahlen. Cantor verwendet in der Tat neben der soeben angegebenen auch diese in folgender Form: man ersetzt in einer Menge *N* jedes Element durch eine Menge äquivalent *M*; das Ganze der Elemente aller dieser Mengen ist dann das Produkt der Kardinalzahlen der Mengen *N* und *M*. Man darf wohl sagen, daß dies unsere Erklärung, nur in der Terminologie der Mengenlehre ausgedrückt, ist. Doch bedurfte es eben der Erklärung, warum und in welchem Sinne denn jene Substitution zulässig ist.

Zum Schluß sei nochmals betont, daß nach der hier entwickelten Auffassung die negative wie die gebrochene Zahl nicht eine künstliche Erweiterung der ursprünglichen als der „natürlichen" Zahlreihe darstellt, sondern nur den methodischen Gehalt, der in der Zahl von Anfang an lag, zur Entfaltung bringt. Die wesentliche Grundlage für ihre Einführung ist die Relativität der Zählung hinsichtlich des Ausgangspunktes, der Null, wie hinsichtlich der Einheit, mit der gezählt wird. Diese Relativität aber ist der Grundcharakter des synthetischen Denkens überhaupt. Die absolute Null und die absolute Eins sind bloße Hilfsmittel, um in der Unendlichkeit der Relationen, in die sich unsere Erkenntnis hineingestellt findet, überhaupt erst Fuß zu fassen. Ist dies einmal erreicht und damit die Möglichkeit geschaffen, die Relationen als solche zu sicherem Ausdruck zu bringen und ihre Gesetzmäßigkeit zu beherrschen, so darf die absolute Betrachtung als entbehrlich gewordenes Gerüst fallen. Die absolute Zahl ist provisorisch, die relative endgültig. Nur insofern gibt es eine Wandlung in den arithmetischen Grundbegriffen. Es ist keine andere, als die der große Urheber der Auffassung der Mathematik als Wissenschaft des Unwandelbaren, Plato, selbst vorgesehen, von der er gesprochen hat als von einem Wandel (κίνησις) der Begriffe, nicht der Dinge. Es ist genau die Relativierung gemeint, die sich uns direkt ergibt aus dem Prozeßcharakter der synthetischen Einheit überhaupt und nach allen Richtungen, in dessen klarer Herausstellung wir das unermeßliche, jedenfalls bisher bei weitem nicht nach allen Seiten ermessene Verdienst des Königsberger Plato sehen.

Auf eben dieser Grundlage werden nun auch die Probleme des Unendlichen und Stetigen sich bewältigen lassen.