Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften

Natorp, Paul

Leipzig [u.a.], 1910

Viertes Kapitel. Unendlichkeit und Stetigkeit.

urn:nbn:de:hbz:466:1-35817

Viertes Kapitel.

Unendlichkeit und Stetigkeit.

§ 1. (*Der methodische Sinn des Unendlichen.*) Das Merkmal der Unendlichkeit ist mit der Zahl, so wie wir sie konstruiert haben, in einem bestimmten Sinne schon gegeben. Die Zahl ist unendlich, sofern 1. die Setzung von Einem zu Einem usf. sich unbeschränkt wiederholt; 2. das Verfahren, durch Abschluß der in sich unbestimmten Reihe von Einheiten je auf erreichter Stufe die bestimmte Vielheit zu setzen, unbeschränkt fortbesteht. Diese Unendlichkeit erstreckt sich gleicherweise auf die Ordnungszahl und auf die Anzahl. Und sie gilt für alle bis dahin beschriebenen besonderen Weisen der Zahlsetzung: die Zahl ist unendlich in positiver wie negativer Richtung, in der Richtung der Vervielfältigung wie der Teilung. Denn jede Stelle der Zahlreihe ins Unendliche fungiert auch wieder als relative Null, jede bestimmte Vielheit ins Unendliche als relative Einheit, jede Einheit umgekehrt als irgendwie bestimmte Vielheit.

Diese Unendlichkeit der Zahl ist unangreifbar, weil sie nur der einfache Ausdruck des Funktionscharakters der Zahl ist. Es ist damit nichts anderes gesagt, als daß das Verfahren der Zahl mit allem, was es einschließt, eben als Verfahren ein für allemal, folglich immer wieder, an sich ohne Schranken gilt und Anwendung fordert; oder daß die Relationen der Zahl unbeschränkt fortbestehen. Es kann keine rechtmäßige Bedeutung oder Anwendung des Unendlichkeitsbegriffs in der Mathematik oder mathematischen Naturwissenschaft geben, die nicht auf dieser allgemeinen Grundlage ihre Erklärung fände. Denn der ganze Sinn der Zahl ist nur der eines Verfahrens gedanklicher Setzung, oder der Entwicklung von Relationen und Relationen von Relationen ohne Ende; es dürfen daher auf die Zahl keine anderen Prädikate angewandt werden, als die in der Gesetzmäßigkeit des Zählverfahrens begründet sind.

Eine Erschöpfbarkeit des Unendlichen in quantitativer Bedeutung zu behaupten oder zu verlangen, hat hiernach keinen Sinn, da das Merkmal der Unendlichkeit vielmehr die nie erschöpfliche Anwendbarkeit des Verfahrens und jedes Verfahrens der quantitativen Setzung bedeutet. Es ist daher mit dem Begriff des mathematisch Unendlichen nicht ein dinglich existierendes „Unendliches“ gesetzt, das dem Verfahren der Zählung nur nicht erreichbar wäre. Wohl haben wir oft gesagt, das Verfahren der Zahl entwickle nur bestehende Relationen. Aber diese Relationen bestehen eben ins Unendliche fort; der Fortgang ins Unendliche selbst besteht. Aber es besteht darum nicht ein Ding „Unendlich“ jenseits dieses Ganges. Wenigstens müßte eine solche Aufstellung, wenn sich für sie irgendein haltbarer Sinn und Grund ausfinden ließe, einer anderen Wissenschaft als der von der Zahl überwiesen werden.

Wir nennen diese Ansicht vom mathematisch Unendlichen kurz die „methodische“. Sie möchte nicht verwechselt sein mit der alten Aristotelischen Unterscheidung, die sehr vielen bis heute als maßgebend gilt: der des potentiell und aktuell Unendlichen: ein Unendliches der Möglichkeit nach sei zulässig, in der Verwirklichung dagegen nicht. Es kann keinem Zweifel unterliegen, daß Aristoteles durch diese Unterscheidung sich sogar mit seiner eigenen sonstigen Fassung der Begriffe Potenz und Aktus in Widerspruch setzt. Möglich sollte allgemein nur heißen, was auch wirklich sein oder werden oder wenigstens gedacht werden kann. Das Unendliche aber kann nach Aristoteles eben nicht verwirklicht sein oder werden oder auch nur gedacht werden; also dürfte von ihm auch nicht gesagt werden, daß es der Möglichkeit nach bestehe. Die Schwierigkeit wird keineswegs behoben durch die Erinnerung, daß es sich beim mathematisch Unendlichen nie um ein vollendetes Sein, sondern um ein Werden, einen Wechsel oder Fortgang handle. In einer Aufeinanderfolge nämlich, meint Aristoteles, sei die Unendlichkeit unanstößig, indem eines immer an die Stelle des andern trete und diese Substitution immer stattfinde; dann sei in jedem gegebenen Stadium eben nur Eines verwirklicht und ergebe sich nicht der Widersinn der vollendeten Unendlichkeit (τῷ ἀεὶ ἄλλο καὶ ἄλλο λαμβάνεσθαι Phys. 206a 28, πεπερασμένον 29, usw.). Dieser Widersinn trete dagegen unausbleiblich ein, wenn das Unendliche auf einmal miteinander verwirklicht sein sollte. Daher läßt Aristoteles die Unendlichkeit gelten für die Zeit, und so auch für die Zahl, indem er die Zählung als sukzessive Setzung versteht; ja für das „Denken" allgemein, offenbar, indem es immer sukzessiv eines an die Stelle des andern setze (οὐχ ὑπομένοντος τοῦ λαμβανομένου 208a 20), welches Denken indes ihm für das Sein ganz und gar nichts beweist; denn nicht darum ist eine Sache so, daß wir sie so denken, sondern darum, daß sie so ist, haben wir sie so zu denken. Das Unendliche gilt aber eben deshalb nicht von Dingen, welche sind, nämlich auf einmal miteinander sind; daher vor allem nicht für die räumliche Ausdehnung des Universums. Das Argument der Atomisten, daß jede endliche Ausdehnung, eben mit ihren Enden, an eine fernere grenzen, die Ausdehnung an sich also unendlich sein müsse, gibt Aristoteles nicht zu: der Begriff des Begrenzten sei nicht an sich ein relativer, fordere nicht notwendig ein anderes, woran es grenze; und was solcher Subtilitäten mehr sind.

Von dieser Aristotelischen Auffassung ist die unsere wesentlich verschieden. Das Unendliche, von dem wir reden, gibt es, und zwar nicht zufolge einer Sukzession. Sprachen wir von einem Fortgang, von einem Verfahren der Setzung, so ist doch nicht die zeitliche Folge hierbei von irgendwelcher Bedeutung. Dies ginge allenfalls die Psychologie an; eine Grundlegung der Logik und Mathematik kann von der Voraussetzung zeitlicher Vorgänge schon darum nicht ausgehen, weil auf den Grundlagen, welche Logik und Mathematik aufzuzeigen haben, selbst erst der Begriff der Zeit sich aufzubauen hat. Worum es in Logik und Mathematik sich handelt, ist allein die Gesetzlichkeit ins Unendliche bestehender Relationen. Im Sinne der Aristotelischen Unterscheidung ist durchaus zu sagen, daß die Relationen der Zahl ins Unendliche sind, nicht werden; die Unendlichkeit der Zahlrelationen wäre also in Aristoteles' Sinn aktuelle, nicht potentielle Unendlichkeit zu nennen. Aber dieser ganze Modalitätsunterschied des Möglichen und Wirklichen hat in der Mathematik keine Stelle; diese hat also gar nicht zu reden von einem potentiell oder aktuell Unendlichen, sondern vom Unendlichen schlechtweg; wenn erforderlich, mit sonstigen Unterscheidungen, wovon bald zu reden sein wird. Damit fällt zugleich der bei Aristoteles keineswegs behobene Widerspruch weg, daß möglich genannt wird, was doch nicht soll wirklich sein oder werden oder auch nur gedacht werden können.

Näher steht der methodischen Auffassung des Unendlichen schon Descartes' Unterscheidung des Indefiniten und Infiniten; aber zu reinerer Durchführung gelangt sie erst bei Kant. Zwar kann es bei diesem äußerlich noch an Aristoteles erinnern, wenn allgemein die Unendlichkeit erklärt wird als Unvollendbarkeit der „sukzessiven Synthesis" im Progreß der Komposition von den Teilen zum Ganzen wie im Regreß der Dekomposition vom Ganzen zu den Teilen; mit der Unterscheidung jedoch, daß im Regreß, weil hier das Ganze voraus gegeben, es möglich sei, ins Unendliche (*in infinitum*) zu gehen, während im Progreß es nur ins Unendliche (d. h. hier: ins Unbestimmte, doch unbeschränkt, *in indefinitum*) möglich sei, zu höheren Stufen fortzuschreiten. Aber eben damit ist für den Regreß das Infinite im bestimmten Unterschied vom bloß Indefiniten anerkannt; was in der bald zu berührenden Auffassung des Unendlichkleinen bei Kant seine Bestätigung findet. Übrigens ist die leise ins Psychologische abbiegende Unterscheidung des Indefiniten und Infiniten für Kant offenbar von geringem Gewicht gewesen; denn andrerseits heißen ihm Zeit und Raum als unendlich dennoch „gegeben"; ihre Einheit liege zugrunde; irgendeine begrenzte Zeit- oder Raumvorstellung sei nur durch „Einschränkung der einigen zugrunde liegenden" Zeit- und Raumvorstellung möglich. Aber diese Einheit des Unendlichen ist „synthetische" Einheit, d. h. Einheit unendlicher Relationen kraft der Einheit des Gesetzes, nach welchem sie sich immer eine auf der anderen aufbauen oder auseinander entwickeln. Zeit und Raum sind nicht die leeren, unendlichen, absoluten, für sich bestehenden „Undinge", als welche einige Naturforscher Newtonscher Schule sie dachten, sondern beide sind nichts als Arten der Setzung „seiner Vorstellungen", sind daher selbst bloße „Verhältnisvorstellungen", durch die doch nicht eine Sache an sich erkannt werde (Allg. Anm. z. transz. Ästhetik II). Dasselbe gilt vollends von der Zahl, die als unmittelbarer Ausdruck des Verfahrens der Synthesis, zunächst der Quantität, von Kant ähnlich wie von uns gedeutet wird. Abgelehnt wird nur und mit Grund die Voraussetzung einer Abgeschlossenheit („Totalität") des Unendlichen in „vollendeter Synthesis", oder die Möglichkeit einer „Durchzählung" des Unendlichen, die das Unerschöpfliche erschöpft haben sollte. Gerade damit würde die Welt in Zeit und Raum, mithin diese selbst, und folgerecht auch die Zahl, zum „Ding an sich", d. h. aus einer reinen Verhältnisvorstellung zu einem Absoluten gemacht. In diesem

Absolutismus bleibt dagegen Aristoteles ganz befangen. Seine Ansicht ist in Kants Sinne schlechterdings dogmatisch, und zwar zwiespältig: dogmatisch im Sinne der Kantischen „Thesis" (der Behauptung des endlichen Absoluten) in Hinsicht der räumlichen Ausdehnung, dagegen im Sinne der Antithesis (der Behauptung des unendlich Absoluten) in Hinsicht des zeitlichen Verlaufs des Weltprozesses; wogegen nach Kant die Totalität der Bedingungen im Unbedingten nur den Geltungswert einer „Idee" beanspruchen darf, die keine weitere Funktion in der Erkenntnis zu erfüllen hat, als die Unendlichkeit der Aufgabe des empirischen Progresses und Regresses auszudrücken.

§ 2. (*Das aktuell Unendliche Georg Cantors.*) Tritt man mit den soeben entwickelten Vorbegriffen nun an Cantors Mengenlehre, als die moderne Gestalt der Mathematik des Unendlichen, heran, so findet man sich zunächst in einiger Verwirrung. Diese hat — das darf bei allem Dank und aller Bewunderung, die man dem schöpferischen Genie des Mannes schuldet, doch nicht ungesagt bleiben — ihren Grund zum großen Teil darin, daß Cantor, namentlich in seinen ersten Darlegungen, nicht bei seinem Leisten bleibt und rein als Mathematiker spricht, sondern das Geschäft des Metaphysikers der Unendlichkeitsbegriffe zugleich auf sich nimmt. Des Metaphysikers, nicht des Logikers, denn durch die Bezeichnung seines „Transfiniten" als aktuell Unendliches, durch die Hereinziehung der Frage des Absoluten, durch das ganze Eingehen auf die alten scholastischen Kontroversen hinsichtlich des Unendlichen greift seine Behandlung der Frage[1]) offenbar und eingeständlich ins metaphysische Gebiet hinüber.

---

1) Math. Ann. 21, 1883, S. 545 ff.; Zeitschr. f. Philos. 88, 1886, S. 224 ff. und 91, 1887, S. 81 ff. Ich zitiere im folgenden die Annalen mit A., die Zeitschrift mit Z.

Cantor unterscheidet drei Begriffe des Unendlichen:

1. Das eigentlich Infinite, schlechthin Abgeschlossene, Absolute, das als solches keinerlei Determination zuläßt, nicht nur über jedes endlich Bestimmte, sondern auch über jedes bestimmbar Unendliche hinausliegt und nichts mehr über sich hat, eben deshalb aber „nur anerkannt, nie erkannt, auch nicht annähernd erkannt werden" kann.[1]) Dieses hat sich uns bereits in Kants „Idee" aufgelöst, der nur regulative, nicht konstitutive Bedeutung zukommt.

2. Das uneigentlich, potentiell oder synkategorematisch Unendliche oder Indefinite, welches keine von der endlichen wesensverschiedene konstante, sondern die veränderliche, über alle endlichen Grenzen (richtiger würde es heißen: über jede endliche Grenze) hinaus wachsende oder abnehmende, d. h. beliebig groß oder beliebig klein anzunehmende, dabei aber immer endlich bleibende Größe bedeutet.[2]) Mit Unrecht nenne man es das „schlecht" Unendliche, da es in der Mathematik und Naturwissenschaft als höchst brauchbares Instrument bewährt sei. Nur glaube man ebenso mit Unrecht, mit diesem allein in der Mathematik auszukommen. Die bekannten, dies vertretenden Ausführungen Dührings u. a. beweisen nach Cantor nur a) daß eine bestimmte endliche Zahl, wenn noch so groß, nie unendlich ist, b) daß eine veränderliche, unbeschränkt wachsende oder abnehmende Zahl der Bestimmtheit ermangelt, die ihr ein Sein beizulegen gestatten würde.[3]) Nur diese uneigentliche Bedeutung des Unendlichen will aber Cantor selbst im sog. Unendlichkleinen oder Infinitesimalen finden. — Von diesen beiden Bedeutungen des Unendlichen also, von denen die eine rein metaphysisch ist, die Mathematik als solche nichts angeht, die andere in ihr

1) A. 21, 587, A. 2; Z. 91, 109.
2) Z. 88, 230.
3) A. 21, 582. 588 A. 4.

von wichtigem und unangefochtenem Gebrauch ist, unterscheidet er

3. die des aktuell, aber nicht absolut Unendlichen oder Transfiniten (Überendlichen), welches ein bestimmtes, konstantes, aber jenseits aller endlichen Größe liegendes Quantum bedeute. Es unterscheidet sich vom Absoluten, sofern es ein zwar Unendliches, aber doch noch Vermehrbares, das letztere dagegen unvermehrbar und mathematisch überhaupt undeterminierbar sei.[1]) Das Überendliche ist determinierbar. Es ist übrigens nicht einfach, sondern existiert in wiederum unendlichen Abstufungen, durch die man, nicht anders als durch die Reihe der endlichen Zahlen, „immer weiter, nirgends an eine unübersteigbare Grenze, aber zu keinem auch nur angenäherten Erfassen" eines Letzten, welches hier das Absolute wäre, gelangt.[2])

Cantor glaubt sich mit diesen Aufstellungen im Gegensatz zu allen älteren Fassungen des Unendlichkeitsbegriffs, besonders auch zu Kant zu befinden. Er hat also nicht bemerkt, daß gerade Kant eine der seinigen eng verwandte Unterscheidung macht zwischen dem echten mathematischen Begriff des Unendlichen, als dessen, was im Verhältnis zu einer beliebig anzunehmenden Einheit „größer als alle Zahl", oder der „Menge", die, unter Voraussetzug einer gegebenen Einheit, größer ist als alle Zahl; welches in der Mathematik gilt und mit welchem sie rechnet, trotzdem dabei „die sukzessive Synthesis der Einheiten in Durchmessung eines Quantum niemals vollendet sein kann"; und dem unechten Begriff, den die Metaphysiker oftmals diesem echten, um ihn zu diskreditieren, untergeschoben haben: der Größe (oder Menge), über die keine größere möglich; welches auch er dem „Absoluten" gleichsetzt.[3]) Wenn Cantor an

1) Z. 88, 231.

2) A. 21, 587 A. 2.

3) Kritik, Antinomieen, Anm. z. 1. Thesis. So aber schon in vorkritischer Zeit, Diss. § 1**, und Neg. Gr., Einl., auch Metaph. An-

Kant tadelt, daß er das Absolute als die Grenze des Endlichen ansehe, während diese Grenze vielmehr das Transfinite sei [1]), so übersieht er, daß Kant das Absolute (die „Totalität der Bedingungen im Unbedingten") als wissenschaftlich setzbaren Abschluß und in diesem Sinne als Grenze überhaupt verwirft und ihm nur die Bedeutung einer Idee zugesteht, deren Funktion allein in der Erkenntnis der Unendlichkeit des empirischen Progresses und Regresses besteht. Diese Aufstellung ist vorsichtiger als die Cantors, der das Absolute als zwar nicht erreichbare, aber doch existierende Grenze der immer fortsetzbaren, notwendig fortzusetzenden Reihe bestimmbarer, teils endlicher, teils unendlicher Mengen doch setzt, also uns zumutet, ein absolut jenseits des unserer Erkenntnis Erreichbaren Liegendes doch als existierend zu denken und anzuerkennen. Das aktuell Unendliche oder Überendliche Cantors fällt dagegen ersichtlich unter Kants Begriff des mathematisch Unendlichen als des über jede Vielheit einer gegebenen Einheit Hinausgehenden, das sich freilich nicht „anschauen", nicht sinnlicher Erkenntnis zugänglich machen läßt, aber sich doch wohl muß denken lassen, da die Mathematik mit ihm arbeitet und sichere Resultate erreicht. Allenfalls hätte Kant dies echte mathematisch Unendliche noch bestimmter vom bloß Indefiniten (Hegels „schlechter" Unendlichkeit) unterscheiden dürfen. Aber ohne jeden Zweifel erkennt er ein nicht bloß indefinit Unendliches an, und zwar als den echten mathematischen Begriff des Unendlichen, da er das Infinitesimale ausdrücklich in diesem Sinne auffaßt und es nach dieser Definition wiederholt in Schutz nimmt

---

fangsgr. d. Naturwiss. 2. Hauptst. Lehrs. 4. Die Unterscheidung selbst rührt von Aristoteles her (Phys. 207a 1) — nur daß dieser sie im gerade entgegengesetzten Sinne anwendet, nämlich das οὗ ἀεί τι ἔξω für das Sein zu leugnen, das οὗ μηδὲν ἔξω zu behaupten, welches, als τέλειον, abgeschlossen, also begrenzt sein müsse.

1) Z. 88, 231.

gegen die ungegründeten Verdächtigungen der Metaphysiker, die ihm, weil sie es fälschlich mit dem Absoluten identifizieren, überhaupt die Existenz abstreiten oder wenigstens im Bereiche wissenschaftlicher Erkenntnis nur Endliches gelten lassen wollen.

Nun teilt zwar Cantor, wie schon bemerkt, gerade hinsichtlich des Infinitesimalen die von sehr vielen Mathematikern vertretene Auffassung, daß darunter nur eine beliebig kleine, doch immer endlich bleibende, veränderliche Größe zu verstehen sei. Er will[1]) den Beweis geführt haben, daß das Infinitesimale als aktuell Unendlichkleines nicht etwa notwendig seinem aktuell Unendlichgroßen entsprechend anzunehmen, sondern durch dieses vielmehr ausgeschlossen sei. Was er aber wirklich beweist, ist nur, daß das Infinitesimale, als dem sogenannten Archimedischen Prinzip, das heißt der Möglichkeit der Ausmessung durch eine gegebene endliche Einheit entzogene, dennoch endliche, „unter dem Bilde begrenzter geradliniger stetiger Strecken vorstellbare“ Zahlgröße, als „Element“ oder integrierender Teil endlicher linearer Größen unmöglich sei; was, wenn der „Teil“ in Beziehung auf die gegebene Einheit verstanden wird, freilich keines Beweises bedurfte; denn daß eine Größe, die Teil einer endlichen Größe ist, nicht unendlich klein in dem Sinne sein kann, daß nicht durch irgendeine Vervielfältigung derselben die endliche Größe erreicht und übertroffen würde, ist durch den Begriff des Teils, als korrelativ zu dem des Vielfachen, ja ohne weiteres gegeben. Aber das Infinitesimale sollte schon bei den klassischen Begründern dieses Begriffs nicht ein „extensives“, durch die gegebene Einheit meßbares Quantum darstellen. Schon Galilei spricht von *infinita non quanta;* Leibniz behauptet das Infinitesimale als *praeter extensionem, imo extensione prius,* bei Newton sind die infinitesimalen „Momente“ nicht *quan-*

1) Z. 91, 112ff.

titates finitae, sondern *principia iamiam nascentia finitarum magnitudinum;* und Kant erklärt das Infinitesimale durch die intensive Größe, die den Grund der extensiven enthalte, aber nicht selbst extensiv sei.[1]) Gerade Cantor sollte einer solchen Auffassung nicht unzugänglich sein, da er sein aktuell Unendliches doch nicht durch Vervielfältigung der gegebenen Einheit, überhaupt nicht durch irgendein bloß quantitatives Verfahren, sondern durch den Übergang zu einem neuen „Universalbegriff" oder „Gesetz", unter ausdrücklichem Verzicht auf Meßbarkeit durch eine gemeinsame Einheit erreicht. Was aber die Begründung der Analysis betrifft, so vertritt z. B. Enriques (*45*, S. 117 f.) die Ansicht, daß zwar der Aufbau der gewöhnlichen Analysis bei der Betrachtung von Größen, die dem Archimedischen Postulat genügen, stehen bleiben könne, daß aber bei besonderen Problemen, wie dem des Kontingenzwinkels, allgemein bei der Begründung der verschiedenen Ordnungen des Unendlichkleinen, oder beim Vergleich der mehr oder weniger raschen Art, in der die Funktionen variierend einer Grenze zustreben, mit dieser Vorstellung nicht mehr auszukommen sei, sondern eine Betrachtung wie die Cantors vom aktuell Unendlichen notwendig werde. Aber auch Cantor selbst, der das Unendlichkleine durch das potentiell Unendliche erklären möchte, folgert andrerseits geradezu vom potentiell auf das aktuell Unendliche: das Gebiet der Veränderlichkeit könne nicht selbst wiederum veränderlich gedacht werden, es sei notwendig als „bestimmte aktuell unendliche" Wertmenge zu denken.[2]) Und diese „Gebiete der Veränderlichkeit" seien die eigentliche Grundlage der Analysis sowohl als der Arithmetik. Damit ist der Sache nach das Infinitesimale auf das Transfinite gestützt und aus dem Bereiche des bloß Indefiniten hinausgehoben.

1) Cohen [*22*] S. 46, 71, 85f., 111; in welchem Buche überhaupt reiches Material über diese Frage zu finden ist.

2) Z. 91, 116f.

Mit ganzer Entschiedenheit aber wird diese Auffassung vertreten durch den bedeutendsten Nachfolger, den Cantor gefunden hat: Giuseppe Veronese, der, an gewisse ältere Erwägungen von Stolz und P. du Bois-Reymond anknüpfend, die verschiedenen Ordnungen des Unendlichgroßen und Unendlichkleinen, unter ausdrücklicher Absehung vom Archimedischen Prinzip, aufgestellt und in grundsätzlicher Hinsicht, soviel ich erkennen kann, einwandfrei begründet hat. Nach ihm deckt sich das Prinzip des Archimedes geradezu mit der Voraussetzung der Endlichkeit, ist also das Absehen von diesem Prinzip (welches in der Tat keine absolute Denknotwendigkeit ausspricht) gleichbedeutend mit der Anerkennung der Existenz echter Unendlichkeiten. Diese beruht übrigens für ihn wie für Cantor einfach darauf, daß die Allheit z. B. der ganzen positiven Zahlen, obgleich ohne letztes Element, also im „potentiellen" Sinn unendlich, doch dem Begriff nach in eindeutiger Bestimmtheit gegeben ist und auch in einem zwischen zwei bestimmten Elementen begrenzten Intervall beschlossen gedacht werden kann und muß; so wie doch stets von den Mathematikern angenommen wurde, daß begrenzte Strecken unbegrenzt teilbar seien, also unendliche Teile an sich (für das Denken) enthalten. Soll das einmal gelten, so muß es auch in voller Allgemeinheit gelten; damit aber relativiert sich notwendig die Unterscheidung des Endlichen und Unendlichen, und es ergibt sich zwingend eine strenge Korrespondenz sogar unendlicher Ordnungen des Unendlichkleinen und Unendlichgroßen, so wie das Schema Veroneses (Grundl. S. 184) es darstellt. So wird Cantors Vorstellung in ihrer prinzipiellen Grundlage bestätigt und zu ihrer vollen Konsequenz erst entwickelt, damit aber zugleich überboten und in Hinsicht der Deutung des Unendlichkleinen berichtigt. Cantor blieb eben, wie es genialen Entdeckern sehr oft ergangen ist, noch mit einem Fuß in der alten Auffassung stecken, indem er sich einen absoluten Abschluß wenigstens nach unten denken zu müssen glaubte, für den doch ein logischer Grund, nachdem einmal das Recht des Hinausschritts ins Unendliche überhaupt anerkannt ist, keineswegs besteht.

Nach diesem Blick auf die Geschichte unseres Problems, der für sich noch nichts entscheiden wollte, schreiten wir nun zur Untersuchung der Sache selbst.

Der Sinn und die unumgängliche Notwendigkeit des Hinausschritts zum Unendlichen wird durch nichts so eindringlich beleuchtet wie durch das bedeutende Problem des Irrationalen. Cantor bemerkt einmal, daß mit dem Irrationalen sein Transfinites stehe und falle. In der Tat so innerlich sind beide Probleme miteinander verflochten. Mit beiden hängt nicht minder eng das Problem des Infinitesimalen zusammen; alle diese Probleme vereinigen sich in dem ihnen gemeinsamen Grundmotiv der Stetigkeit.

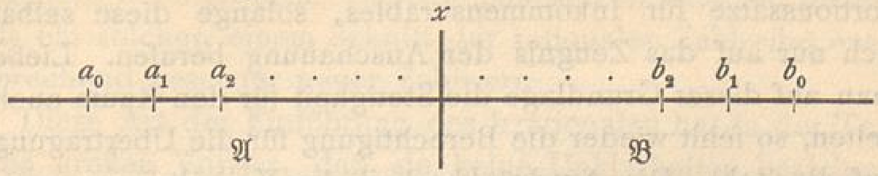
§ 3. (*Das Problem des Irrationalen.*) Die Untersuchung über das Irrationale hat sachgemäß den Ausgang zu nehmen von den unendlichen Reihen und deren Grenzwerten. Endliche auch rationale Werte lassen sich in unendlichen Reihen darstellen. Die Division $1 : 2 - 1$ ergibt die unendliche Reihe $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$; umgekehrt zeigt man: Wenn $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdots$, so ist $2x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$, also $= 1 + x$, mithin $x = 1$. Es scheint also die Gleichung zu Recht zu bestehen: $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$. Es ist grundsätzlich dasselbe, wenn man den rationalen Bruch $\left(\text{z. B. } \frac{1}{3}\right)$ darstellt durch den unendlichen periodischen Dezimalbruch $(0{,}333\ldots)$. Was besagt hier die Gleichsetzung endlicher Ausdrücke $\left(1, \frac{1}{3}\right)$ mit unendlichen Reihen? Wenn ich 1 halbiere und die Hälfte wieder halbiere und die Hälfte der

Hälfte usf., so ist durch Summierung der Hälfte und Hälfte der Hälfte usf., wie weit sie auch fortgesetzt werden mag, die Eins nicht zu erreichen. Gerade das besagt die Unendlichkeit der Reihe, daß die Rechnung nie zum Abschluß kommt, sondern stets ein Rest bleibt, in diesem Fall $\frac{1}{2^n}$, was, wie groß auch n sei, niemals Null wird. Vernachlässigt man den Rest, so vernachlässigt man die Voraussetzung, daß die Reihe weiter gehe, d. h. man hebt die Unendlichkeit der Reihe in Wahrheit auf. Ebenso ist es beim periodischen Dezimalbruch. Die Unendlichkeit des Dezimalbruchs $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ hat nichts Geheimnisvolleres zum Grunde, als daß die Division von 3 in 10, aus der er entsteht, niemals aufgeht, nicht in 10 10^{tel} noch in 10 100^{tel}, 1000^{tel} usf., sondern stets als Rest $\frac{1}{10^n}$ läßt, was, in $\frac{10}{10^{n+1}}$ verwandelt und wieder durch 3 geteilt, $\frac{1}{10^{n+1}}$ als Rest läßt, und so stets wieder. Der Rest kann so lange nicht verschwinden, als 3 nicht in 10 aufgeht. So beschränkt aber der menschliche Intellekt auch sein mag, das darf er getrost behaupten, endgültig zu wissen, daß dies nie der Fall sein wird. Man kann daher ohne Widerspruch nicht die unvollendete und unvollendbare Reihe $0{,}333\ldots$ dem vollendeten Bruch $\frac{1}{3}$ gleichsetzen, wenn Gleichheit Identität des Wertbetrags bedeuten soll. Nun haben wir uns zwar längst dahin entschieden, allgemein unter Gleichheit nicht logische Identität, sondern Substituierbarkeit zu verstehen. Aber das entschuldigt nicht eine Ungenauigkeit, wie sie hier begangen würde, indem tatsächlich nicht gleichwertige Ausdrücke für einander substituiert werden würden. Daß die Ausdrücke wirklich nicht gleichwertig sein können, tritt sofort zutage, wenn man als Nenner, statt $1000\ldots$, vielmehr $999\ldots$ setzt. Nun geht die Teilung auf allen Stellen restlos auf, und man erhält als Quotient ohne jeden Zweifel $\frac{1}{3}$. Es kann aber dieselbe Zahl als Zähler zu verschiedenen Nennern gesetzt unmöglich denselben Wert darstellen. Man sagt daher richtiger: $\frac{1}{3}$ ist die Grenze der unendlichen Summe 0,333 . . ., d. h. die Summe der Zehntel, Hundertstel usw. bleibt stets unter dem bestimmten Wert $\frac{1}{3}$, so aber, daß mit der Vermehrung der Summanden die Differenz immer kleiner wird, kleiner als jede noch so kleine endliche Differenz. Diese Betrachtung findet allgemeine Anwendung auf alle periodischen Dezimalbrüche oder systematischen Brüche überhaupt.

Diesen Begriff des Grenzwertes dehnt man nun aus auf den Fall, daß ein r a t i o n a l e r Wert als Grenze der unendlichen Reihe nicht existiert. Dies gilt von allen nicht periodischen unendlichen Reihen der allgemeinen Form

$$c_0 + \frac{c_1}{e} + \frac{c_2}{e^2} + \cdots,$$

wo c_0, c_1 usw. sämtlich positive ganze Zahlen kleiner als die ebenfalls positive ganze Zahl e sind; für $e = 10$ sind es die unendlichen nichtperiodischen Dezimalbrüche. Solche Reihen mögen sonst noch so regelmäßig gebaut sein, so daß nach festem Gesetz alle Glieder der Reihe ins Unendliche bestimmt sind, so existiert dennoch kein rationaler Grenzwert, wenn nicht die Reihe schließlich periodisch wird. Wohl aber ist es, wofern die Reihe nur überhaupt einem bestimmten Gesetz unterliegt, stets möglich, die verlangte, im rationalen Zahlgebiet nicht existierende Grenze so nahe, als man will, in rationalen Werten auszudrücken durch Systeme von Ungleichungen, nämlich Reihen einerseits wachsender rationaler Werte, die sämtlich kleiner sind als der verlangte Wert, andrerseits abnehmender, die sämtlich größer sind, so daß die Differenz der von beiden Seiten sich einander nähernden Werte sich unter jeden gegebenen noch so kleinen endlichen Betrag verringert. In anschaulicher Darstellung



sei $\mathfrak{A} = a_0 a_1 a_2 \ldots$ eine unendliche Reihe nach bestimmtem Gesetz ableitbarer wachsender rationaler Werte, die sämtlich kleiner als der gesuchte Grenzwert x sind, aber ihm unbegrenzt näher kommen, $\mathfrak{B} = b_0 b_1 b_2 \ldots$ eine dieser entsprechende Reihe abnehmender Werte $> x$, so wird die Differenz $b - a$ stets kleiner, und kleiner als jeder noch so kleine endliche Betrag. Wo nun dies der Fall ist, da nimmt man an (ohne es irgend beweisen zu können), daß ein eindeutig bestimmter Punkt x existiere, der die Gebiete $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ scheide. Den diesem Trennungspunkt entsprechend angenommen, nicht gegebenen Wert x setzt man dann als neue Zahl, die den gesuchten Grenzwert darstelle.

So der Tatbestand. Über die logische Begründung des Verfahrens sind die Meinungen noch immer nicht allseitig geklärt. Es ist im Grunde nur ein Ausdruck des Verzichts auf eine logisch zulängliche Begründung, wenn man einfach als „Axiom" aufstellt, daß im gedachten Fall der einzige Grenzwert „existiere". Es ist ebenso unbefriedigend, sich auf die Forderung der „Anschauung" zu berufen, daß auf der Geraden, welche die Zahlreihe repräsentiert, kein Punkt fehle, daß sie lückenlos, stetig zusammenhänge. Möchte diese Eigenschaft der Stetigkeit woraufhin immer von der Geraden im Raume gelten, so würde das nicht berechtigen, sie auf die Zahl zu übertragen; hat man doch durch viele Jahrhunderte hindurch die Zahl als diskretes Gebilde vom Raum als stetigem strengstens unterschieden. Aber Anschauung kann überhaupt nicht Stetigkeit begründen, auch nicht für den Raum oder etwa die Zeit. Stetigkeit kann nur durch einen Begriff eingeführt werden. Damit wird zugleich die Berufung hinfällig auf die geometrischen Beweise der Proportionssätze für Inkommensurables, solange diese selbst sich nur auf das Zeugnis der Anschauung berufen. Ließe man auf dieser Grundlage die Stetigkeit für den Raum auch gelten, so fehlt wieder die Berechtigung für die Übertragung auf die Zahl. Die Ausdrückbarkeit des Verhältnisses unter Inkommensurabelem durch die Zahl wird lediglich postuliert, während nach der Rechtmäßigkeit dieses Postulats eben die Frage ist. So bleibt hier logisch immer ein Sprung. Vielleicht ein geglückter, da nachher alles glatt verläuft und ein Widerspruch nicht zutage kommt. Aber ein geglückter Sprung ist immer noch ein Sprung; die Kontinuität des Denkens bleibt unterbrochen; die Stetigkeit der Zahl wird gewonnen auf Kosten der Stetigkeit des Denkens — deren genauer Ausdruck sie vielmehr sein müßte; denn eine andere Grundlage als die Gesetze des reinen Denkens darf die Zahl nicht kennen.

§ 4. (*Mathematische Lösungen. Dedekind.*) Die berühmte Erklärung des Irrationalen durch Dedekind (*32*) sucht ihren Vorzug darin, daß sie die Stetigkeit der Zahl weder schlechthin annehmen noch auf eine Forderung der Anschauung stützen, sondern wenigstens durch eine genaue Definition einführen will. Sie drückt die Tatsache der Nichtexistenz der Grenzwerte unendlicher systematisch gebildeter, aber nicht periodischer Reihen im System der rationalen Zahlen so aus, daß dies System „Lücken" habe. Die Tatsache aber, daß durch jede Reihe der beschriebenen Art, welche einen gesuchten irrationalen Grenzwert ausdrückt, eine Teilung des Systems der rationalen Zahlen auf die angegebene Weise hervorgebracht wird, wird damit ausgedrückt, daß jeder solchen Reihe ein „Schnitt" der rationalen Reihe entspreche. Indem nun einem jeden solchen Schnitt eine und nur eine neue „Zahl" entsprechend gesetzt wird, soll, indem man diese Werte dem System der rationalen Zahlen hinzufügt, das so erweiterte System (der „reellen" Zahlen) als stetig definiert sein. Die Irrationalzahl ist nunmehr nichts als ein solcher, einem Schnitt der rationalen Zahlreihe entsprechend gesetzter neuer Zahlwert.

Diese Art der Einführung des Irrationalen hat in der Tat den großen Vorzug, daß sie keine Unklarheiten bestehen läßt. Die Voraussetzung des Irrationalen und damit der Stetigkeit der Zahl wird nicht für denknotwendig ausgegeben, sondern offen eingestanden, daß man sie, als bloß nicht widersprechend, willkürlich einführt, weil man ohne sie nicht wohl auskommen kann. Besondere Aufmerksamkeit fordert hierbei die Verbindung, in welche das Problem des Irrationalen mit dem der Stetigkeit gesetzt wird. Den Worten nach wird erst durch das Irrationale die Stetigkeit eingeführt. Die stetige Zahlreihe wird definiert durch die auf die angegebene Weise vollzogene Erweiterung des Begriffs der Zahl auf die Grenzwerte unendlicher auch nichtperiodischer Reihen. Im Grunde aber dient vielmehr die Voraussetzung der Lückenlosigkeit der Zahlreihe, um die Setzung der neuen Werte, durch die allemal eine Lücke des Systems der rationalen Zahlen geschlossen wird, zu rechtfertigen. Daß aber so die Voraussetzung der Stetigkeit der Zahlreihe selbst einwandfrei begründet sei, wird sich schwerlich behaupten lassen.

Klargestellt ist: daß nicht etwa, wie früher vielfach angenommen wurde, so wie aus der Stetigkeit die Teilbarkeit ins Unendliche folgt, auch umgekehrt jene mit dieser gegeben ist. Das System der rationalen Zahlen ist „zusammenhängend", d. h. keine Differenz zweier rationaler Werte ist die kleinste, die im rationalen System existiert; aber dies System ist damit noch nicht „lückenlos", da es die irrationalen Werte, die man als reelle Werte doch irgendwie wird gelten lassen müssen, nicht enthält. Denn das ist überhaupt der Begriff des Irrationalen, daß kein rationaler

Wert ihm gleich, jeder entweder größer oder kleiner als er ist.

Klargestellt ist weiter — und darin dürfte der positivste Gewinn der Dedekindschen Betrachtung liegen: daß und wie, dem Gesetz gemäß, nach welchem der irrationale Wert durch Reihen rationaler Werte nicht ausgerechnet, aber in beliebiger Näherung berechnet werden kann, von jedem rationalen Wert sich ausmachen läßt, ob er größer oder kleiner als der fragliche irrationale ist. (Man beachte: ob, nicht auch, um wieviel; denn wenn auch das rational bestimmbar wäre, so würde damit der Wert selbst rational, gegen die Voraussetzung.)

Dagegen das einzige, was des Beweises bedurfte, ist durch jene Argumentation, soviel ich einzusehen vermag, nicht bewiesen. Der schließlich entscheidende Satz, auf den die Einführung des Irrationalen und damit der Stetigkeit sich stützen soll, lautet: daß einem jeden Schnitt des rationalen Systems ein und nur ein bestimmter Wert entspreche, durch dessen Hinzunahme allemal eine Lücke des Systems geschlossen werde; so daß, wenn man sich denkt, daß auf diese Art alle Lücken geschlossen wären, das ganze System damit stetig (lückenlos) würde. Die *petitio principii*, meine ich, sei hier offenkundig. Indem man setzt, daß jedem Schnitt eine Zahl entsprechen und damit das ganze System als lückenloses gegeben sein soll, macht man zwei Voraussetzungen. Erstens setzt man damit „den" Schnitt schon als eindeutig bestimmtes Etwas voraus; und es ist dann nur eine Sache der Benennung, die keiner anderen Forderung als der der Zweckmäßigkeit unterliegt, ob man dieses Etwas eine „Zahl" nennen will. Man setzt mit andern Worten die Lücken zwischen den Stellen der rationalen Reihe selbst als Stellen der erweiterten Reihe, und als solche bestimmt. Wie man aber dazu berechtigt sei, ist gerade die Frage. Man ist es jedenfalls nicht dadurch, daß die Differenz, innerhalb welcher der

Wert, wenn er existiert, liegen muß, sich beliebig klein annehmen läßt. Die immer engere Zusammenschiebung der beiderseitigen Grenzen definiert einen bestimmten Wert eben dann nicht, wenn die beiderseitige Näherung „unendlich“ ist, d. h. immer fortgeht. Denn dies besagt ja, daß immer eine Differenz, also stets ein Spatium bleibt, innerhalb dessen insoweit kein Wert bestimmt, und ins Unendliche nur rationale Werte bestimmbar sind, die immer wieder ein ebensolches Spatium lassen. Man kann zwar beweisen, daß nicht zwei voneinander um einen endlichen Betrag verschiedene Werte x, x' einem solchen Schnitt entsprechen können, weil durch die unbegrenzt fortgehende Verringerung der Differenz der rationalen Werte jede endliche Differenz unterschritten werden würde. Aber damit ist noch nicht ein einziger Wert bestimmt, denn es bleibt immer ein Spatium, und durch ein Spatium wird nicht ein Punkt definiert, solange Punkt und Spatium begriffsverschieden sind. Man kann dasselbe auch so ausdrücken. Bewiesen ist: wenn ein bestimmter einziger Wert der verlangten Art existiert (z. B. $x = \sqrt{2}$), so teilt er die Reihe der rationalen Werte in einziger, nicht mehrfacher Weise. Aber bewiesen ist nicht, daß der Wert existiert.

Man setzt zweitens im Begriff der Lückenlosigkeit die Allheit der Schnitte als gegeben, die doch in keiner Weise gegeben ist. Die rationalen nebst den nichtrationalen, das müssen freilich wohl „alle“ Werte sein. Aber während die Allheit der rationalen Werte durch sichere Definition gegeben ist, so ist die der irrationalen nur durch das negative Merkmal des nicht Rationalen gegeben; positiv kennt man gewisse Klassen irrationaler Werte (im allgemeinen die algebraischen), aber eine erschöpfende Definition „der“ irrationalen Werte ist weder gegeben noch überhaupt möglich. Denn die unendliche nichtperiodische Reihe definiert eben nicht einen bestimmten Wert, sondern definiert nur ein Verfahren, den gesuchten Wert, falls er existiert, durch rationale Werte so annähernd, als man will oder braucht, auszudrücken, oder das Verhältnis des Mehr und Weniger zwischen dem verlangten irrationalen und jedem rationalen oder sonstigen irrationalen Wert bestimmbar zu machen.

Es scheint fast, als ob jener Begründungsweise eine Denkart insgeheim zugrunde läge, die ganz offen zutage liegt in P. du Bois-Reymonds Allgemeiner Funktionentheorie. Dieser führt die Unendlichkeit und Stetigkeit geradezu ein durch eine von ihm idealistisch genannte, in Wahrheit vielmehr im mittelalterlichen Sinne realistische Voraussetzung, der man auch sonst bei Arithmetikern nicht selten begegnet: daß die Objekte der mathematischen Wissenschaft an sich existieren, und diesen an sich existierenden Objekten Eigenschaften zukommen können, denen unser stets endliches Denken nicht gewachsen sei. Wollte man uns nur sagen, wie wir es anstellen sollen, ein nicht gedachtes Objekt existierend zu — denken. Was nicht durch mathematisches Denken gerechtfertigt werden kann, darf auch die Mathematik nicht setzen. Die Existenz mathematischer Objekte kann verständlicher Weise nichts anderes besagen, als daß sie in den Gesetzen des mathematischen Denkens begründet seien.

Es mag befremden, daß ich sagte, der Fehler sei, oder scheine wenigstens, derselbe in der Argumentation Dedekinds. Aber setzt nicht auch sie die Existenz des einzigen Wertes x, welcher der sich ohne Grenzen verengenden Lücke des rationalen Systems entspricht, vollends die Existenz „der" Schnittwerte überhaupt in gleicher Weise voraus: als Existenz mathematischer Objekte, die doch mit dem mathematischen Denken — welches stets im Endlichen verbleiben müsse — nicht erreichbar sei? Mit welchem Recht setzt man beides voraus? Mit dem Rechte des Bedürfnisses. Aber das ist die Bequemlichkeit der Willkürdefinitionen, durch die man ein logisches Genügen so lange nicht erzielt, als nicht das logische Mittel erfunden ist, aus Hunger Brot zu machen.

Das Bedürfnis ist gewiß unabweislich. Geometrie beweist, daß das Verhältnis zwischen Seite und Diagonale des Quadrats auszudrücken wäre gemäß einer Zahlproportion

$$1 : x = x : 2,$$

d. h. sie fordert die mittlere Proportionale zwischen 1 und 2, oder den Zahlwert $x = \sqrt{2}$. Eine existierende Größe verlangt eben einen Ausdruck in der Zahl; und sofern die Größe stetig sein soll, wie von der räumlichen, desgleichen der zeitlichen Größe, woraufhin immer angenommen wird, so ist dadurch die Zahlreihe selbst als stetige gefordert. Aber auch ohne jede Rücksicht auf das Bedürfnis der Geometrie, in reiner Arithmetik ist die mittlere Proportionale zwischen 1 und 2, ist überhaupt das Irrationale und um seinetwillen die Stetigkeit der Zahl unentbehrlich, wenn auch nur die einfachsten Rechnungsarten allgemeine Anwendbarkeit behalten sollen. Nur soll man nicht immer wieder die Unumgänglichkeit der Forderung verwechseln mit ihrem Erfülltsein.

§ 5. (*Lösungen von Weierstraß, Cantor, Pasch, Veronese.*) Trotz allem Gesagten lag in Dedekinds Erklärung der wahre logische Grund der Stetigkeit verborgen, aber eben verborgen; es war noch nötig, ihn ans Licht zu ziehen. Daß er nicht zutage kam, hatte seinen wesentlichen Grund darin, daß immer noch vom Endlichen, Diskreten, Rationalen als dem zweifellos Gegebenen und Bestimmten ausgegangen wurde und dann durch irgendeine bestimmte Beziehung unter Rationalem das Irrationale zur Bestimmung gebracht werden sollte. Das konnte ein für allemal nicht gelingen. Durch keine Kunst läßt sich aus Rationalem Irrationales, aus Diskretem Stetiges machen. Es muß vielmehr gezeigt werden können, daß der nicht rational, d. h. endlich und diskret bestimmte Wert in sich etwas ist und in sich bestimmt ist, ja aus dem Boden des Unendlichen, aus dem er erwächst, eine gediegenere Bestimmtheit zu schöpfen vermag, als die dem bloß endlich bestimmten Werte zukäme. Den rein mathematischen Ausdruck dieses richtigeren Weges sehe ich darin, daß Weierstraß und Cantor[1]) die konvergente unendliche Reihe selbst (bei Cantor: Fundamentalreihe) als in sich ebenso bestimmtes mathematisches Gebilde, wie die rationalen Zahlen, allem voraus aufstellen und von diesem dann beweisen, wie die Begriffe gleich, größer, kleiner, die arithmetischen Grundoperationen und damit alle Beziehungen des Mehr und Weniger im Stellverhältnis wie im metrischen Verhältnis auf sie, in Verbindung mit rationalen Werten wie unter sich, gegründete Anwendung finden. Und dasselbe leistet in vorzüglich durchsichtiger und einfacher Weise Pasch [*139*] durch den Begriff der „Zahlstrecke". Auf solche Weise wird — wie Cantor klar ausspricht[2]) — der Grenzwert der unendlichen Reihen nicht mehr „präsumiert"; es ist gar nicht mehr nötig, ihn zu präsumieren, denn es ergibt sich, daß die irrationale Zahl „vermöge der ihr durch die Definitionen gegebenen Beschaffenheit eine ebenso bestimmte Realität in unserem Geiste hat wie die rationale, selbst wie die ganze rationale Zahl, und daß man sie nicht erst durch einen Grenzprozeß zu gewinnen braucht, sondern vielmehr im Gegenteil durch ihren Besitz von der Tunlichkeit und Evidenz der Grenzprozesse allgemein überzeugt wird". Es ist mehr zu sagen: es ist nach dieser Betrachtungsweise überhaupt kein Grund mehr, zwischen der Reihe und ihrem Grenzwert zu unterscheiden; die Reihe stellt selbst, als in sich bestimmtes Gebilde, den neuen Wert dar; wie denn Pasch ausdrücklich die den irrationalen Wert definierende Reihe als Zahlstrecke ohne Begrenzung bezeichnet. Aber auch Cantor erwähnt mit Zustimmung, daß, durch ihn angeregt, Heine die Irrationalen einfach durch die Reihen selbst ausgedrückt habe.

---

1) A. 21, § 9 u. 10. 2) A. 21, 568.

Auf diese Weise bleibt kein Raum mehr für unsere vorigen Bedenken. Indem die konvergente unendliche Reihe in sich eindeutig bestimmt und damit zugleich alle Verhältnisse des Mehr und Weniger zu jedem gegebenen rationalen Wert (sowie der irrationalen untereinander) bestimmbar sind, ist allem genügt, was für den rechnerischen Gebrauch des Irrationalen erforderlich ist. Das in logischer Hinsicht entscheidend Wichtige aber ist, daß hiermit der Überschritt in eine neue Wertordnung vollzogen ist; nämlich es wird nicht mehr bloß eine unbeschränkt fortsetzbare Folge rationaler Werte, die man sich etwa in Aristoteles' Weise immer einen an die Stelle des anderen tretend zu denken hätte, sondern vielmehr die Allheit eines Wertgebietes gesetzt, kraft welcher die Reihe im Endlichen unbeschränkt fortschreitender Setzungen ein neues Ganzes als in sich so bestimmtes Denkgebiet setzt, als nur irgend die rationalen Werte bestimmt gedacht werden mögen. Das ist der neue Denkschritt, vor dem man zurückscheute und der doch unerläßlich war, wenn die „Existenz" des Irrationalen legitim begründet und nicht erschlichen werden sollte.

Auch hier aber blieb es Veronese vorbehalten, die (soviel ich sehe) letzte Präzision, die durch rein mathematische Mittel erreichbar war, zu erreichen. Er zeigt überzeugend[1]): Aus den im rationalen Bereich geltenden Gesetzen folgt nicht, daß ein Wert außerhalb des rationalen Bereiches existieren muß, „es sei denn, man wüßte schon", daß er existiert. Daher kann die Existenz solcher Werte nur durch eine neue „Hypothese" (seine Hypoth. VI, § 96) eingeführt werden, die aber, im Einklang mit der Aufstellung der ins Unendliche fortgehenden Reihe von „Unendlichen", unangreifbare Berechtigung hat. Denn diese gestattet ohne weiteres, Werte, die durch keine auch unbegrenzte Folge rationaler, d. h. durch die gegebene Einheit bestimmbarer

1) Grundz. [*175*], Einl. § 96, Bem. I.

Werte punktuell bestimmt sind, als dennoch punktuell bestimmt zu setzen. Eben diese allgemeine Voraussetzung ermöglicht aber auch, einen schärferen Begriff der Stetigkeit zu geben. Nach Veronese ist auch das durch die Einstellung der in Bezug auf die gegebene Einheit irrationalen Werte geschaffene System nur relativ, eben in Bezug auf diese Einheit stetig, während dasselbe System in Bezug auf eine andere, im Verhältnis zu jener unendlich kleine Einheit wiederum unstetig sein kann. Im absoluten Sinne ist das, einem in Bezug auf die gegebene Einheit unbegrenzt kleinen Segment XX' entsprechend gesetzte „Element" (der Grenzpunkt) vielmehr ein „Segment" (Grenzsegment), das nur in Bezug auf diese Einheit einem Element gleichzusetzen ist. Erst wenn die Veränderlichkeit nicht bloß in Bezug auf eine bestimmte gegebene, sondern in Bezug auf jede Einheit verstanden würde, würde das Grenzelement absolut einzig, d. h. die Differenz XX' absolut Null werden. Indessen ist nicht nur kein Grund, ein letztes, absolut Unendlichkleines zu setzen, sondern es ist, zur Wahrung der Gleichmäßigkeit, sagt Veronese, vielmehr anzunehmen, daß die Reihe der Ordnungen der unendlich kleinen Gebiete selbst unbegrenzt sei.[1] Es ist[2] nur eine im Interesse der Gleichförmigkeit der Ausdrücke gewählte Redeweise, wenn die Null als das absolut Unendlichkleine in Bezug auf die absolute Einheit (d. h. in Bezug auf jedes beliebige Segment als Maßeinheit) bezeichnet wird; in Wahrheit darf von gar keinem absolut Unendlichkleinen die Rede sein. Indem also die Definition der Stetigkeit durch die Einstellung der Reihenzahlen ausgedehnt wird auf die unendlichen Ordnungen unendlichkleiner Einheiten, erhält erst die Stetigkeit selbst absoluten Sinn.[3]

Diese ganz radikale Fassung des Begriffs des mathema-

1) § 100, Bem. I, 5); ebenda Hyp. VII. 2) Ebenda, Def. I.
3) Hyp. VIII und Def. I, § 101.

tisch Unendlichkleinen und damit des Stetigen erscheint nicht bloß zulässig, sondern notwendig, sobald nicht mehr durch das sogenannte Archimedische Prinzip (Ausmeßbarkeit der Größe durch irgendeinen Teil) die absolute Grenze der zulässigen Zahlsetzungen bestimmt sein soll. Dies Prinzip bedeutet eben die stillschweigende Voraussetzung des Beharrens auf der endlichen Teilung. Es war aber die Voraussetzung auch der Dedekindschen Erklärung; einzig durch das Überschreiten dieser Voraussetzung war über Dedekind wirklich hinauszukommen und damit das Irrationale als rechtmäßiges mathematisches Gebilde zu begründen. Also hat Cantor richtig gesehen, daß die Anerkennung des Irrationalen in seiner strengen Bedeutung die des Transfiniten einschließt. Jene Voraussetzung hat in der Tat keine Notwendigkeit mehr, sobald man nicht, nach der alten Aristotelischen *petitio principii*[1]), das Endliche als das allein Existierende von vornherein annimmt. Das „Archimedische Prinzip" ist also wirklich, wie bereits oben gesagt wurde, eigentlich die Definition der Endlichkeit einer Größe.

Das Irrationale ist, in Bezug auf die gegebene Einheit, d. h. aber rational, nur auszudrücken durch die Konvergenz unendlicher nichtperiodischer Reihen. Was heißt es denn, das Irrationale rational ausdrücken? Es heißt, es einem Maßstab unterwerfen, der auf es, eben als das Irrationale, nicht paßt. Dieser Ausdruck ist notwendig, um das Irrationale mit dem Rationalen überhaupt vergleichbar zu machen. Aber genau als das Irrationale kann es durch diesen Ausdruck selbst nicht gegeben werden. Das war der Grund, weshalb die frühere, durch Dedekind zur schärfsten Fassung gebrachte Deutung des Irrationalen nicht

1) Diese wird offenkundig, wenn Aristoteles z. B. sagt (Phys. 206 a), ποcὸν heiße überhaupt ποcόν τι z. B. δίπουν, τρίπουν, d. h. das Soundsoviel einer gegebenen Einheit, womit ein unendliches Quantum von vornherein ausgeschlossen ist.

befriedigte; es war der Grund der doppelten *petitio principii*, die wir oben hervorzuheben hatten. Wie nämlich das Irrationale überhaupt durch die unendliche Reihe, insofern sie aus rationalen Gliedern besteht, nicht gegeben werden kann, so vollends nicht die Allheit der irrationalen Zahlen. Eine Definition z. B. durch die überhaupt möglichen Dezimalbrüche (die man erschöpfend zu geben glaubt, indem man sich jede Dezimalstelle der Reihe nach durch die Zahlen 0 bis 9 besetzt denkt) oder irgendeine dieser ähnliche hilft der Schwierigkeit offenbar nicht ab, bestätigt vielmehr nur die Unmöglichkeit einer erschöpfenden Definition. Man zählt doch immer nur mit 0, 1, 2 . . ., aber von 0 zu 1, von 1 zu 2 usf. im Zähler bleibt logisch immer derselbe Sprung, gleichviel welche Potenz von 10 (oder sonst einer Zahl) als Nenner angenommen ist. Der Grund der Unmöglichkeit liegt aber ersichtlich in dem Festhalten an der Forderung der Meßbarkeit durch die einzige ursprünglich angenommene Einheit. Nun mag man sagen: auch wenn man auf diese Forderung verzichte und die unendlichen Ordnungen von Unendlichkleinen mit Veronese einführe, so werde hieran nichts geändert, da in Bezug auf jede gewählte Einheit dasselbe gelte. Aber eben in dem prinzipiellen Hinausgehen über jede wie auch immer gewählte Einheit zu einer neuen liegt der Überschritt zur echten Unendlichkeit und damit Stetigkeit der Zahl. Auch Veronese vermag nicht und versucht gar nicht das Unmögliche, aus Diskretem Stetiges zu machen; er stellt im Gegenteil das absolute Hinausgehen der Stetigkeit über jede, und wäre es unendlichfach unendliche Diskretion unumstößlich fest.

So allein kommt endgültige Klarheit in die Sache. Es wird die Zahl zum reinen und adäquaten Ausdruck der Denkgesetzlichkeit selbst in ihrem ganzen Umfang, die nichts anderes ist als Gesetzlichkeit der Relation, gültig für Relationen von Relationen usf. ohne Schranken. Es sollte dann nur auch von keinem „Geheimnis“ der Stetigkeit weiter die Rede sein [1]), in welches es unserer „Vorstellung“ nicht gestattet sei, einzudringen. Gewiß ist die Stetigkeit absolut undurchdringlich für unser sinnliches Vorstellen, aber für dieses ist überhaupt jeder reine Denkgegenstand undurchdringliches Geheimnis. Es dürfte ebensowenig die Annahme des Stetigen noch in irgendeinem Sinne auf das Zeugnis der „Anschauung“ gestützt werden. Stetigkeit kann so wenig angeschaut wie empfunden, sie kann nur gedacht werden, da sie nichts anderes als das letzte Grundgesetz des Denkens selbst bloßlegt und zum wissenschaftlich genauen Ausdruck bringt. Aber in der Berufung auf die Anschauung verbirgt sich hier wie oft die richtige Ahnung einer neuen, nur noch nicht klar als solche erfaßten Denkleistung. Man meinte das Diskrete mit dem reinen Denken (das zunächst sondernd verfährt) zu durchdringen, während man noch nicht sah, welches (natürlich andere) reine Denken es ist, welches die Stetigkeit begründet; so schob man sie dann ab auf die höchst fragwürdige Instanz der Anschauung; immerhin mit dem Vorbehalt, daß diese „als notwendiger Bestandteil weder in der Fassung der Sätze oder der Definitionen, noch in den Beweisen auftreten dürfe“. Veronese selbst hat dagegen anderwärts [2]) die Mathematik des Unendlichen von jedem Zwang der Berufung auf Anschauung mit vollem Recht freigesprochen. Die unendlich großen und unendlich kleinen Segmente, heißt es dort, werden „nicht mittels der Anschauung bestimmt, sondern durch einen möglichen geistigen (d. h. reinen Denk-) Akt, und gerade dies verbürgt ihre geometrische Möglichkeit“; eine „Möglichkeit“, die offenbar auch für ihn zugleich Existenz und Notwendigkeit ist.

Indessen ist auch mit diesem allen in logischer Beziehung

---

1) Veronese, S. 56, Anm.
2) Im Anhang der Grundz., S. 704f.

noch nicht die letzte Klärung gewonnen, sondern es bleibt hier noch eine fernere Beleuchtung notwendig, die nicht bezwecken kann, die Sicherheit der Einführung des Irrationalen noch über den erreichten Grad zu erhöhen, wohl aber darüber volles Licht zu geben, was mit der Einführung dieser Begriffe in logischer Hinsicht geleistet, welche eigentümliche Gesetzlichkeit des Denkens darin zu bestimmtem Ausdruck gebracht ist.

§ 6. (*Logische Beleuchtung des Problems. Die Stetigkeit und die qualitative Allheit.*) Es war von Anfang an falsch, die Stetigkeit definieren zu wollen durch die angebbare Möglichkeit der Diskretionen, da sie vielmehr das Hinausgehen über jede Diskretion besagt. Mit anderen Worten: es war falsch, die Stetigkeit definieren zu wollen durch eine Allheit selbst quantitativer Art, da durch die Quantität, auch durch eine bloß quantitativ verstandene Allheit, genau nur die Diskretion zu Begriff gebracht wird. Damit aber kommen wir erst zur Wurzel der ganzen Schwierigkeit, die zugleich den Grund ihrer Lösung enthält. Die Stetigkeit besagt vielmehr die qualitative Allheit, die jeder quantitativen logisch vorausliegt und sie erst möglich macht.

Im Sinne der reinen Quantität heißt „alle" soviel wie „sämtliche", alle zusammengenommen, alle der Reihe nach gesetzt, und dann vereinigt. Die Betrachtung geht also von den Einzelnen aus und nimmt diese nur hinterher gruppenweise zusammen. So sind „alle" entweder eine bestimmte Zahl oder doch eine solche, die bestimmt sein sollte, und es erscheint als Mangel, wenn sie sich wirklich nicht bestimmbar erweist. Im Sinne der Qualität dagegen bedeutet die Allheit vielmehr die Gattung, d. h. die Identität einer inhaltlichen Bestimmung, unter der die in einer Reihe sich ordnenden, insofern in diskreter Quantität auseinandertretenden Verschiedenheiten als in ihrer Wurzel Eins gedacht, oder als bloße, doch gesetzmäßige Abwandlungen oder Entwicklungen desselben Einen erkannt werden. Hier liegt also die Allheit, als Ursprungseinheit, zugrunde, und werden nur unterhalb ihrer, in Ableitung aus ihr, die Einzelnen gesetzt. Also war es überhaupt falsch, das Kontinuum aus den diskreten Werten zusammensetzen zu wollen; die *compositio continui* war nichts als ein falsch gestelltes Problem. Das Unendliche vielmehr liegt, als Ursprung, zugrunde.

Es ist zuletzt nichts als das logische Grundverhältnis der Denkkontinuität zur Diskretion der sondernden Setzung im Denken, was in dem Verhältnis der Zahl als Kontinuum zu den Zahldiskretionen seinen bestimmten, wissenschaftlich entwickelbaren Ausdruck sucht und findet. Sähe man in der Zahl selbst nur den Ausdruck des Verfahrens der Quantität, schon als Verfahren definiert sie zugleich qualitativ eine Gattung, welche den bestimmten quantitativen Setzungen, und zwar allen unterschiedslos, sich rein qualitativ überordnet und allen vorhergeht, da keine quantitative Setzung im besonderen anders möglich ist als gemäß dem allgemeinen Gesetz des Verfahrens quantitativer Setzung überhaupt.

Mit gutem Grunde unterschieden daher schon die Alten zwischen „der“ Zahl im Sinne von: alle Zahl, oder die Zahl als Gattung, und den Zahlen. Ein anderes übergeordnetes Kontinuum als das der Zahl im Gattungssinne ist in der Tat nicht zu suchen noch zu verstehen. Zwar ist es richtig, daß das Kontinuum nicht anders definiert werden kann als durch das allbefassende Gesetz, gemäß welchem diskrete Zahlsetzungen überhaupt nur zulässig sind; nicht aber wird damit das Kontinuum definiert durch die diskreten Setzungen, als ob diese vorangingen. Es kommt nur noch darauf an, zu bestimmen, was durch den Gattungsbegriff der Zahl genau gedacht, d. h. welches das Gattungsmerkmal ist, durch das die Allheit der möglichen Diskretionen, nicht als quantitative, sondern qualitative Allheit, gegeben wird. Diese Frage aber setzen die vorigen Erwägungen uns in Stand zu beantworten. Bliebe das Verfahren der Zahl notwendig beschränkt auf die rationale Beziehung zu einer einzigen, absolut gedachten, im schlechten Sinne „gegebenen“ Einheit, so bliebe damit sein Bereich selbst willkürlich beschränkt. Seine Erweiterung kann nur bestehen in einer Erweiterung eben des Verfahrens der Zahlsetzung. Diese ist es, die mit dem „Grenzverfahren“ angestrebt, aber nicht in einwandfreier Weise erreicht war. Worin aber liegt der logische Kern dieser Erweiterung?

Das hier entscheidende Merkmal verbirgt sich in einem Begriff, dessen fundamentale Wichtigkeit von den Mathematikern selbst noch nicht seit langer Zeit erkannt ist: dem Begriff des Zwischen. Weshalb durften die „Lücken“ oder „Schnitte“ des rationalen Systems, weshalb überhaupt das Spatium zwischen irgendwelchen rationalen oder auch irrationalen Werten, das Wertsegment als „existierend“ angenommen werden, existierend unter arithmetischem Gesichtspunkt; ohne doch durch einen diskreten Zahlwert bestimmt oder bestimmbar zu sein? Gibt es etwa hier[1]) ein Demokriteisches μὴ ὄν, ein Zahlvakuum, in das die diskreten Zahlen erst, wie die Atome in den leeren Raum, eintreten? Ja; man setzt der Sache nach ein solches arithmetisches „Nichtsein“, und zwar, wie Demokrit sein μὴ ὄν, als dennoch und erst recht seiend: um in es die Seienden engerer Bedeutung, die diskreten Zahlwerte, setzen zu dürfen. Ja, jenes Nichtseiende erweist sich gerade an Seinswert ursprünglicher als das enger bestimmte Sein der diskreten Zahlwerte, da es die Grundbedingung darstellt, die allein die letzteren zu setzen möglich macht, und die fortgilt über jede je vollzogene diskrete Setzung hinaus.

Um so weniger aber könnte es befriedigen, dies μὴ ὄν nur negativ zu definieren durch das Nichterfülltsein mit den

1) In einem andern Sinne als oben S. 122.

eigentlich alleinigen, nämlich diskreten Setzungen, oder die Nichtbesetzung mit solchen (Lücke, Schnitt); oder auch durch die bloße Potentialität solcher Setzungen, obwohl diese, sofern sie auf den bedingenden Wert des unendlichen „Leeren“ für das Volle der diskreten Setzungen hinweist, der positiven Bestimmung schon um einen Schritt näher kommt. Es genügt in letztem Betracht eben nicht, zu sagen, daß es als Bedingung vorhergeht; sondern eben als vorhergehende Bedingung muß es, wenn auch nicht außer Beziehung zu den zu setzenden Diskretionen, doch in dieser Beziehung unabhängig, durch ein eigenes positives Merkmal derart bestimmt werden, daß dadurch den zu setzenden Diskretionen das Gesetz vielmehr vorgeschrieben, als etwa von diesen abgeleitet wird. Welches nun dies positive Merkmal sei, ist jetzt nicht mehr schwer zu sagen. Wie der Raum das Gesetz der Stellenordnung allgemein vorschreibt für alles in ihm zu setzende Reale, vor aller Maßbestimmung, unabhängig von ihr, die vielmehr umgekehrt durch jene erst möglich wird, so ist es das Gesetz der Stellordnung überhaupt, welches vor aller diskreten Zahlsetzung und für sie, insbesondere vor aller Maßbestimmtheit, das positive Grundmerkmal der Zahl als Gattung ausmacht. Dies Grundmerkmal der Stellordnung überhaupt, nämlich die Grundbeziehung des Vor und Nach in der Zählung und damit des Mehr und Weniger, liegt in der Tat der Unterscheidung des Rationalen und Irrationalen im letzten Grunde voraus, denn sie liegt überhaupt diesseits aller metrischen Beziehung, auf Grund deren erst Rationales und Irrationales unterscheidbar sind. Dies findet seinen bestimmtesten Ausdruck wiederum bei Veronese, durch die Einführung der „Skala“ (Messung durch eine bestimmte Einheit), lange nachdem die Reihe überhaupt, nämlich auf Grund der bloßen Ordnungsbeziehung, gesetzt, insbesondere auch die Homogeneïtät eingeführt ist. Die Unabhängigkeit der Positionsbeziehung von jeder metrischen Beziehung zeigt sich übrigens durchweg in den Beweisen der Existenz des Irrationalen darin, daß das Irrationale als genügend bestimmt gilt, wenn bewiesen ist, daß sein Verhältnis des Mehr und Weniger, d. h. des Vorhergehens und Nachfolgens in einer Reihe von Zahlwerten, gegenüber allen bis dahin gesetzten und noch zu setzenden Werten bestimmbar ist; bestimmbar nicht notwendig durch eine abgeschlossene Gleichung, sondern ebensowohl durch ein, sei's auch unendliches, System von Ungleichungen. Dies selbst, daß zur Bestimmung eines Zahlwertes nicht die Gleichung erforderlich ist, sondern nach bestimmten Maßgaben die Ungleichung genügt, beruht darauf, daß das Grundmerkmal der Zahl die Stellordnung oder die Beziehung des Mehr und Weniger überhaupt, und nicht die auf das Maß gestützte Beziehung der Gleichheit ist.

Man spricht von einer „Erweiterung" des Zahlbegriffs durch die Einführung des Irrationalen. Die Erweiterung eines Begriffs kann aber rechtmäßig nur bedeuten die Aufhebung einer Beschränkung, die in dem letzten Gattungsmerkmal des fraglichen Begriffs in der Tat nicht lag. Verträgt und fordert ein Begriff eine Erweiterung, so muß er zuvor zu eng gefaßt gewesen sein. Die hier fragliche Erweiterung hat im Vorstehenden ihre Erklärung gefunden. Sie läßt sich auch so ausdrücken, daß von der Forderung der Kommensurabilität (Meßbarkeit durch eine gemeinsame Einheit) abgesehen wird. Ich hatte früher zur Lösung des Problems des Irrationalen mich der Hilfsannahme, eigentlich der Fiktion verschiedener Zählungen, nämlich mit verschiedenen, gegeneinander inkommensurabelen Einheiten bedient. Diese Erklärung leistete gute Dienste zur deutlichen Herausstellung der Schwierigkeit; zu einer wirklichen Lösung ist auch sie nicht brauchbar, und in der Tat auch nicht notwendig. Verschiedene Zählungen sollten es nur darum sein, weil für eine und dieselbe Zählung bis dahin Kommensurabilität als Bedingung angenommen war. Nachdem aber diese Bedingung sich in rechtmäßiger Weise überschreitbar erwiesen hat, ist es zulässig, die irrationalen Werte mit den rationalen von Anfang an in einer Reihe vereint zu setzen. Die Einheit der Reihe ist genügend garantiert durch die Einheit des Grundgesetzes der Folge der Glieder aufeinander oder der Beziehung des Mehr und Weniger, nachdem diese als das die Zahl überhaupt konstituierende Merkmal erkannt ist. Ohne dies gemeinsame Merkmal hätte das Aufeinanderfallen der inkommensurabelen Reihen der „Richtung" nach, wie es in jener Interpretation angenommen wurde, überhaupt keinen sicheren Sinn. Die Plus-Minus-Richtung der Zahl ist in der Tat nur ein anderer Ausdruck jenes Grundmerkmals der Aufeinanderfolge der Glieder, welches überhaupt die Zahl konstituiert. Nur weil dieses Merkmal von vornherein den untereinander inkommensurabelen Reihen gemeinsam war, ließen sie sich der Richtung nach aufeinanderfallend denken; die Einheit der Richtung ist eben bestimmt durch die immer gleiche Relation des Weniger und Mehr, als des in der Reihe Vor- und Nachgesetzten. Eben diesem gemeinsamen Merkmal zufolge brauchten aber die Reihen nicht erst künstlich zur Deckung gebracht zu werden, sondern durften von Anfang an als der Richtung nach einzige, weil überhaupt ihrem Wesen nach einzige Reihe „der" Zahl (d. i. Abstufung nach dem Mehr und Weniger) gesetzt werden.

§ 7. (*Das Transfinite.*) Ist es somit allgemein der Rückgang auf die Qualität, wodurch das Problem der Stetigkeit bewältigt wird, so fragt es sich weiter nach den verschiedenen Gestalten, in denen die Qualitätsbeziehung an der Zahl sich ausdrückt und entfaltet.

Das Vorhergehen der Qualität überhaupt vor der Quantität begründet, wie sich zeigte, durch das Gattungsmerkmal des Vor und Nach oder der Positionsbeziehung überhaupt die Stetigkeit der Zahl. Diese enthält nun schon die ermöglichende Bedingung für die Zahlstrecke, als definiert durch irgendein Gesetz der Entwicklung einer Folge von Werten (Reihe, insbesondere als unendliche), welche an die Forderung eines rational bestimmten Grenzwertes nicht mehr gebunden ist (Irrationalzahl). Sie begründet aber ganz allgemein die Möglichkeit, unendliche Folgen von Werten, die durch irgendein Gesetz gegeben werden, in *Inbegriffen* zu vereinigen, die nicht gleichsam von außen, durch endliche Grenzwerte, sondern in sich selbst, rein durch ihr erzeugendes Gesetz, also durch einen *Universalbegriff* bestimmt sind. Solche können dann untereinander durch Beziehungen verknüpft sein, die wiederum durch qualitative, nicht quantitative Bestimmungen definiert werden. Ein „unendlichkleines" Segment ist, obwohl stets durch irgendeine gesetzmäßige Beziehung zu einem gegebenen endlichen Bereich gesetzt, doch als solches nicht durch eine Beziehung quantitativer Art zur Einheit des endlichen Bereichs definierbar. Es ist in Beziehung auf ihn nur „Grenze" und als solche der Quantität nach Null; während es an sich nicht vom Zahlwert Null sein, sondern in einer anderen Zahlordnung einen geltenden Wert haben soll, dem gegenüber wieder ein anderes Unendlichkleines gesetzt, d. h. der Überschritt wieder in eine andere Ordnung von Zahlwerten vollzogen werden kann, und so unbeschränkt weiter. So ist der Punkt in der Dimension der Linie betrachtet Null, ebenso die Linie in der zweidimensionalen, die Fläche in der dreidimensionalen Ordnung. Abstrahiert man nun hierbei von der Lagebeziehung der Dimensionen (die uns hier noch nicht zu beschäftigen hat) und beachtet allein das Verhältnis zum jedesmaligen Nullwert und der zugehörigen Größenerstreckung (Extension) überhaupt, so gewinnt man ein zutreffendes Bild der verschiedenen Ordnungen des Unendlichen und Unendlichkleinen. Man kann sich aber ebensowohl in einer einzigen Gesamtordnung, dem „linearen Kontinuum", das man sich in gewöhnlicher Weise durch eine einzige Gerade repräsentiert denken mag, dasselbe Verhältnis in folgender Art klar machen. Man stelle in üblicher Weise die Zahleinheit, die als Ausgang dient, als begrenzte Strecke dar, so sind innerhalb ihrer unendliche Punkte setzbar. Man halbiere etwa die Einheit im Punkte $\frac{1}{2}$, die Hälften in den Punkten $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ usf., so liegt die ganze unendliche Folge der so entstehenden Punkte eingeschlossen zwischen den Punkten 0 und 1, ohne diese beiden Grenzen je zu erreichen. Man hat also innerhalb dieser Grenzen unendliche, in Bezug auf die angenommene Einheit unendlichkleine Strecken, jede in Bezug auf diese vom Betrag $\frac{1}{2^\infty}$, der sich als Einheit in einer neuen Zahlordnung betrachten und genau so behandeln, d. h. wieder unendlich teilen läßt, und so ohne Grenzen weiter. Es kann nun aber, da die Einheit überhaupt kein Absolutes ist, sondern die Bedeutung des Grundelements allemal nur für eine bestimmte Zählordnung hat, ebensowohl die erst angenommene Einheit als unendlichklein gegenüber einer höheren angesehen, d. h. sie kann unendlich vielmal gesetzt und diese ganze unendliche Folge ebenso wie die der Unendlichkleinen der vorigen Ordnung zwischen zwei Werten 0 und 1 einer nächsthöheren Wertordnung eingeschlossen gedacht werden, dann diese wieder ebenso, und so fort ebenfalls ohne Grenzen. So ergibt sich von irgendeinem willkürlich gewählten Ausgangswert Null an in einfachster Weise die Cantorsche Reihe, oder vielmehr die Veronesesche:

$$0, 1, 2 \cdots \omega, \omega + 1, \cdots 2\omega, 2\omega + 1, \cdots n\omega \cdots \omega\omega \cdots,$$

d. h. nicht nur ein Unendliches, sondern unendliche Folgen von Unendlichen, und unendliche Folgen solcher Folgen, und so immer weiter. Die Möglichkeit dieser ganzen Reihe bestimmter Unendlichkeiten ist, wie schon bemerkt, einfach darin begründet, daß auch eine unendliche Folge durch irgendein Gesetz, nach dem sie gebildet ist, gegeben und bestimmt sein kann, als ein „Inbegriff“, der insoweit nur eine qualitative oder Gattungseinheit darstellt, in dem Fall aber, daß diese unendliche Folge zwischen irgendwelchen Grenzwerten des nächst übergeordneten Gebietes eingeschlossen ist, innerhalb dieses einen Umfang oder Bereich ausmacht, über den hinaus ein fernerer existiert, der mit anderen endlichen oder wiederum unendlichen Bereichen Vergleichungen auch quantitativer Art zuläßt.

Die Vergleichbarkeit wird hergestellt durch irgendeine gesetzmäßige Zuordnung von Glied zu Glied. Diese ergibt nur, wenn jeder der verglichenen Inbegriffe durch eine erschöpfbare Schrittzahl darstellbar ist, den gewöhnlichen Begriff der Gleichheit und die entsprechenden des Mehr und Weniger; wenn dagegen unendliche Inbegriffe in Vergleichung kommen, so erfahren diese selben Begriffe eine Erweiterung, indem die gegenseitig eindeutige Zuordnung festgehalten, auf die Forderung der erschöpfbaren Schrittzahl aber verzichtet wird. Es können dann natürlich die Gesetze der Beziehungen des Gleichviel, Mehr und Weniger nicht in jeder Hinsicht unverändert in Geltung bleiben; dies spricht sich aus in den bekannten „Paradoxieen des Unendlichen“ [1]), die fast immer auf die eine fundamentale Abweichung zurückgehen, daß eine überendliche Menge einer Teilmenge ihrer selbst äquivalent sein kann. So ist, um nur an Allernächstliegendes zu erinnern, der Reihe der positiven ganzen Zahlen die Reihe der positiven geraden Zahlen äquivalent, da sich jeder positiven ganzen Zahl ihr Doppeltes zuordnen läßt und auf diese Weise den sämtlichen ganzen die sämtlichen geraden Zahlen gegenseitig eindeutig entsprechen. Es scheint also im Unendlichen nicht wie im Endlichen zu gelten, daß das Ganze stets mehr ist als sein Teil; man kann die unendliche Menge geradezu (mit Dedekind) durch diese Eigenschaft definieren, daß

1) Bolzano [*10*].

sie einer Teilmenge ihrer selbst (nicht gleich aber) äquivalent (d. h. gegenseitig eindeutig zuordnungsfähig) ist. Genauer wird man sagen, daß der Begriff des Verhältnisses von Ganzem und Teil nicht völlig derselbe bleibt, wo Unendliches mit in Vergleichung kommt. Nicht das ist zu verwundern, sondern eher, daß, obgleich also die im Endlichen geltenden Beziehungen im Unendlichen nicht unverändert gelten bleiben, dennoch eine Rechnung mit dem Unendlichen widerspruchslos möglich bleibt; daß Beziehungen, in weitem Umfang analog den im Endlichen geltenden, bestehen; daß die Begriffe Gleichviel, Mehr, Weniger und sämtliche Rechnungsarten bei sinngemäßer Abänderung ihrer Gesetze Anwendung leiden und zu sicheren und brauchbaren Ergebnissen führen. Aller Schein des Widerspruchs entspringt (wie Cantor[1]) eingehend gezeigt hat) nur daraus, daß man in jedem Betracht dieselben Beziehungen, die im Endlichen gelten, im Unendlichen wiederzufinden erwartet, während die Übertragung derselben Grundgesetze auf dies ganz andere Gebiet natürlich gewisse Abänderungen zur Folge haben muß. Es sind eben nicht mehr durch eine endliche Schrittzahl bestimmte Summen, mit denen gerechnet wird, sondern überendliche Inbegriffe. Unterschiedslos auf beide erstreckt sich der Cantorsche Grundbegriff der „Mächtigkeit“, beruhend auf der gegenseitig eindeutigen Zuordnung von Glied zu Glied; aber dieser behält eben nur bei endlichen Inbegriffen den bisherigen Sinn der Summe, während die Mächtigkeiten unendlicher Inbegriffe nicht im gleichen Sinne Summen darstellen, daher auch nicht allen den Gesetzen unterliegen, die für endliche Summen gelten. Es darf besonders auch nicht übersehen werden, daß die Mächtigkeit einer Menge und die Menge selbst nicht dasselbe sind[2]); wenn auch der Unterschied in erkenntniskritischer Beziehung nicht einwandfrei damit be-

1) Z. 91, 122ff. 2) Ebenda.

zeichnet ist, daß die letztere uns als „Objekt" gegenüberstehe, die erstere, als ihr „abstraktes Bild", nur in unserem Geiste existiere. Die Gesamtheit z. B. aller endlichen ganzen positiven Zahlen (ν), sagt Cantor, ist der „Entität" nach „reicher" als die aller geraden Zahlen (2ν), die eine Teilmenge von ihr bildet; aber doch kommt beiden dieselbe Mächtigkeit zu. „Beides ist sicher und keines steht dem andern im Wege, wenn man nur auf die Distinktion von Realität und Zahl achtet". Die Distinktion ist wenigstens in dieser Fassung nicht wohl annehmbar; der größere „Reichtum" an Entität, das „Mehr" an Realität verlangt, wie schließlich jeder Komparativ, einen Ausdruck in der Zahl, da die Zahl überhaupt die Abstufung des Mehr und Weniger, jedes Mehr und Weniger bedeuten will. Also wird es in irgendeinem Sinne auch richtig sein, zu sagen, daß die Gesamtheit (ν) aller positiven ganzen Zahlen der Zahl nach mehr ist als die Gesamtheit (2ν) aller geraden Zahlen; aber eben nicht der Mächtigkeit nach, die zwar auch eine arithmetische Beziehung, nur eben von eigener Art ist. Daß aber diese eigenartige Bestimmungsweise auf der Qualität beruht, wird ganz klar, wenn Cantor kurz vorher[1]) sagt: Die Behauptung, der Menge M komme dieselbe Kardinalzahl (Mächtigkeit) zu wie ihrer Teilmenge M', sei gleichbedeutend mit dem Satze: beide Mengen stehen unter einem und demselben Allgemeinbegriff, der durch Abstraktion von der Beschaffenheit und der Anordnung ihrer Elemente gewonnen wird; „seit wann aber wäre ein Widerspruch darin zu sehen, daß der Bestandteil eines Ganzen in irgendeiner Hinsicht unter demselben Universale stehe wie das Ganze?" Nur ist zu fordern, daß genau bestimmt sei, in welcher Hinsicht Ganzes und Teil unter denselben Allgemeinbegriff fallen. Dies ist aber genau bestimmt durch das Verhältnis der gegenseitig eindeutigen Zuordnung, also ist sachlich alles in Richtigkeit.

1) S. 122.

Zur Unfruchtbarkeit verurteilt bliebe freilich die Rechnung mit dem Unendlichen, wenn wirklich, wie früher angenommen wurde, im Unendlichen alle Begriffsgrenzen, die im Endlichen gelten, ineinanderflössen und damit überhaupt alles in einen Nebel völliger Unbestimmtheit und Unbestimmbarkeit zerginge. Aber wenn gewisse Beziehungen, die im Endlichen stattfinden, im Unendlichen nicht mehr gelten, so bleiben deren genug übrig, um eine sichere Rechnung mit zweifellos gewissen und bedeutungsvollen Ergebnissen zu ermöglichen; dies bewiesen zu haben ist besonders das Verdienst Cantors. Der Kern und die wahre Fruchtbarkeit seiner Entdeckung liegt darin, daß es nicht nur ein unbestimmtes Unendliches gibt, welches wesentlich nur durch den Wegfall aller der Bestimmtheiten, die im Endlichen gelten, charakterisiert wäre, sondern eine schließlich wieder unendliche Folge scharf unterschiedener, gegeneinander und gegen den ganzen Bereich des Endlichen in strenger begrifflicher Bestimmtheit abgegrenzter Klassen von Unendlichen und eine sichere Rechnung mit diesen, die nicht nur ebenso exakte Resultate wie die Rechnung mit dem Endlichen liefert, sondern exakte Ergebnisse eben da ermöglicht, wo die aufs Endliche beschränkte Rechnung bei vagen Allgemeinheiten stehen zu bleiben genötigt wäre. So beweist man (um nur ein paar der wichtigsten Resultate zu berühren), daß zwar die Mächtigkeit der Gesamtheit der ganzen Zahlen ($\mathfrak{a}$) identisch ist mit der der Gesamtheit der rationalen und auch der algebraischen Zahlen, aber verschieden von ihr die Gesamtheit der reellen Zahlen oder des linearen Kontinuums ($\mathfrak{c} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{a}}$). Diese wiederum deckt sich mit der jedes noch so kleinen Intervalls des linearen Kontinuums, z. B. von 0 bis 1, andrerseits mit der des Kontinuums von beliebiger, selbst einfach unendlicher Dimensionenzahl (da auch $\mathfrak{c}^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}$), aber sie wird (nach Cantor) überboten durch die Mächtigkeit der Gesamtheit der reellen Funktionen einer oder mehrerer reellen Veränderlichen ($\mathfrak{f} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$). Diese und zahlreiche andere, besonders für die Funktionentheorie folgenreiche Sätze waren nicht zu gewinnen durch eine Rechnung, die im Endlichen stehen bleibt; diese hätte für alle diese Fälle nur den einen unterschiedslosen Begriff „des“ Unendlichen zur Verfügung, welcher dann gleichbedeutend erscheint mit dem des aller Berechnung und Bestimmung Entzogenen; mit dem Dunkel, in dem alle Katzen grau sind.

Die einzige Erweiterung und damit zugleich Berichtigung, deren die Aufstellungen Cantors in prinzipieller Hinsicht noch bedurften, war die Ausdehnung der Relativierung, die Cantor mit dem Begriff des Unendlichen nach oben hin in der Reihe seiner „Alefs“ richtig vollzogen hat, auch nach unten, d. h., die Anerkennung einer jener genau korrespondierenden unendlichen Reihe von Ordnungen des Unendlichkleinen. Diese Ergänzung hat aber, wie wir sahen, bereits Veronese vollbracht. Die entscheidenden Sätze Cantors über die Mächtigkeiten bleiben dabei alle richtig; gewonnen aber wird eine gesicherte Grundlage für die Infinitesimalanalysis in ihrem ganzen Umfang. Ganz abgesehen übrigens von jedem Ertrag an speziellen mathematischen Einsichten erreicht so das ganze System der Unendlichkeitsbegriffe der Mathematik eine durchsichtige Klarheit und innere Folgerichtigkeit, die, einmal errungen, nicht leichthin wieder preisgegeben werden kann.

Wir haben uns nun zur Infinitesimalanalysis den Übergang zu bahnen durch die Betrachtung der Begriffe der Veränderlichen und der Funktion.

§ 8. (*Die Zahl als Größe — Veränderliche — und als Funktion.*) Mit der Überordnung „der“ Zahl über die bestimmten Zahlwerte ist ein wichtiger Begriff im Grunde schon eingeführt, unter dem erst die Zahl tauglich wird, nach der Ahnung der alten Pythagoreer und Platoniker das Sein, oder im bestimmteren Kantischen Terminus: die Realität dem

Denken zu erobern; nämlich der Begriff der Zahl als Größe, d. h. als Veränderliche.

Die Zahl, wie sie bis dahin verstanden wurde, als der bloße Ausdruck des Wieviel, gäbe einen durchaus inkompleten Begriff eines Gegenstandes. Jeder Gegenstand hat Zahl, aber kein Begriff eines Gegenstandes könnte darin erschöpft sein, daß er Zahl (in diesem beschränkten Sinne) ist. Zwar läßt sich die Methode der Zahl in völliger Reinheit entwickeln ohne jede Rücksicht auf noch irgendwie sonst bestimmte Gegenstände. Indem die Mathematik dies tut, schafft sie sich aus der reinen Zahl ein eigenes Objekt, aus der Gesamtheit der denkbaren Zahlbeziehungen eine eigene Welt, die um die ganze übrige Welt der Gegenstände sich nicht zu kümmern braucht. Die Eifersucht, mit der sie über der Reinheit und Selbständigkeit dieser in sich beschlossenen Begriffswelt wacht und alle nicht arithmetischen Begriffe aus der Arithmetik fernhält, kann vom logischen Standpunkt an sich nur gutgeheißen werden. Aber gerade je reiner somit die arithmetische Methode durchgeführt wurde, um so weniger konnte auf die Länge verkannt werden, daß diese Methode einer anderen zu ihrer Ergänzung bedarf, ohne die sie sich selbst nicht vollenden könnte und auch, soweit sie reicht, wie in der Luft stände, für eine wirkliche Erkenntnis der Gegenstände ohne Bedeutung, weil ohne Anwendung bliebe.

Eine Setzung des Denkens, in der nichts gesetzt wäre als — die Setzung selbst, als einzelne, als Reihe einzelner und Zusammenfassung solcher Reihen allemal zu einem Ganzen, und was alles weiter daraus folgt, bliebe zuletzt etwas Unausgedachtes, Unausdenkliches, ein leeres Gedankengespinnst, wie ein System von lauter sorgfältig gezählten Nichtsen. Zahl will doch Zahl von Etwas sein; gefordert ist also eine Methode, gemäß welcher das Etwas, welches gezählt wird, zu setzen sei. Man kann doch nicht ins Unendliche nur immer wieder Zahlen zählen; vielmehr man kann es wohl, aber kann es gewissermaßen nicht wollen, es kann nicht die letzte Absicht des Zählverfahrens sein. Aber ebensowenig dürfte man sich dabei beruhigen, daß die zu zählenden Gegenstände eben anderweitig gegeben werden müssen; daß es, wie durch glücklichen Zufall, eine Eigenschaft sogar jedes irgendwie Gegebenen sei, auch irgendwie zählbar zu sein, so daß freilich der Methode der Zählung die Gelegenheiten der Anwendung nie mangeln werden. Man verlangt vielmehr einen inneren Zusammenhang einzusehen zwischen dem Verfahren der Zählung und einem anderen, mindestens so ursprünglichen Denkverfahren, in welchem das zu zählende Etwas entspringe; man verlangt zu erkennen, daß und wie diese verschiedenen Verfahrungsweisen des Denkens kraft ihrer eigenen Gesetzlichkeit so ineinandergreifen, daß notwendig der Zahl auch stets ein zählbares Etwas, dem Etwas stets die Zahl zu Gebote steht.

Der Ausdruck dieser wesentlichen Beziehung der Methode der Zahl auf eine andere, noch verborgene Methode, ein zählbares Etwas zu setzen, ist nun wohlbekannt und auch den Arithmetikern geläufig, nämlich der Ausdruck der Größe. Das Verhältnis der Begriffe Zahl und Größe (πλῆθος, μέγεθος — *multitudo, magnitudo*) bedarf aber einer genaueren Bestimmung. Allzu oft werden ohne deutliche Begründung, zwar nicht die einzelnen Zahlen, wohl aber irgendwelche zusammengesetzte Zahlgebilde auf einmal Größen genannt; besonders wo Zählungen mit verschiedenen Einheiten in Frage kommen. So sprach man namentlich früher gern von komplexen Größen statt Zahlen; auch bei der Einführung des Irrationalen tritt regelmäßig der Ausdruck Größe auf; ja schon das Verhältnis, auch als bloß durch die Zahl ausgedrückt, wird Größe genannt; und so die Bruchzahl. Fast immer spielt auch eine nähere oder fernere Erinnerung an räumliche Anschauung mithinein; denn das Räumliche vor allem gilt als Größe, nicht bloß Zahl.

Der nächste Grund der Unterscheidung und zugleich engen Verbindung zwischen den Begriffen Zahl und Größe scheint dieser zu sein: Zahl für sich besagt nur das Wieviel, aber nicht das Wieviel wovon. Zwar ist es stets das Wieviel einer gedachten Einheit; was aber diese Einheit sei, braucht solange gar nicht gefragt zu werden, als immer eine und dieselbe Einheit vorausgesetzt wird; sobald dagegen verschiedene Einheiten in Frage kommen, also die mancherlei Zahlausdrücke nicht mehr das Wieviel von Einem und Demselben, sondern von Verschiedenem bedeuten, pflegt man sich des Wortes Größe zu bedienen. Dieses bedeutet dann nicht sowohl das Wiegroß (dieses wird stets ausgedrückt durch das Wieviel der bezüglichen Einheit), sondern man unterscheidet Größe von Größe, sofern die Einheiten, mit denen gezählt wird, verschieden sind. 3, 5, auch $3 + 5$ würde man nicht Größen nennen; aber $3a$, $5b$ und, falls die a und b in irgendeinem Sinne addierbar sind, $3a + 5b$ wird man Größen nennen. Vergleichungsweise wird dann auch wohl die Zahl selbst als Größe bezeichnet; aber darauf verfiele man schwerlich, wenn nicht die „unbenannte" mit der „benannten" Zahl irgendwie in Vergleichung käme; sondern nur sofern man ihre Einheit mit anderen Einheiten vergleicht; so besonders in der komplexen Zahl $a + bi$, d. h. $a \cdot 1 + b \cdot i$, wo a und b gewöhnliche Zahlen sind, 1 und i dagegen verschiedene Einheiten, mit denen gezählt wird, unter denen die Beziehung gilt: $i^2 = -1$.

Nun hat sich uns schon „die" Zahl als begriffliches Kontinuum, als Gattung den bestimmten Zahlwerten übergeordnet. Schon damit wird die Zahl selbst aus dem bloßen Wieviel einer Größe selbst zur Größe; es wird damit dem Wieviel gleichsam ein Substrat gegeben, oder es wird, ohne Anleihe bei der „Anschauung", ohne Einführung irgendwelcher Begriffe, die aus nicht-arithmetischem Bereich stammten, das Wieviel zum Wieviel von Etwas. Es ist ersichtlich das Merkmal der Stetigkeit, welches die Zahl zur Größe macht. Unter den Mathematikern hat dies besonders deutlich Hankel gesehen (*65*; bes. § 12 Anm. und § 13). Das Irrationale rein formal, durch den Grenzbegriff, dem Rationalen zu interpolieren, sagt dieser, sei „der Natur der Sache deshalb ganz unangemessen", weil eben ein solcher Grenzbegriff auf der Vorstellung des Kleinen und Großen und der Anordnung der Zahlen in einer stetigen Reihe beruhe, welche schon den Begriff der extensiven (= stetigen) Größe involviere. Das Irrationale verlange in der Tat zu seiner systematischen Fassung den Größenbegriff. Er erklärt dann zwar diesen als unmittelbar in der „Anschauung" gegeben, einer Definition nicht bedürftig. Weiterhin aber unterscheidet er: der Begriff der Quantität sei nicht zu definieren, wohl aber der des Quantum (er meint: μέγεθος, nicht ποσόν); nicht was Größe sei, sondern vielmehr was groß sei, bedürfe der Feststellung. Zu dieser dient ihm das Axiom des Archimedes: daß eine „Größe" (ein bestimmter Wertbetrag) vervielfältigt die andere übertreffe; also die Eigenschaft der Meßbarkeit; die freilich nur die endliche Größe definieren und gerade die echte, stetige Größe (wie wir sahen) nicht begründen würde. Sehr klar aber heißt es dann (in einer Bemerkung zu § 16): der Begriff der unendlichen Reihe, überhaupt der Grenze, sei nicht mehr unzulässig, nachdem der Begriff der (Zahl als) Größe eingeführt sei, „welche schon eine vollendete in sich ist und nicht erst durch den Summationsprozeß erzeugt werden soll". Das deckt sich fast mit der Unterscheidung Kants: daß bei der intensiven Größe das Ganze den Teilen, die Einheit der Mannigfaltigkeit vorhergehend, bei der extensiven erst aus ihr resultierend gedacht werde; oder mit der Leibnizschen Erklärung, daß das Intensive das Fundament des Extensiven sei; die Größe, so würden wir vorziehen zu sagen, das Fundament der Zahl, oder der reine Grundbegriff der Größe das Fundament der zählbaren Größe.

Die Berufung auf „Anschauung" freilich kann uns auch hier nicht fruchten. Man kann nicht Zeit und Raum definieren, ohne die Größe vorauszusetzen; also kann man nicht umgekehrt die Größe im Unterschied von der Zahl definieren wollen, indem man Anschauung von Zeit oder Raum zugrunde legt. Die Anschauung gibt nicht die Größe, die vielmehr ein reiner Begriff ist; und wenn ihr konstituierendes Merkmal die Stetigkeit ist, so geben Zeit und Raum eben auch nicht die Stetigkeit, sondern eben sie muß zuvor in reinem Begriff aufgestellt sein, wenn Zeit und Raum als stetige Gebilde gedacht werden sollen. Die Berufung auf die Anschauung meint aber (wie schon gesagt) in Wahrheit vielmehr die neue Begriffsgrundlage, nach der wir suchten. Als diese erkannten wir schon die qualitative Allheit. Durch sie wird, wie besonders an den unendlichen Reihen klar wurde, die Zahl selbst zu einem Gebilde, das stetig, d. h. von irgendeinem gegebenen Betrag zu irgendeinem anderen durch alle Zwischenwerte hindurch veränderlich gedacht wird. D. h.: man denkt sich, gegenüber den bestimmten Zahlwerten, „die" Zahl selbst, in jener singularen Fassung, die den Griechen geläufig war, als ein und dasselbe Zugrundeliegende, das durch die Reihe der definiten Werte, und zwar in ausnahmsloser Allheit, sich entwickle. Es ist die Denksetzung selbst, es ist dieselbe, nämlich der Funktion nach dieselbe Denkhandlung, oder, rein objektiv ausgedrückt: die gesetzmäßig bestimmte Relation, in der die sukzessiven Werte gesetzt werden; denn irgendein anderes Substrat ist bisher nicht gegeben. So entsteht die Zahl als einziges, nur einmal vorhandenes Gebilde, das man sich veranschaulicht unter dem Symbol einer Linie, und zwar einer unendlichen Geraden, in gleichförmiger Bewegung durchmeßbar. Die so begründete stetige Zahl wird selbst zum Ausdruck des Maßes einer jeden stetigen Größenänderung, indem durch dies gemeinsame Maß beliebige Größenänderungen untereinander vergleichbar werden.

Darin liegt nun aber der Hinweis auf ein logisches Moment, das in der Zahl von Anfang an schlummerte und doch bis dahin tief versteckt blieb; das in seiner fundamentalen Bedeutung für die Denkschöpfung der Zahl überhaupt von den Arithmetikern erst verhältnismäßig spät beachtet worden ist; nämlich jenes logische Moment, dem Kant den Namen der „Relation" beilegt, welches in Wahrheit aber vielmehr eine eigene Relation von Relationen darstellt. Sein genauer Ausdruck in der Sprache der Arithmetik ist die Funktion. Die Größe als Veränderliche enthüllt ihre eigentliche Bedeutung erst, sofern dabei mitgedacht wird an eine gesetzliche Beziehung, gemäß welcher eine Wertreihe einer anderen von Glied zu Glied korrespondiert. Nicht die Größe ist veränderlich; die Größe als das Wiegroß muß vielmehr fest bleiben, und die Größe als Kontinuum bedeutet nur die Allheit der Werte je unter einem gegebenen Gattungsbegriff; sie ist die Bedingung der Veränderlichkeit, aber ist selbst nicht veränderlich. Sondern nur eine Größe kann streng genommen als veränderlich gedacht werden, gleichzeitig mit der Veränderung einer anderen. Woher hier der Ausdruck der Gleichzeitigkeit? Ist etwa der Begriff der Zeit hier schon vorauszusetzen? Keineswegs; aber wohl könnte es sich herausstellen, daß mit dem Begriff der Größe als veränderlicher man dem Begriff der Zeit schon sehr nahe gekommen ist. Die Veränderung der Größe wird naturgemäß unter dem Bilde der Zeit vorgestellt. So redet man von Geschwindigkeit der Funktion, indem die in größeren Differenzen fortschreitende Änderung gegenüber der in kleineren fortschreitenden, sofern beide an derselben, gleichsam festen Maßreihe gemessen werden, sich naheliegend der schnelleren Fortbewegung vergleicht. Aber die Fortschreitung ist keine andere als durch die Zahl; das Früher und Später besagt nur das Stellverhältnis, das Vor und Nach in der Zählung; die Bewegung ist nur die des Gedankens, der in gesetzmäßiger Folge von Wert zu Wert übergeht, während die Werte und Wertbeziehungen selbst nach wie vor feststehen und ewig, zugleich ins Unendliche, nur sind, nicht werden.

Also nicht der Zeitbegriff gehört etwa schon an diese Stelle. Das logisch Neue, das hier platzgreift, liegt vielmehr darin, daß mit der Funktion, d. h. mit der Gesetzmäßigkeit, gemäß welcher die Änderungen einer Größe denen einer gegebenen anderen korrespondieren, wir in das logische Gebiet übergetreten sind, das von der „Synthesis der Relation" beherrscht wird. Indem die Quantität sich durch die Qualität vertieft hat, ist sie zugleich zubereitet für den Aufbau eines Systemzusammenhanges nach dem Verfahren der Relation. Die Einzelwerte werden nicht mehr als einzelne, sondern als Stufen einer einzigen Wertentwicklung, des Veränderungsganges einer Größe gedacht, damit eine Wertentwicklung oder die Veränderung einer Größe, mit der einer andern verglichen und die Beziehung ihrer beiderseitigen Änderungen einem Gesetz unterworfen werden könne. Umgekehrt, nur indem eine Größenänderung durch ihre gesetzmäßige Beziehung zu einer anderen ausgedrückt wird, also eben durch den neuen Sinn der Größe als Funktion, gewinnt man den Gattungsbegriff einer Größe, der fortan den sukzessiven Werten dieser Größe sich überordnet. Die veränderliche Größe, gegenüber ihren sukzessiven Werten, ist die durch ein bestimmtes Gesetz ihrer Veränderung definierte, also eben die Größe als Funktion, oder beziehungsweise Argument einer Funktion, d. h., nicht bloß als Veränderliche überhaupt, sondern, je nachdem, abhängig oder unabhängig Veränderliche.

Im Vorausblick auf die Beziehung zweier Veränderlichen in der Funktion kann dann auch wohl von einer Veränderlichen für sich gesprochen werden; d. h. man kann aus dem Kontinuum der Zahl irgendeine, durch irgendein Gesetz bestimmte Wertreihe willkürlich herausheben, als die Reihe der Werte einer Veränderlichen x, und kann diese

Wertreihe in mancherlei Beziehungen (z. B. als in einem bestimmten Intervall stetig oder unstetig) betrachten zunächst ohne Rücksicht auf eine Beziehung zwischen ihr und einer bestimmten anderen Veränderlichen y. So mag man von x und dx reden auch ohne Beziehung auf ein bestimmtes y und dy. Indessen ist hierbei die Funktionsbeziehung wenigstens zu einem möglichen y immer mitzudenken. Sonst wäre es nicht der Begriff einer Größe, der Größe, die der Forderung genügt, statt bloßer Zahlen ein zählbares Etwas zu vertreten. Dafür bleibt unerläßlich wenigstens die allgemeine Voraussetzung der möglichen Beziehung einer Veränderlichen auf eine andere als deren Funktion.

§ 9. (*Das Infinitesimalverfahren.*) Wir haben nunmehr die Voraussetzungen beisammen, um die Methode der Infinitesimalrechnung uns deuten zu können. Ihre fundamental wichtige logische Bedeutung erkannt zu haben, ist besonders das Verdienst H. Cohens [*22*], dessen Darstellung freilich für den nicht philosophisch wie mathematisch gleich vorbereiteten Leser große Schwierigkeiten bietet.

Der allgemeine Sinn und die Absicht des Infinitesimalverfahrens läßt sich indessen auch dem mathematischen Laien unschwer verständlich machen. Eine veränderliche Größe schreitet fort von Wert zu Wert, also in bestimmten, zunächst endlichen Differenzen. Sofern nun zwei Veränderliche (x, y) hinsichtlich des Ganges ihrer Veränderungen miteinander verglichen und in gesetzmäßiger Beziehung erkannt werden sollen, so wird die eine von ihnen (die abhängig Veränderliche, y) allemal eine bestimmte Differenz (Δy) durchmessen, wenn die andere (unabhängig Veränderliche, x) eine bestimmte Differenz (Δx) durchmißt. Das Verhältnis der Differenzen beider Größen also, das sich als Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ schreiben läßt, drückt dann den Gang der

Veränderung der einen im Verhältnis zu dem der anderen Größe aus. Nun soll aber die beiderseitige Änderung nicht sprung- oder absatzweise, d. h. durch Differenzen von bestimmtem endlichen Betrag, sondern kontinuierlich geschehen; es soll mit anderen Worten der Wertbetrag auf beiden Seiten in keinem Punkte unverändert bleiben. Durch die Vergleichung der in endlichen Abständen gemessenen Differenzen aber ist die Änderung nur ruckweise, also diskontinuierlich zum Ausdruck gebracht. Um sie als kontinuierliche auszudrücken, fragt man: was wird aus dem Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, wenn die Differenzen beiderseits kleiner und kleiner werden, kleiner als jeder endliche Betrag? D. h.: welches ist der Grenzwert dieses Verhältnisses, wenn beide Differenzen sich der Null unbegrenzt nähern? Dieser Ausdruck wird noch immer als Verhältnis, mithin als Quotient geschrieben, obgleich es kein Quotient für sich gegebener meßbarer Zahlwerte mehr ist; man schreibt ihn so gleichsam zur Erinnerung an seine Entstehung aus dem Quotienten der Differenzen. Dieser neue Ausdruck zeigt aber gegenüber dem vorigen eine wesentlich veränderte, in vielen und wichtigen Fällen vereinfachte Gestalt. Um den Sinn dieser Vereinfachung durchsichtig zu machen, ist es nützlich, ein typisches Beispiel ins Auge zu fassen; ein Beispiel höchst elementarer Art, für welches das Verfahren der Differentiation freilich nicht erdacht zu werden brauchte, da in diesem Fall das Ergebnis sich auch ohne das gewinnen ließ; welches aber eben darum besonders geeignet ist, dem, der über den Sinn des Verfahrens erst Klarheit sucht, eine Vorstellung davon zu geben, worin es eigentlich besteht und was damit geleistet wird.

Man bezeichnet in der Mechanik mit g die Endgeschwindigkeit, welche beim Fall schwerer Körper nach einer Sekunde vom Beginn der Fallbewegung an erreicht wird. Da nun der Fall schwerer Körper dem Gesetze der gleichförmigen Beschleunigung unterliegt, so ist die Endgeschwindigkeit nach 2 Sekunden $2g$, nach t Sekunden tg:

$$v = tg. \tag{1}$$

Der durchmessene Raum ist, wie man leicht einsieht, gleich der mittleren Geschwindigkeit; also in der ersten Sekunde gleich dem Mittel zwischen 0 und g, oder $= \frac{1}{2}g$; in der zweiten Sekunde gleich dem Mittel zwischen g und $2g$, also $= \frac{3}{2}g$; so in der dritten $= \frac{5}{2}g$ und so fort. Also in der ersten $= \frac{1}{2}g$, in den zwei ersten zusammen

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \text{ oder}\right) \frac{4}{2}g,$$

in den drei ersten

$$\left(\frac{1+3+5}{2} \text{ oder}\right) \frac{9}{2}g,$$

und so fort. Die durchmessenen Räume also schreiten von Sekunde zu Sekunde im Verhältnis der Quadratzahlen fort; der Fallraum in t Sekunden ist

$$s = \frac{1}{2}gt^2. \tag{2}$$

Diese Gleichungen (1, 2) ließen sich aufstellen, ohne daß es dazu der Formeln des Infinitesimalverfahrens bedurfte. Nun aber zeigt sich, daß die erste dieser Gleichungen aus der zweiten durch Differentiation, oder die zweite aus der ersten durch Integration gewonnen werden kann. Es genügt, das Erstere zu zeigen. s ist stetig veränderlich mit t oder eine stetige Funktion von t, d. h. jeder Änderung von t entspricht eine bestimmte Änderung von s, in beiderseits stetigem Übergang, nach dem Gesetz, welches durch die Gleichung (2) ausgedrückt ist. Erhält also die Größe t einen Zuwachs um eine bestimmte Differenz Δt, so erhält die Größe s einen dem genannten Gesetz gemäß diesem entsprechenden Zuwachs Δs. Dies drückt sich sachgemäß so aus, daß in der Gleichung (2) s durch $s + \Delta s$, t durch $t + \Delta t$ ersetzt wird; also

$$s + \Delta s = \frac{1}{2} g (t + \Delta t)^2,$$

oder, indem $s = \frac{1}{2} g t^2$ beiderseits wegfällt:

$$\Delta s = gt \cdot \Delta t + \frac{1}{2} g \cdot \Delta t^2$$

oder

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = gt + \frac{1}{2} g \cdot \Delta t.$$

Durch diese Gleichung ist das Verhältnis irgendwelcher willkürlich gewählten endlichen Änderung von s zu einer entsprechenden, ebenfalls endlichen Änderung von t angegeben, in einem Ausdruck, der, wie man sieht, nicht von g und t allein, sondern noch von der unbestimmten, willkürlich wählbaren Größe Δt abhängt. Läßt man nun aber beide Differenzen sich unbegrenzt der Null nähern, so wird sich das zweite Glied zur Rechten ebenfalls der Null, der Wert des Verhältnisses $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ also dem Werte gt unbegrenzt nähern. Diesen Grenzwert schreibt man in Gestalt eines neuen Quotienten $\frac{ds}{dt}$, welcher der Differentialquotient heißt. Er bedeutet dem Buchstaben nach das Verhältnis der unendlichklein werdenden oder „verschwindenden" Differenzen Δs und Δt, d. h., den Ausdruck, den das Verhältnis der beiden Differenzen erhält, wenn beide sich gleichzeitig der Null unbegrenzt nähern. Was aber der sachliche Sinn dieses Quotienten ist, ergibt das Beispiel klar. Wir wissen ja schon aus unserer Gleichung (1), was der erhaltene Ausdruck gt wirklich bedeutet, nämlich die Endgeschwindigkeit, die in der Zeit t, vom Beginn des Falls gerechnet, erreicht wird. Der „Differentialquotient" $\frac{ds}{dt} = gt$ aus der Gleichung $s = \frac{1}{2} g t^2$ besagt also nichts

Geheimnisvolleres als: Wenn in der Zeit t der Raum s gemäß dem Gesetz der gleichförmigen Beschleunigung durchmessen wird, so ist die im Endmoment erreichte Geschwindigkeit $= g \cdot t$, wo g eine bekannte, unter bestimmten Voraussetzungen konstante Größe ist, nämlich die Fallgeschwindigkeit, die nach einer Sekunde erreicht wird, welche unter sonst gleichen Umständen, namentlich in gleicher Entfernung vom Attraktionszentrum, konstant ist.

Es sei sogleich noch ein zweites Beispiel von nicht minder typischem Charakter hinzugefügt, die Differentiation der Kreisgleichung. Hier ergibt sich der Differentialquotient gleich dem Verhältnis zweier aufeinander senkrechter Geraden, durch welches die Richtung der Tangente für einen beliebigen Punkt der Kreislinie bestimmt ist, oder auch gleich dem trigonometrischen Ausdruck eines Winkels, der dasselbe leistet: die Richtung der Tangente festzulegen. Die Differentiation der Kreisgleichung bedeutet also: Ein in der Kreisperipherie bewegter, somit konstant seine Richtung ändernder Punkt wird sich in einem gegebenen Moment seiner Bewegung, wenn er von diesem Momente ab seine Richtung nicht weiter ändert, sondern die in diesem Punkte erreichte Richtung innehält, in der Tangente fortbewegen. Umgekehrt kann man sich nun die Kreislinie entstehend denken durch Drehung einer Achse r um den Mittelpunkt, in deren anderem Endpunkt eine Senkrechte auf r gedacht wird, die zugleich mit der Achse unter Festhaltung des rechten Winkels sich dreht; so definiert die kontinuierliche Richtungsänderung dieser Senkrechten (d. h. der Tangente) die kontinuierliche Richtungsänderung eines in der Kreislinie bewegten Punktes von Moment zu Moment, oder die Krümmung der Kreislinie. Also während man einerseits aus dem gleichen Abstand jedes Peripheriepunktes vom Mittelpunkt beweist, daß die Tangente in jedem Peripheriepunkt auf dem Radius senkrecht steht, so kann man umgekehrt durch die kontinuierliche Richtungsänderung einer auf dem Radius in dessen Endpunkt errichteten Senkrechten die Kreislinie entstehend denken, so daß die kontinuierliche Richtungsänderung in der Kreislinie durch die Richtungsänderung der Tangente von Moment zu Moment dargestellt wird. Die Aufgabe, zu beliebigen, durch ihr analytisches Gesetz gegebenen Kurven die Tangenten zu finden und umgekehrt, war es historisch, die zur Entdeckung des Verfahrens der Differentation geführt hat, welches dann besonders Anwendung fand auf die Bestimmung der Geschwindigkeitsänderungen in der Mechanik. Daher dürfen die beiden vorgeführten Beispiele vor anderen als typisch gelten.

§ 10. (*Sinn des Differentialquotienten.*) Vergleicht man beide Beispiele, so ergibt sich, daß übereinstimmend hier und dort aus einem schon bekannten, für endliche Beträge der Änderung der verglichenen Größen geltenden Gesetze, nach welchem die Änderung der einen von der der anderen abhängt, eine neue Form des Änderungsgesetzes gewonnen wird für irgendeinen und zwar jeden beliebigen Punkt der Veränderung; dort die Endgeschwindigkeit, mit der der bewegte Körper, falls nicht weitere Geschwindigkeitsänderung hinzutritt, etwa in einer horizontalen Ebene ohne Widerstände, sich fortbewegen würde; hier die Endrichtung, in der ein in der Kreislinie bewegter Punkt, wenn nicht die Richtungsänderung fortdauert, aber das bis zu diesem Punkte erreichte Ergebnis der kontinuierlichen Richtungsänderung festgehalten wird, sich fortbewegen wird, welches offenbar die Richtung der Tangente sein muß. Hiernach versteht sich das „Verschwinden“ der Differenz. Es kommt wirklich etwas in Wegfall, nämlich die weitere Fortdauer der Veränderung, indem nur das bis dahin erreichte Ergebnis der kontinuierlichen Veränderung festgehalten wird. So begreift sich, weshalb man in diesem und allen ähnlichen Fällen einen vereinfachten Ausdruck erhält, so im ersten Beispiel statt des quadratischen das einfache Verhältnis der Zeiten;

so allgemein, wenn y irgendeiner Potenz von x entspricht, eine um 1 verminderte Potenz.

Man mißt also durch den Differentialquotienten nicht das Verhältnis der unendlich kleinen Änderungen der kontinuierlich miteinander veränderlichen und in dieser Veränderung nie stillstehenden Größen y und x; sondern man fixiert das durch die nach bestimmtem Gesetz geschehende stetige Änderung im gegebenen diskreten Punkt erreichte, von da ab sich nicht weiter ändernde Ergebnis der Änderung, dieses aber in einem neuen Gesetzesausdruck (einer neuen Funktion), der für jeden Punkt der gedachten Änderung gilt. Damit erhält man einen gleichsam verdichteten Ausdruck des in anderer Form schon bekannten Gesetzes der Änderung, indem die neue, aus der vorigen abgeleitete, in diesen Fällen einfachere Funktionalbeziehung für den Punkt der Änderung, und zwar für jeden Punkt, daher in der Zusammenfassung (Integration) wieder für den ganzen, kontinuierlichen Verlauf der Änderung gilt. So ergibt sich aus der stetigen Folge der Endgeschwindigkeiten im Fall wieder umgekehrt das Fallgesetz, so aus den kontinuierlichen Richtungsänderungen der Tangente das Gesetz der Krümmung der Kurve. Das ist der verdeutlichte Sinn der zunächst dunklen Ausdrucksweise, daß die unendlichvielen unendlichkleinen Änderungen das Gesetz für den endlichen Betrag der Änderung ergeben, oder der Sinn des zur Differentiation reziproken Verfahrens der „Integration". Das Gesetz gilt für alle Punkte des Änderungsverlaufs; diese qualitative Allheit des Gesetzes als des Gattungsausdrucks der Veränderung erklärt das „Unendlichviel" und „Unendlichklein"; andere Rätsel sind darin nicht zu suchen. Aber eben indem diese Allheit qualitativer, nicht quantitativer Art ist, so ist durch das Infinitesimalverfahren das allgemeine Mittel gewonnen, echte Qualitäten zu streng gesetzmäßigem Ausdruck zu bringen. Schon Galilei hatte in seiner Ableitung des Fallgesetzes den Begriff des „Momentes" der

Geschwindigkeit eingeführt, worunter er verstand die durch die einem bestimmten Gesetz unterliegende, in diesem Fall konstante Beschleunigung in jedem Punkte der Zeit erreichte Geschwindigkeit. Indem aber die Fallbahn sich von Augenblick zu Augenblick in unendlichvielen unendlichkleinen Zuwüchsen an Geschwindigkeit erzeugend gedacht wird, erscheint die infinitesimale Geschwindigkeit als der Ursprung, aus dem die endlichen Fallräume sukzessiv hervorfließen. Das heißt es, wenn man, wie namentlich Newton, die infinitesimale Größe betrachtet als die erzeugende, die endliche als durch sie erzeugt; oder diese in jener involviert und aus ihr sich evolvierend. Der wahre Erzeuger der endlichen Größe ist nicht die „unendlichkleine" Größe (das Unendlichkleine wäre dem Größenwert nach vielmehr Null), sondern es ist das Gesetz der Größe (als Veränderlicher), das man sich nun wie in einen Punkt zusammengezogen, d. h. für den einzelnen Punkt ausgedrückt, oder an einer endlichen Erstreckung sich darstellend denken kann, das aber dem letzten Sachgehalt nach dasselbe ist für den Punkt und die endliche Erstreckung, wenn es auch in Bezug auf beide verschiedene, im allgemeinen auseinander ableitbare Ausdrücke erhalten muß. Da aber die endliche Größe überhaupt von Punkt zu Punkt entstehend (d. h. veränderlich) gedacht wird, so ist insofern der punktuelle, d. h. infinitesimale Ausdruck der fundamentale, aus dem der extensionale gleichsam erst hervorwächst. Die Differenz entsteht eben von der Null an; nicht aus ihr; aus Null wird keine extensive Größe; wohl aber von der Null, d. h. dem Nichtsein dessen, was werden soll, oder ganz schlicht[1]) vom Ausgangswert an; woraus? Aus dem Gesetz; eine andere Antwort ist nicht zu geben und nicht zu verlangen. Durch dies Gesetz aber ist die Größe als Eines, Identisches, im Unterschied von den sukzessiven Größenwerten, also in ihrem Gattungsausdruck definiert.

1) Vgl. oben S. 122.

Fragt man also: wie soll aus der Null gewordenen, „verschwundenen“ Größe die endliche Größe wiederentstehen? so ist zu antworten: die Größe zwar (*quantitas*), d. h. das So-und-so-groß, ist verschwunden, quantitativ Null geworden, aber nicht ist damit auch das Gesetz der Größe qualitativ zunichte geworden; also nicht die Größe im Sinne des Wiegroßen (*quantum*), d. h. des identisch Definierten, welches die sukzessiven Größenwerte nur wechselnd durchläuft, ohne in ihnen sich je zu verlieren und gleichsam auszugeben. Und wie ist es definiert? Eben durch das Gesetz, also in rein qualitativer Identität, wiewohl durch das Mittel quantitativer Beziehungen, die als solche sich stets nur am Endlichen darstellen. Denn auch in Bezug auf den Punkt kann das Gesetz nur formuliert werden durch quantitative Beziehungen unter endlichen Größen. Die Beispiele zeigen es klar, daß der Differentialquotient selbst eine endliche, für jeden Punkt konstante Größe darstellt (z. B. gt). Auch die Form des Quotienten ist hierbei an sich nicht wesentlich. Sie ist sogar leicht irreführend, gerade indem sie das dy und dx als neue, nur überaus kleine endliche Größen, so klein als man nur will, mißverstehen läßt. Das streng Unendlichkleine hätte überhaupt kein Wertverhältnis; dieses wäre, dem Zahlwert nach, $\frac{0}{0}$, was an sich kein möglicher Ausdruck eines definiten Wertverhältnisses ist. Es ist überhaupt nicht eine bloße quantitative Änderung des gegebenen endlichen Wertverhältnisses, sondern es ist etwas qualitativ Anderes, was der Differentialquotient gegenüber der ursprünglichen Funktion oder dem Differenzquotienten bedeutet; der Ausdruck als Quotient ist, wie gesagt, nur die Erinnerung an den Weg der Ableitung, auf dem der neue Ausdruck gewonnen wurde. Man redet daher richtig von der „derivierten Funktion“. Es ist in der Tat eine neue Funktion, die etwas Anderes als die erstgegebene ausdrückt, doch aus dieser abgeleitet.

Die wichtige allgemeine Bedeutung des Verfahrens aber besteht darin, daß dadurch Begriffsgrenzen überschreitbar werden, die ohne das für unüberschreitbar gelten müßten. Die Gerade, welche zwei Punkte mit der Kreisperipherie gemein hat, und die, welche nur einen Punkt mit ihr gemein hat, also sie nicht schneidet, sondern berührt, sind qualitativ verschiedene Begriffe. Es ist eine für die Anschauung bequeme Ausdrucksweise, wenn man die Schneidungspunkte der Sekante sich unendlich nahe kommen und so die Sekante schließlich in die Tangente übergehen läßt. Aber der rein logische Sinn dieser nur allzu anschaulichen Beschreibung des Vorgangs ist einzig der: es lassen sich Ausdrücke gesetzmäßiger Beziehungen, die für die Sekante gelten, in solche für die Tangente umsetzen, und es fallen auf diese Weise beide vorher dem Begriff nach geschiedenen Fälle qualitativ unter eine Betrachtung, unter ein und dasselbe höhere Gesetz. Die Stetigkeitsbetrachtung, daher das Infinitesimalverfahren, wird so zum geradezu universalen Mittel der Vereinheitlichung wissenschaftlicher Betrachtungen, die sich auf Größen irgendwelcher Art beziehen. Ganz analog ist die Rolle des Durchgangs durchs Unendliche in der Geometrie der Lage. Parallelen und Sichschneidende sind qualitativ verschiedene Begriffe; Parallelen schneiden sich ihrem Begriff nach eben nicht. Dennoch kommen beide unter eine Betrachtung, indem man die Parallelen als in einem „unendlichfernen Punkt" sich schneidend auffaßt. Was dieser seltsame Ausdruck der unendlichfernen Schneidung zweier sich nicht Schneidenden sachlich besagt, liegt zum Glück nicht unendlich fern; es besagt, daß ein stetiger Übergang gedacht werden kann und muß aus der Lage der sich Schneidenden in die der Parallelen, gemäß welchem jede Aussage, die für Sichschneidende gilt, sich mit richtigem Ergebnis überträgt auf den Grenzfall der sich nicht Schneidenden, d. h. eine einzige Gesetzlichkeit fortan beide Fälle umfaßt. So wird der

Durchgang durchs Unendliche zu dem methodischen Mittel einer berechtigten μετάβασις εἰς ἄλλο γένος, der Herstellung einer Kontinuität des Denkens, in welcher die vorher wie *A* und *non-A* geschiedenen Fälle sich unter höherer Betrachtung wieder vereinigen.

Durch diese Aufhellung wird aber nicht unsere frühere Erwägung über die aktuelle Bedeutung der Unendlichkeiten in der Mathematik und besonders des Unendlichkleinen etwa entbehrlich gemacht. Die Möglichkeit des Übergangs von x zu dx und umgekehrt beruht genau darauf, daß kraft der qualitativen Allheit Unendlichkeiten, nämlich unendliche Wertbereiche, Wertinbegriffe, Zahlstrecken mit punktuellen Werten, Wertgrenzen in einen Gesetzeszusammenhang kommen. Die Strecke enthält unendliche Punkte; und indem solche Unendlichkeiten und nicht mehr bloß endliche Wertbeziehungen der Herrschaft des mathematischen Begriffs unterworfen werden, wird es möglich, von der Strecke auf den Punkt, vom Punkt auf die Strecke, und so im ganzen Gebiet der Größen von jedem gegebenen Bereich zum logisch angrenzenden in voller begrifflicher Strenge überzugehen. Ein Letztes, Absolutes wird dabei nicht erreicht; denn dieser qualitative Übergang setzt sich selbst wieder ins Unendliche fort, wie die unendlichen Ordnungen des Unendlichen und Unendlichkleinen klar zeigen. Aber eben damit ist ausgesprochen, daß fortan keine Begriffsgrenze irgendwelcher Art absolut unüberschreitbar bleibt. Allein das Verfahren dieser berechtigten Grenzüberschreitung selbst könnte „absolut" heißen in dem Sinne, daß es jeder Schranke gewachsen ist, die etwa der Souveränität des Denkens sich entgegenstellen möchte.

§ 11. (*Das Infinitesimale und die Realität.*) Auf Grund des Gesagten dürfte man ganz den freilich hyperbolisch lautenden Satz Cohens[1]) unterschreiben: daß mit dem Infinite-

1) Logik [*26*], S. 32.

simalverfahren (oder allgemeiner mit dem Verfahren des Unendlichen) die „präzise Frage“ und die „erlösende Antwort“ formuliert sei für die Bedeutung des Denkens als Erzeugung des Seins. Schwierig zwar bleibt es, wenn Cohen das Infinitesimale selbst als Absolutes — immerhin mit bezeichnender Einschränkung als „gleichsam“ Absolutes — bezeichnet[1]), da doch die Infinitesimalmethode gerade die Bedeutung hat, die Einheit und damit die Zahl überhaupt zu relativieren. Nicht das Infinitesimale ist absolut; aber das Verfahren mit dem Infinitesimalen drückt prägnant die souveräne Macht des Denkens über das Sein aus, der keine absolute Schranke sich entgegenstellen kann. Schwierig ist es auch, wenn Cohen das dx selbst als die wahre „Einheit“ bezeichnet. Doch wird auch das in bestimmtem Sinne verständlich. Die Einheit überhaupt wird durch die Infinitesimalmethode, wie gesagt, relativiert, indem jede Maßeinheit einer bestimmten Wertordnung in einer anderen unendlichklein, jedes für eine Ordnung Unendlichkleine in einer anderen Ordnung endliche Maßeinheit sein kann, also jedes x wieder als dx, jedes dx als x fungieren kann. Am Ende hat Cohen eben dies sagen wollen, obwohl die Ausdrucksweise gegen Mißverstand nicht genügend geschützt ist. Es kann leicht die verkehrte Meinung entstehen, als ob das Endliche durch das Unendlichkleine gemessen werden sollte, während gerade das Hinausgehen über die Forderung der Meßbarkeit es ist, was durch das Infinitesimalverfahren ermöglicht wird. Die Vervielfachung müßte unendlich sein; aber ein unendlich Vielfaches ist im eigentlichen Sinne kein Vielfaches mehr; sondern es ist nur ein versinnlichender Ausdruck des qualitativen Überganges in eine andere Wertordnung, wie vom Punkt zur Strecke; so wie umgekehrt das dx nicht durch unendliche Teilung (die ebenso nicht mehr Teilung im eigentlichen Sinne wäre) aus dem Endlichen

1) S. 109, 116, 123 u. oft.

entsteht. Also ist dx gegenüber x nicht, was man sonst unter Einheit versteht: eine zu vervielfältigende Einheit, Einheit zu einer Mehrheit; dx dürfte, in Vergleichung mit x, genau genommen überhaupt nicht im Plural gesetzt werden (wie wenn Cohen[1]) von einem Zusammenhang „der" dx, der infinitesimalen Elemente spricht), sondern als Allgemeinausdruck nur im Singular. Cohen selbst stellt das Differential treffend zusammen mit dem allgemeinen Glied der Reihe, welches doch als allgemeines nicht mehr ein Glied, sondern das Glied ist, das die Reihe aufbaut. Die größte Schwierigkeit aber macht in Cohens Behandlung des Problems die scheinbar schroffe Ablehnung des Grenzverfahrens als Grundes der Infinitesimalmethode, während doch anders als durch den Grenzwert — richtiger freilich: die innere Wertbestimmtheit — unendlicher Reihen, die aus endlichen Größen sich aufbauen, zu keinem Differential (wie auch nicht zum Irrationalen) zu gelangen ist, ja im Grenzübergang die schöpferische Macht des Infinitesimalverfahrens wesentlich liegt. Der Punkt, heißt es bei Cohen, müsse nicht als Grenze, als Anfang, sondern als Ursprung der Extension gedacht werden. Aber nicht der Punkt, der als solcher in der Tat nur den Nullwert der Ausdehnung bedeuten würde, ist der Ursprung, sondern der Ursprung ist das Gesetz, das man sich (wie gesagt) intensiv im Punkte konzentriert oder extensiv auf die Strecke erstreckt denken mag, das aber an sich so wenig am Punkte wie an der Strecke haftet, sondern gleichermaßen beide bestimmt, insofern über beiden steht und eben damit den Übergang vom einen zum andern möglich macht. Das Richtige, das zugrunde liegt, ist: daß eben hiermit der Begriff des Punktes (aber nicht minder der der Strecke) eine Wandlung erfährt, indem fortan der Punkt nicht bloß als Nullwert der Ausdehnung (wie die Strecke nicht bloß als endlicher Wertbe-

---

1) S. 115.

trag), sondern als Träger des Gesetzes angesehen wird, aus dem die extensionale Größenbestimmtheit durch Integration, wie umgekehrt aus ihr die punktuelle Bestimmung durch Differentiation hervorgehe. Aber nur wenn man sich die Strecke vom Punkte an entstehend denkt, erscheint der auf den Punkt bezogene Ausdruck des Gesetzes ursprünglicher; und auch so nur ursprünglicher; über diesen Komparativ hinauszugehen wäre bedenklich, weil der punktuelle Ausdruck so wenig wie der extensionale eine absolute Geltung beanspruchen kann; weil in nochmals vertiefter Betrachtung der Punkt wieder Segment werden, also einen neuen, vergleichungsweise punktuellen Ausdruck des Gesetzes (eine neue Differentiation) erfordern kann. Gerade Cohen hat mit Recht betont, daß nicht notwendig die Integration als Umkehrung der Differentiation, sondern ebensogut diese als Umkehrung jener zu betrachten ist. Die Strecke, einmal als Integral begriffen, hat also nicht durchaus als das Abgeleitete zu gelten, so wenig wie der Punkt als Differential absoluter Ursprung ist. Dann schiene in ihm der Ursprung sich zu erschöpfen, während es doch der ganze logische Sinn des Ursprungs ist, unerschöpfbar zu sein, wie es in der unendlichen Wiederholbarkeit des Differentiationsverfahrens auch zum genauen Ausdruck kommt. Vielmehr in beiden, im Differential wie im Integral, drückt sich gleich sehr und in genauer Korresponsion das Unendliche als Ursprung und rechtfertigender Grund des Endlichen, und damit das Denken als Ursprung und rechtfertigender Grund des Seins aus. In dieser logischen Grundauffassung bleiben wir einig, und sie festgestellt zu haben bleibt das unschätzbare Verdienst der Cohenschen Untersuchungen über die Infinitesimalmethode.[1])

---

1) Die Kritik, welche B. Russell (*154*, ch. 41, §§ 315—324) an Cohens „Prinzip der Infinitesimalmethode" übt, setzt durchweg Russells eigene Philosophie der Mathematik voraus (über welche Cassirer [*19*] Bericht gibt). Nicht das ist ihr zum Vorwurf

Das aber bedeutet zuletzt auch die tiefe Kantische Bestimmung der intensiven, d. h. wesentlich: der infinitesimalen Größe als der realisierenden. Durch die bloße extensive Größe setzt man (wie anfangs schon gesagt) eigentlich nichts als die Setzung selbst, die soweit keinen Inhalt hätte, daher leer, nichtig erscheinen müßte in Hinsicht auf den schließlichen Zweck: den Gegenstand zu erkennen. Die hier fehlende Inhaltsbestimmung gibt erst die Größe als intensive, d. h. aus dem Unendlichen des reinen Denkverfahrens, gleichsam von innen her, begründete und von da nach außen, in den „Gegenstand" hinein, erst sich erstreckende (extendierende). Wie sie zum Ausdruck gerade der echtesten Qualität wird, genügt fast das einzige Beispiel der Beschleunigung klar zu machen. Eben dadurch aber wird es nun möglich, zu präzisem Ausdruck zu bringen, was

---

zu machen; eher, daß auf die bedeutende Weiterentwicklung, welche die Mathematik des Unendlichen seit Cantor (durch Veronese) erfahren hat, keine Rücksicht genommen wird. Doch, von allem Prinzipiellen abgesehen, beruht diese Kritik fast durchweg auf Mißverständnissen, welche durch die schwierige Darstellung Cohens doch nur zum Teil erklärlich sind. (Z. B. wenn Cohen *22*, § 2, sagt, durch das Grenzverfahren werde der elementare Begriff der Gleichheit ergänzt und korrigiert, so will er auf die einfache Tatsache hinweisen, daß auf Grund des Grenzverfahrens ein Wert nicht bloß, wie in der Elementarmathematik, durch eine Gleichung, sondern durch ein System von Ungleichungen bestimmt wird.) Durchweg liegt bei Russell die irrige Vorstellung zugrunde, als solle das Infinitesimale, das als inextensiv von Cohen fort und fort bezeichnet wird, gleichwohl eine extensive Quantität, eine „Distanz", die nicht Null und doch auch nicht endlich sei, bedeuten, was die Meinung Cohens jedenfalls nicht ist. Zu bedauern ist auch, daß Russell sich ausschließlich an die Schrift d. J. 1883 gehalten hat; aus Cohens „Logik" (1902) würde er ersehen haben, daß der in der älteren Schrift noch nicht völlig aufgegebene Kantische Dualismus von reiner Anschauung und reinem Denken von keinem gründlicher als eben von Cohen überwunden ist. — Ein anderer Angriff auf Cohens Auffassung des Infinitesimalen ist von Cassirer (Philos. Arbeiten I, S. 31ff.) gebührend zurückgewiesen worden (vgl. auch *20*, S. 462).

jetzt und hier, im gegebenen Punkt der Zeit und des Raumes, „Reales“ vorhanden sei. Es werden eben jetzt nicht mehr lauter Nichtse gezählt, noch bleibt zwischen den gezählten Punkten ein Leeres, im schlechten Sinne eines Nichts, das dennoch dawäre, nur nicht mitzählte. Mag unsere Zählung von Punkt zu Punkt springen, der wirkliche Vorgang kann, eben als Gang, nur kontinuierlich gedacht werden. Wie aber denkt man ihn kontinuierlich? Indem der Gedanke das Gesetz, in welchem das Reale des Vorgangs qualitativ bestimmt wird, stetig festhält, auch wenn er zählend von Punkt zu Punkt, von Halt zu Halt zu springen scheint, um festzustellen, welches jetzt und jetzt und wieder jetzt das Ergebnis der kontinuierlichen Änderung ist. So wird die Reihe sukzessiver Wertbestimmungen der Veränderlichen zum Ausdruck der sukzessiven Veränderungsstufen eines nunmehr definierten „Etwas“, d. h. zum Ausdruck des Realen.

Also ist die entscheidende Erkenntnisleistung des Infinitesimalen zutreffend durch Kants Bestimmung ausgedrückt, daß es Realität begründe, d. h. ein existenzfähiges Etwas im Unterschied vom Nichts (der leeren Stelle) definierbar mache. Die Methode des Infinitesimalen ist also nicht bloß eine abkürzende Methode des Zählens und Rechnens, die gleichsam zufällig auf anderweitig gegebenes „Reales“ Anwendung litte, sondern es ist die Methode, welche ein Etwas, das gezählt und womit gerechnet wird, überhaupt erst begründet. Die Quantität liefert gleichsam nur das Rohmaterial dazu; durch sie allein wäre allenfalls nur ein System von Stellen gegeben, ohne etwas, das die Stellen besetzt. Erst durch die Qualität, in jener strengen Verknüpfung mit der Quantität und andrerseits mit der Relation, die im Infinitesimalen sich den genauen wissenschaftlichen Ausdruck und die handliche Methode geschaffen hat, werden die Stellen besetzbar, und zwar alle Stellen eines zu beschreibenden Änderungsganges in lückenloser Ausfüllung.

So bleibt nichts „leer"; die Zumutung eines existierenden Nichts kann ferner nicht auftreten.

Hiermit ist nun der Übergang schon in weitem Umfang vorbereitet von der bloßen Mathematik zur mathematischen Naturwissenschaft, zunächst der Mechanik. Mit der Einführung der Stetigkeit in die Zahl ist die trennendste Kluft schon gefallen, welche die Zahl vom Raume schied; mit dem Raume aber und der Zeit, die nicht minder zwingend von hier aus sich der Zahl verbindet, stehen wir schon nicht mehr in der bloßen Mathematik, sondern bereits mitten in der Mechanik. Nur eines fehlt uns noch, um den Übergang zu einem ganz kontinuierlichen zu machen: die Einführung auch der Begriffe Dimension und Richtung in die reine Zahl. Diese soll uns im nächsten Kapitel beschäftigen.