# Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften

**Natorp, Paul**

**Leipzig [u.a.], 1910**

Fünftes Kapitel. Richtung und Dimension als Bestimmungen der reinen Zahl.

**urn:nbn:de:hbz:466:1-35817**

Fünftes Kapitel.

# Richtung und Dimension als Bestimmungen der reinen Zahl.

§ 1. (*Die Zahlreihe als gerade Reihe.*) Die Beziehung der Position oder der Ordnung des Vor und Nach erwies sich als das letzte Gattungsmerkmal der Zahl, welches aller Maßbedeutung derselben logisch vorhergeht. Sein mathematischer Ausdruck ist das Plus und Minus, welches eine immer gleiche Art der Relation von Glied zu Glied unserer Urreihe

$$\ldots|\,|\,|\,|\,|\ldots,$$

nämlich die Bedeutung jedes Gliedes der Reihe als Gegenglied zu einem Grundglied oder Grundglied zu einem Gegenglied bezeichnet. Dieser Doppelausdruck der Plus-Minus-Beziehung ist darin begründet, daß mit dem Plus das Minus, mit dem Minus das Plus immer zugleich gegeben ist. Man nennt diese beiden „Sinne" der Positionsbeziehung einander entgegengesetzt. Diese Bezeichnung ist aber nur dann zutreffend, wenn man die Entgegensetzung ohne den Nebensinn des Feindlichen oder der Tendenz der Vernichtung, in der schlichten Bedeutung des Gegenüber oder der Gegenseitigkeit versteht. Der „Gegensatz" ist in Wahrheit, nach Kants Ausdruck, „Gegenverhältnis", Reziprozität. Weit entfernt, einander zu vernichten, bedingen und geben sich die beiden Sinne der Positionsbeziehung vielmehr gegenseitig, daher sie richtig so, als die zwar verschiedenen, aber zueinander gehörigen „Sinne“ einer und derselben, dennoch einzigen Grundbeziehungsart oder „Richtung“ bezeichnet werden. Die „Aufhebung“ der mit entgegengesetztem Vorzeichen versehenen Werte gegeneinander ist nicht „Vernichtung“, sondern Rückgang zum jedesmaligen Ausgangswert, der absoluten oder relativen Null, die nicht ein arithmetisches Nichts ist, sondern die sehr reale Bedeutung des letzten Bezugs- oder Vergleichspunktes zu jeder Setzung eines Wertbetrages, oder in anderer Wendung, der unteren Grenze der Wertsetzung hat. Für jetzt aber ist von einer Bestimmtheit des im einen oder anderen Sinne zu setzenden Wertbetrags überhaupt abzusehen, da es gilt, die Positionsbeziehung rein als solche in ihrer eigenen Gesetzlichkeit zu verstehen.

Dieser zufolge stellt nun unsere Urreihe sich dar als streng homogenes Gebilde. Damit soll ausgedrückt sein: daß in strenger Identität stets der Art nach dieselbe, jedoch von Haus aus doppelsinnige Grundbeziehung, eben jene mit Plus und Minus bezeichnete (des Gegenglieds zum Grundglied und des Grundglieds zum Gegenglied) für irgendwelche zwei Glieder der Reihe, welches auch ihr Abstand in der Reihe, gleichsam die Schrittzahl vom einen zum andern (oder von einem willkürlich gewählten Ausgangspunkte Null zum einen und zum andern) sei, geltend bleibt. Dadurch ist nicht bloß ein Zurücklaufen der Reihe in sich selbst, sondern überhaupt irgendeine Mehrheit der Relationsart oder der Art der Nullbeziehung (abgesehen von ihren beiden „Sinnen“) ausgeschlossen.

Die Bedeutung dieser Bestimmung wird sofort klar werden durch eine Vergleichung mit den auf dieselbe Frage bezüglichen Aufstellungen Veroneses. Dieser definiert die Homogenëität eines eindimensionalen Systems dadurch: daß es zu einem beliebigen, in einer bestimmten Richtung genommenen Segment des Systems von einem beliebigen Element desselben Systems aus zunächst in derselben Richtung ein ihm identisches, d. h. dem Begriff, und zwar dem ganzen Begriff nach übereinstimmendes Segment gibt. Indem dann diesem „homogenen" System noch die weitere Eigenschaft beigelegt wird, daß es auch als Ganzes in seinen beiden Richtungen, von irgendeinem Element aus genommen, sich selbst identisch bleibt, nennt Veronese das so charakterisierte System ein „in der Lage seiner Teile identisches" System. Mit diesen Bedingungen bleibt eine zirkuläre Gestalt des Systems verträglich: das so definierte System kann offen oder geschlossen sein (§§ 70, 71). In der Tat treffen die besagten Merkmale auf den Kreis so gut wie auf die gerade Linie zu. Doch beruht dies im Grunde darauf, daß Veronese nicht, wie wir, die Positionsbeziehung rein von der Maßbeziehung ablöst, sondern sie nur zugleich mit dieser ins Auge faßt und zunächst maßgleiche Segmente in Vergleichung zieht. Für solche gilt allerdings im Kreis wie in der Geraden auch Positionsgleichheit; während sie für ungleiche Segmente in der Geraden gilt, im Kreise nicht. Nun kann aber ein Segment gar nicht bestimmt sein, ohne daß voraus die Art der Relation von Glied zu Glied bestimmt ist. Also ist vielmehr diese zunächst rein für sich ins Auge zu fassen, die Identität also auf diese, in voller Unabhängigkeit von irgendwelchen besonderen Bedingungen hinsichtlich des Betrages der verglichenen Segmente, zu beziehen. Dann aber kann die Homogeneïtät des Systems nur so verstanden werden, daß die Identität der Beziehung von Glied zu Glied für irgendwelche, wie auch immer angenommene Glieder der Reihe (nicht Segmente, sondern Elemente) auch in deren stetigem Zusammenhange gilt. Diese Bedingung läßt aber nicht mehr die Wahl frei zwischen dem offenen und dem geschlossenen System, da im geschlossenen System die Positionsbeziehung nicht identisch ist für beliebige Paare von Elementen, sondern genau nur für maßgleiche Segmente. Schon ein Segment $AB$ ist einem Segment $AC = AB + BC$ im zirkulären System nicht „in der Lage seiner Teile identisch", während im geraden System und nur in ihm diese Identität, überhaupt unabhängig vom Punktabstand, erfüllt ist.

Das durch diese Eigenschaft ausgezeichnete Gebilde ist damit zugleich in seiner Art einzig, nicht auf mehr als eine Art annehmbar. So aber ist es von dem Grundgebilde, auf dem überhaupt die mathematische Bestimmung irgendwelcher Art sich aufbauen soll, auch unbedingt zu fordern. Wie weit man auch die Wahlfreiheit mathematischer Definitionen ausdehnen mag, man gäbe überhaupt jede Möglichkeit einer Einheit des Objekts der mathematischen Wissenschaft, d. h., eine durchgängige Vergleichbarkeit und gesetzmäßige Vereinbarkeit der von ihr aufzustellenden Gebilde preis, wenn man auf jede letzte „notwendige", d. h. nicht so oder anders wählbare Voraussetzung verzichten würde. Diese unerläßliche letzte, für alles Mathematische als solches bedingungslos geltende Voraussetzung aber ist es eigentlich, die unter dem Namen der Zahl gesucht und verstanden wird. Möchte es also in der Geometrie, als einer besonderen mathematischen Wissenschaft, immerhin wahlfrei bleiben, ob man ihr Grundgebilde in unserem oder in Veroneses Sinn homogen annimmt, möchte die letztere Annahme wegen ihrer größeren Weite für die Geometrie sogar einen Vorzug behaupten, so ist dagegen das schlechthin ausgeschlossen, das Grundgebilde, auf dem die Zahl sich aufbauen soll, anders als einzig und darum in unserem prägnanten Sinne homogen vorauszusetzen. „Voraussetzen" bedeutet dann nicht mehr: nach Wahl annehmen, sondern die Voraussetzung hat hier den verschärften Sinn derjenigen Grundlegung, ohne welche der ganze Bau der Mathematik hinfiele, nämlich jede Möglichkeit einer einheitlichen Bestimmung ihrer Objekte aufgehoben wäre.

Freilich, hätte man den Aufschluß über die Eigenschaften der Zahl von gegebenen Dingen zu erwarten, dann müßte man am Ende auch auf solche Überraschungen gefaßt sein, wie daß man, von Eins an weiter und weiter zählend, bei dieser selben Eins, von der man ausgegangen war, endlich wieder anlangen würde. Aber, wenn nirgend sonst, so müßte an diesem Punkte klar werden, daß die letzten Gesetze, die der Erkenntnis gelten sollen, nur sie selbst sich vorschreiben kann, weil sonst aller Sinn des Erkennens, das doch vor allem Verstehen, mit sich selber eins werden bedeutet, aufgehoben würde. Die „Erfahrung", die über die Gesetze der Zahl Aufschluß geben sollte, wäre selbst nicht möglich ohne eben die Gesetze, über die sie angeblich erst entscheiden soll. Und so würde sie selbst sich in jener zirkulären Anordnung der Beweisgründe bewegen, welche die Logik den *circulus vitiosus* nennt. Ein gerader Denkgang wird das Grundgebilde alles reinen Denkens selbst nur als gerades, d. h. in sich der Art nach streng identisch aufstellen können.

Diese Bezeichnung des im erklärten Sinne homogenen Systems als „gerades" bedarf vielleicht noch einer Rechtfertigung. Mag unter Geometern der Begriff des Geraden noch streitig sein, der gemeinhin darunter verstandene Begriff ist zweifellos der jener Eigenschaft eines Systems, wonach dasselbe durch irgendwelche zwei seiner Elemente unterschiedslos eindeutig bestimmt sei. Ob diese Eigenschaft, welche wir als die der absoluten Geradheit bezeichnen wollen, dem Grundgebilde, auf dem die Raumbeziehungen mathematisch aufzubauen sind, unerläßlich beizulegen sei, ist hier noch nicht zu untersuchen; die einfache Zahlreihe aber ist, der oben gestellten Bedingung zufolge, die nichts Willkürliches einschließt, sondern rein auf die Grundrelation, welche die Zahl überhaupt nur möglich macht, sich stützt, notwendig als gerade in diesem absoluten Sinne zu setzen.

Eine andere Frage ist, ob die Forderung der Eindeutigkeit (Einzigkeit) im gleichen absoluten Sinne für die Maßbestimmung gelten müsse. Diese ist ihrem ganzen Begriff nach relativ; es wird daher auch die Forderung der Eindeutigkeit für sie nur den relativen Sinn haben dürfen, daß für eine einzige Zählung auch eine einzige letzte gemeinsame Grundlage der Maßbestimmung, d. h. eine einzige Maßeinheit gelten muß; was zur Folge hat, daß durch irgendwelche zwei Elemente auch stets ein Abstand als einziger bestimmt sein wird. Die Eigenschaft der Geradheit (im erklärten Sinne) ist für die Möglichkeit irgendwelcher Bestimmtheit des Abstandes schon Voraussetzung und als solche in ihr eingeschlossen; an sich aber ist sie die Eigenschaft der Positionsbeziehung, daher von jeder besonderen Annahme hinsichtlich des Abstandes unabhängig, und auch ihrerseits auf diesen ohne Einfluß. Wenn oben das gerade System erklärt wurde als ein solches, das durch irgendwelche zwei seiner Elemente eindeutig bestimmt sei, so kann und will dies nicht besagen, daß durch das Merkmal der Geradheit die Elemente selbst gegeben würden, sondern nur: die Art der Relation von Element zu Element, gleichgültig wie viele deren (nach metrischen Gesetzen) angesetzt werden mögen und wie, sei für das ganze System bestimmt, sobald nur zwei Elemente, und mit diesen deren Relation, gesetzt sind.

Auch das mag zu bemerken nicht überflüssig sein: diese Forderung gilt streng nur für die Reihenordnung nach der Zahl selbst; sie legt dagegen keinerlei Bedingung dem zu Zählenden auf. Das was gezählt wird, etwa Punkte der Zeit oder des Raumes, möchte in seiner Aufeinanderfolge einen Kreislauf beschreiben, die Zählung ginge dabei doch immer gleichförmig weiter. Es möchte das an $n^{\text{ter}}$ Stelle Gezählte mit dem an $1^{\text{ter}}$ Stelle Gezählten identisch sein, die Stelle $n$ der Zählung bleibt von der Stelle 1 deshalb nicht weniger verschieden. Schon darum wäre es nicht möglich, diese Eigenschaft der Zahl irgendwie auf Anschauung (Zeit oder Raum), geschweige auf Wahrnehmung an zählbaren Dingen zu gründen. Ihre Begründung kann nur rein logisch sein; ihr letzter logischer Grund aber ist kein anderer, als daß überhaupt irgendeine veränderliche (so oder anders setzbare) Bestimmung zu ihrer eigenen Möglichkeit irgendeine letzte unveränderliche, nicht anders mögliche, d. h. notwendige Voraussetzung fordert. Diese Forderung eines *Principium* der Bestimmung ist unabweisbar; und ihr genügt, für das, was hier zur Frage steht, einzig jene absolute Identität der Relationsart, die wir als Geradheit definierten.

§ 2. (*Das Kontinuum der Richtungen.*) Nachdem die Einzigkeit der Positionsbeziehung für die Grundreihe gesichert ist, fragt es sich weiter, ob und in welcher Art etwa in irgendeiner ferneren Entwicklung der Zahl eine Mannigfaltigkeit von Positionsbeziehungen doch entstehen kann. Für eine solche Weiterentwicklung ist bisher kein anderer Anhalt gegeben als in den beiden Sinnen der dennoch einzigen Grundrichtung unserer Urreihe. Wir nannten sie zueinander reziprok; sie sind es auch in der genauen Bedeutung, daß jeder die Umkehrung des andern, keiner von beiden absolut der erste ist. Zwar geht die Zählung von der Null „vorwärts", und dies Vorwärts ergibt den Plussinn; so erscheint dieser als der erste. Aber die Plusbeziehung existiert überhaupt nicht ohne die Minusbeziehung; mehr: schon in der Erklärung der Subtraktion erwies sich das Minus sogar ursprünglicher als das Plus. Durch es ist die Beziehung des Nachfolgenden zum Voraufgehenden ebensowohl ausdrückbar wie die des Voraufgehenden zum Nachfolgenden. $1 - 0$ (Stellung von Eins gegen Null) ist ein so korrekter Ausdruck für die Plusbeziehung wie $0 - 1$ (Stellung von Null gegen Eins) für die Minusbeziehung. Natürlich ist die Deutung des Zeichens an sich willkürlich; aber es besteht für sie der sachliche Grund, daß es eines Ausdrucks bedarf für die Positionsbeziehung überhaupt, der also beide Sinne zugleich umfassen muß; zu diesem Ausdruck eignet sich nach dem geltenden Zeichengebrauch das Minuszeichen, nicht das Pluszeichen, weil das erstere, als Zeichen der Subtraktion, unabhängig davon, ob der Subtrahend oder der Minuend die größere Zahl ist, eben die Stellbeziehung als solche gleichermaßen nach ihren beiden Sinnen ausdrückt. Entscheidend ist namentlich, daß man in der Arithmetik tatsächlich die Plusbeziehung aus der Minusbeziehung hervorgehen läßt, da man sagt, daß Minus mal Minus Plus ergibt; während aus der Plusbeziehung die Minusbeziehung nur durch die Minusbeziehung selbst hervorgehen kann. Der doppelten Forderung, daß 1. die Positionsbeziehung überhaupt einen Ausdruck finde, 2. nicht nur ein zweifacher Sinn dieser Beziehung, sondern zugleich die Reziprozität beider Beziehungssinne, nach welcher sie sich gegenseitig bedingen und geben, also das Hervorgehen des einen aus dem andern und zwar gleichviel, von welchem ausgegangen wird, zum Ausdruck komme, wird durch die geltende Bezeichnung entsprochen, indem erstens das nackte Minuszeichen sich zwanglos als Ausdruck der Positionsbeziehung überhaupt deuten läßt, sodann durch $-^0$ der Ausgangssinn, in der Folge der Potenzen des Minus aber ($-^0$, $-^1$, $-^2$ usf.) durch Vermehrung des Exponenten um 1 das Hervorgehen allemal des (relativen) Gegensinns aus dem vorigen als (relativem) Grundsinn bezeichnet, endlich die geraden Potenzen des Minus gleich Plus, die ungeraden gleich Minus (im absoluten Sinne) gesetzt werden. Diese Beziehungen unter den Vorzeichen gelten zugleich, so wie es gefordert ist, unabhängig von jeder Rücksicht auf die mit Vorzeichen zu versehenden Wertbeträge in allen metrischen und Stellbeziehungen; der Betrag des Produkts ergibt sich aus den Beträgen der Faktoren ohne Unterschied des Vorzeichens: $+2 \cdot +3$, $+2 \cdot -3$, $-2 \cdot +3$, $-2 \cdot -3$ geben dem Betrage nach unterschiedslos dasselbe, nämlich $2 \cdot 3 = 6$; das Vorzeichen des Produkts richtet sich allein nach den Vorzeichen der Faktoren, und zwar den obigen

Aufstellungen entsprechend so, daß, jedes Plus für zweimaliges Minus gerechnet, das Produkt positives oder negatives Vorzeichen erhält, je nachdem die Gesamtzahl der Minus in den Faktoren gerade oder ungerade ist.

Noch scheint der Ausdruck der Änderung des Beziehungssinnes durch das Produkt und daher, da die Änderung immer die gleiche ist, durch die Potenz einer Begründung bedürftig. Sie liegt darin, daß die Bedeutung der Produktbildung an sich eine allgemeinere sein muß als die der Vervielfältigung eines Wertbetrages, da man eben nicht bloß numerische Werte, sondern relative (mit Vorzeichen versehene) Zahlen multipliziert. Diese allgemeinere Bedeutung ist die: daß eine bestimmte Änderung selbst wieder einer ihr gleichsinnigen Änderung unterworfen wird. Das gewöhnliche Produkt fällt unter diesen Begriff als wiederholte Setzung wiederholter Setzungen, Zählung von Zählungen, Betrag von Beträgen. So ist, der einfachen Minussetzung gegenüber, als „Minus mal Minus" auszudrücken die Minussetzung einer Minussetzung; die zweimalige Minussetzung nicht im Sinne des „Minus plus Minus"; das wäre eine Veränderung und noch eine ihr gleiche; sondern in der Bedeutung, daß der Minus- d. h. Gegensinn selbst wieder im Minus- oder Gegensinn genommen wird, also, da einmalige Minussetzung Umkehrung des gegebenen Beziehungssinnes bedeutet, diese Umkehrung sich wiederum umkehrt, was gleichbedeutend ist mit der Rückkehr zum Grundsinn.[1])

1) Auf diesen allgemeinen Sinn der Produktbildung stützt sich z. B. H. Graßmann, indem er ihm auf die Multiplikation gerichteter Strecken Anwendung gibt (WW. I² 507; vgl. [*128*] S. 198). Er definiert im Anschluß an eine Aufstellung des älteren (J. G.) Graßmann als Produkt in allgemeiner Bedeutung „das Ergebnis einer Konstruktion, welche aus einem schon Erzeugten (Konstruierten) auf gleiche Weise hervorgeht, wie dieses Erzeugte aus dem ursprünglich Erzeugenden", oder klarer noch als „das Ergebnis einer Synthesis, bei welcher das durch eine frühere Synthesis Erzeugte an die Stelle des ursprünglichen Elementes gesetzt und wie dieses behandelt

Auf die angegebene Weise entsteht nun schon eine erste Mannigfaltigkeit von Beziehungsarten und eine Rechnung mit solchen, vorerst beschränkt auf die reine Umkehrung des jedesmaligen Beziehungssinnes. Diese führt zwar, so oft sie auch wiederholt werden mag, zu nichts Neuem, da eben alle geradzahligen Potenzen unterschiedslos den Plussinn, alle ungeraden den Minussinn zurückführen. So dürftig aber diese neue Rechnungsart an Ergebnissen zu sein scheint, prinzipiell ist sie darum nicht von geringerer Tragweite. Diese liegt darin, daß mit den beiden Grundarten der Positionsbeziehung (Null gegen Eins und Eins gegen Null, oder Minus und Plus) zugleich die Relation dieser Relationsarten (Plus zu Minus und Minus zu Plus) gegeben ist. Diese kann, indem sie von der einen Art der Relation zur andern hinüberführt, ohne weiteres auch als Änderung der Relation verstanden werden, im gleichen Sinne, wie die Folge der Werte 0, 1, 2 ... zugleich die Möglichkeit eines Überganges von Wert zu Wert oder einer Abwandlung durch die Folge dieser Werte ausdrückt. Damit aber sind wir unversehens auf das gestoßen, was wir vorher zurückgewiesen hatten, auf dem damaligen Punkte der Erwägung auch zurückweisen mußten, nämlich die zirkuläre Änderung. Es war also eine ganz richtige Tendenz, welche die Mathematiker leitete, wenn sie annahmen, daß die zirkuläre Änderung an sich nicht minder ursprünglich sei als die lineare und darum schon bei der ersten Aufstellung der Zahlreihe Berücksichtigung fordere. Man erkannte nur nicht zugleich: 1. daß die lineare Änderung schlechthin zugrunde liegt und nicht anders als im

wird". In der Multiplikation der gerichteten Strecken nun kommt zur Multiplikation der Beträge (Längen), die den gewöhnlichen Gesetzen folgt, eine Multiplikation der Positionsbeziehungen (Richtungen in der Ebene), und das erklärt in einfachster Weise (vgl. die oben zitierte Abhandlung *128*) den nichtkommutativen Charakter dieser Art der Multiplikation.

Rückblick auf sie eine zirkuläre Änderung überhaupt zu sicherem Begriff gebracht werden könnte; 2. daß die zirkuläre Änderung, als Änderung der Position, eben auch rein aus den selbständig für sich zu betrachtenden Beziehungen der Position zu begründen ist. In diesen aber hat sie in der Tat ihren schlechthin ursprünglichen Grund, nämlich in der Reziprozität der beiden Beziehungssinne, die mit diesen selbst ursprünglich und unaufheblich gesetzt ist; d. h. jenem Umstand, daß zugleich mit der Beziehung des Folgenden zum Voraufgehenden nicht bloß die des Voraufgehenden zum Folgenden, sondern auch die Beziehung dieser beiden Beziehungen existiert, welche als die Beziehung der Reziprozität oder des wechselseitigen Hervorgehens der einen aus der anderen, oder deren Umkehrbarkeit, unmittelbar die zirkuläre Änderung bedeutet.

Dann aber muß es sofort auch als logisch unbefriedigend empfunden werden, daß diese neue Art der Änderung durchaus nur u n s t e t i g, sprungweise sollte geschehen können. So aber stellte sie bis dahin sich dar; denn von der Grundreihe in die Gegenreihe und umgekehrt würde, wenn die bisherige Betrachtung der Positionsbeziehungen erschöpfend wäre, kein stetiger Übergang stattfinden. Es ist nämlich ein bloßer Schein, daß man vom Plus zum Minus durch die Null in der stetigen Zahlreihe kontinuierlich überginge. Eine Kontinuität liegt zwar vor, aber sie betrifft einzig die Werte. Diese ändern sich stetig von irgendeinem Punkte der Reihe zu irgendeinem andern, und diese Kontinuität wird durch die Null nicht unterbrochen, sondern für die Reihe der Plus- und Minuswerte als Ganzes gerade hergestellt. Die Plusbeziehung dagegen bleibt für alle Werte $> 0$, die Minusbeziehung für alle Werte $< 0$ in sich ungeändert; in der Null selbst findet keine von beiden Beziehungen statt; „Null gegen Null“ kann nicht etwa ebensowohl als Plus- wie Minusbeziehung aufgefaßt werden, sondern in Wahrheit besteht kein Grund, eine von beiden Beziehungen hier anzusetzen. Die Schreibung $\pm 0$ hat nur den verständlichen Sinn, daß die Null zugleich die untere Grenze der Plus- und die obere der Minuswerte darstellt, nicht aber, daß in diesem Grenzpunkt die Gegensätze, als deren Begriff man sonst angab, daß sie in der Vereinigung einander vernichten, friedlich zusammenbeständen. Zwar haben wir diesen Sinn des Gegensatzes des Plus und Minus überhaupt verworfen und betont, daß beide Beziehungssinne vielmehr stets zusammengehen; aber dadurch ist es nicht weniger ausgeschlossen, daß sie jemals begrifflich koinzidieren sollten. Daraus, daß es kein Rechts gibt ohne ein Links und kein Links ohne ein Rechts, folgt nicht, daß je ein Rechts sein eigenes Links, ein Links sein eigenes Rechts sein könnte. Also wird durch die Null nicht eine Kontinuität der Plus- und Minusbeziehung hergestellt, sondern gerade die Diskontinuität des Überganges vom einen zum andern Beziehungssinne kommt darin zum scharfen Ausdruck, daß der Null als solcher in der relativen Zahlreihe mit logischem Recht weder die Plusbeziehung noch die Minusbeziehung zugeschrieben werden kann, aus dem einfachen Grunde, weil sie selbst das Fundament dieser doppelsinnigen Beziehung, das worauf zu beziehen, und nicht ein Bezogenes bedeutet.

Ist demnach in der stetigen Reihe der relativen Zahlen der Übergang von der Plusbeziehung zur Minusbeziehung selbst und umgekehrt nur durch einen Sprung möglich, so weist eben diese Unstetigkeit, je unwidersprechlicher sie vorliegt, um so zwingender auf die Notwendigkeit hin, die hier fehlende Kontinuität durch eine neue Schöpfung des Denkens herzustellen. Der Gedanke selbst vollzieht doch den Übergang stetig. Er wendet den Grundsinn in den Gegensinn und umgekehrt und beschreibt diese Wendung kontinuierlich, gleichsam als Drehung, die sich ohne weiteres auch als kontinuierliche Winkeländerung verstehen läßt. In der Tat ist mit der Relation der Relationen Plus und Minus der Begriff des Winkels schon verhüllt eingeführt: ein neuer Abstand, eine Größe der Verschiedenheit der Beziehungsart ist damit gesetzt; ein Abstand, der bisher zwar nur 1 oder 0 sein, aber doch aus 0 1, aus 1 0 soll werden können. In diesem „Werden" liegt aber schon unabweisbar die Notwendigkeit, auch die Zwischenwerte zwischen den Werten 0 und 1 des Beziehungsunterschieds in Gedanken zu setzen. Kontinuität ist ein so ursprüngliches, unverbrüchliches Gesetz des Denkens, daß überhaupt irgendwelche Diskretion sich nur als Diskretion eines Kontinuums will denken lassen. Also gibt es für das reine Denken das Kontinuum der Beziehungssinne oder Richtungen ebenso wie das Kontinuum der Werte. Und da die Zahl ursprünglich Richtung hat, so fordert auch an ihr diese neue Kontinuität ihren gesetzmäßigen Ausdruck. Dieser Ausdruck ist in der Arithmetik wohlbekannt; es ist: die komplexe Zahl.

§ 3. (*Aus der Geschichte der komplexen Zahl.*) Es ist nach dem Gesagten nicht ein bloßes, zufällig sich einstellendes Bedürfnis der Rechnung, welches eine Mehrheit von Zählrichtungen, d. h., in unserer Zeichensprache ausgedrückt, andere als ganzzahlige Potenzen des Minus fordert. Sondern das Auftreten dieses Bedürfnisses in der folgerichtigen Entwicklung der Rechnung ist selbst das sichere Symptom einer insgeheim wirkenden Gesetzlichkeit des reinen Denkens, die über die ursprünglich einzig gerichtete Zahlreihe hinausdrängt. Es ist aber bekannt, wie hartnäckig die Mathematik sich wohl zwei Jahrhunderte hindurch gesträubt hat, diesem tiefen Zuge des Denkens bis zu vorbehaltloser Anerkennung nicht sowohl seiner wissenschaftlichen als seiner logischen Berechtigung nachzugeben. Die Geschichte des Imaginären [1]) ist eines der denkwürdigsten Zeugnisse für

1) S. z. B. Durège [*42*], Einleitung. Gauß, WW. II, 109, 171 ff.

die siegende Kraft des Logischen in der Mathematik, zugleich aber für die oft zu einem harten Rigorismus sich steigernde formal-logische Gewissenhaftigkeit derselben, die selbst einer so ursprünglich notwendigen, darum auch wie mit Naturgewalt sich Bahn brechenden Neuschöpfung wie der der komplexen Zahl das Heimatrecht im Reiche der mathematischen Begriffe so lange bestritt, als eben ihre logische Zulänglichkeit nicht überzeugend dargetan werden konnte. Die Rechnung mit dem Imaginären entstand schon im Laufe des 17. Jahrhunderts, aber sie galt langehin als eine Rechnung mit dem Unmöglichen; blieb das Imaginäre im Ergebnis stehen, so bedeutete das die Unlösbarkeit der Aufgabe, die Absurdität des Geforderten (so z. B. Montucla). Aber so hartnäckig, wie man ihm das Existenzrecht absprach, behauptete es sich in dieser so bestrittenen Existenz selbst. Nur zögernd verstand man sich dazu, einzugestehen, daß in ihm doch wohl noch eine andere Bedeutung schlummern müsse als die einer zur Vereinfachung gewisser Rechnungen zwar nützlichen, in sich aber sinnlosen Fiktion. Auch die schon früh (zuerst 1693 durch Wallis) gemachte Beobachtung, daß durch die komplexe Zahl die Punkte der Ebene eine ebenso streng gesetzmäßige Darstellung finden wie durch die reelle die Punkte der Geraden, brachte das Bedenken gegen ihre logische Zulässigkeit nicht zum Schweigen. Entscheidender wirkte die Erkenntnis, daß allgemein eine Rechnung mit verschiedenen Einheiten (komplexen Zahlen im weiten Sinne) möglich ist und sinnvoll sein kann. Diesem allgemeineren Begriffe ließ sich nunmehr die Rechnung mit dem Imaginären, nämlich der imaginären in Verbindung mit der reellen Einheit, einfach unterordnen. Freilich die Gleichsetzung des Quadrates der imaginären Einheit mit dem negativen Wert der reellen erschien gerade nun als gewissermaßen zufällig, als nur eine von unendlichen, willkürlich wählbaren Annahmen, die vor anderen keinen weiteren Vorzug habe als jene erstaunliche

Fruchtbarkeit an weittragenden Ergebnissen, für die es bis dahin keine rechte Erklärung gab. Aber wenigstens das Bürgerrecht im Reiche der mathematischen Begriffe konnte dem Imaginären nicht länger vorenthalten bleiben. Schon erklärt Durège die Existenz des Imaginären für hinreichend gesichert durch ihre widerspruchslose Definition; nach den Anwendungen, so wichtig sie sein möchten, habe die reine Mathematik als solche nicht zu fragen; denn ihre durch eindeutige und widerspruchsfreie Definition eingeführten Begriffe begründen in ihrer Definition selbst ihre Existenz; ihre Sätze sind wahr, gleichviel ob sich von ihnen eine Anwendung machen läßt oder nicht. Das ist nun merkwürdig: vordem blieb dem Imaginären die Anerkennung einzig deshalb versagt, weil es in seinem Begriff einen offenen Widerspruch einschließe. Eine Zahl, die mit sich selbst multipliziert eine negative Zahl ergäbe, existiere eben nicht; denn es gebe der Position nach nur positive und negative Zahlen, welche beide, in gerade Potenz erhoben, positive, nie negative Zahlen ergeben. Einzig um der Fruchtbarkeit der Anwendungen willen hatte man die Rechnung mit dem Imaginären dennoch zugelassen, aber stets mit dem ausdrücklichen oder stillschweigenden Vorbehalt, daß man es nur ja nicht für eine rechtschaffene Zahl ansehen dürfe statt für ein Symbol unbekannten Sinnes, mit dem nur merkwürdigerweise sich rechnen und richtige und bedeutsame Resultate herausbringen ließen.

Vielleicht ist es nicht zum wenigsten gerade dieser merkwürdige Erfolg einer Rechnung mit einem bisher unbegriffenen, ja für absurd geltenden Symbol gewesen, der so viele Mathematiker noch bis in die jüngste Zeit verführt hat, zu glauben, daß man am Ende besser tue, auf einen angebbaren logischen Sinn der ersten Voraussetzungen, mit denen die Mathematik arbeitet, zu verzichten und sich mit der Widerspruchslosigkeit der Ableitungen zufrieden zu geben; Zahl einfach zu nennen, womit sich rechnen und Resultate gewinnen lassen, auch wenn für das so Benannte selbst eine sichere Bedeutung nicht angebbar ist. Diesen schroffen Formalismus vertrat auch in dieser Frage wieder in typischer Weise ihrerzeit die Arithmetik von Stolz. Sie dekretierte einfach: da die Gleichung $x^2 = -1$ eine reelle Wurzel nicht hat, so verschafft man ihr Auflösungen durch eine neue „Erweiterung des Zahlsystems". Diese wird an keine andere Bedingung gebunden, als daß für die neuen „Zahlen" dieselben Rechnungsregeln wie für die bisherigen geltend bleiben müssen. Also der reinen Mathematik wurde eine absolute Machtvollkommenheit zugetraut, Zahlen nach Bedarf zu schaffen; sie zu schaffen geradezu aus dem Nichts; denn das Bedürfnis der Verallgemeinerung der Rechnungsregeln ist doch nicht eine Materie, aus der sich etwas schaffen ließe. Daneben wurde dann in „synthetischer" Erwägung eigentlich nur historisch bemerkt, daß, seit man die geometrische Bedeutung der komplexen Zahl kenne, man sich mehr und mehr zur Anerkennung ihrer Zulässigkeit verstanden und die logischen Bedenken zum Schweigen gebracht habe. Irgendein Bedürfnis, zwischen der arithmetischen Definition und der geometrischen Deutung des Imaginären einen logischen Zusammenhang herzustellen, wurde nicht empfunden.

Dagegen zeichnet auch in dieser Frage Hankel sich dadurch aus, daß er diesen fehlenden Zusammenhang doch wenigstens vermißt. Gerade bei ihm läßt sich erkennen, daß besonders Graßmanns große Durchführung der Rechnung mit Größen zu beliebig vielen Einheiten (seine „Ausdehnungslehre"), zumal in Verbindung mit der dem Prinzip nach nahe verwandten Quaternionenrechnung Hamiltons, das volle Zutrauen in die logische Angängigkeit der komplexen Zahlen bei den Mathematikern hervorgebracht hat. Bei Graßmann und Hamilton kommt aber auch schon zu deutlichem Ausspruch, daß durch die Rechnung mit dem

Komplexen die tiefe Kluft, die zwischen Arithmetik und Geometrie bis dahin bestand, überbrückt wird. Die Geometrie wird bei Graßmann geradezu zum bloßen Spezialfall oder „Beispiel“ einer Mathematik, die rein in Rechnung besteht, aber auch über die gewöhnliche Arithmetik und Algebra sich erhebt und diese gleicherweise nur als Spezialfälle unter sich begreift. Im Grunde ist die beiden Wissenschaften sich überordnende „Ausdehnungslehre“ nichts als die Erweiterung der Zahl selbst, als stetigen Gebildes, zugleich auf unbeschränkt viele Dimensionen. Und zwar ist es deutlich eben die Forderung der Stetigkeit, mit der ihr eng verschwisterten der Homogeneïtät, welche den Übergang in die höheren Dimensionen zugleich fordert und möglich macht; wiewohl selbst Graßmann darüber nichts Genaueres angibt, wie eigentlich dieser Übergang sich auch als im logischen Sinne stetiger vollzieht. Gerade die Hinaushebung der Ausdehnungslehre auch über die Zahl (indem diese im gewöhnlichen Sinne, daher streng eindimensional verstanden wird) hat es wohl verschuldet, daß die Dimensionsbetrachtung, so unbeschränkt sie bei Graßmann durchgeführt wird, doch nicht aus den eigenen Begriffen der Arithmetik hervorwachsend, sondern willkürlich in sie hineingetragen erscheint. Und daraus hauptsächlich erklärt es sich wohl, weshalb Graßmann lange Zeit bei den Mathematikern so gut wie unbeachtet bleiben konnte, von neueren Mathematikern aber, die sein Verdienst voll würdigen, selbst jedoch auf dem formalistischen Standpunkte starr verharren (wie Whitehead), als Gesinnungsgenosse begrüßt werden konnte, während er sich doch ausdrücklich und mit ganzer Entschiedenheit auf den „genetischen“ Standpunkt stellt, das Ausgehen von einem „unmittelbaren Anfang“, einem eigentlich Platonischen ἀνυπόθετον, die ursprüngliche, streng stetige „Erzeugung“ der mathematischen Gebilde fordert, über deren Eigenschaften daher auch gar nicht anders entschieden werden könne, als wenn man „auf ihre ursprüngliche Erzeugung zurückgeht“.[1])

Hankel nimmt, wie gesagt, auf Graßmann bereits Bezug. Auch scheint ein innerer Zusammenhang zwischen der arithmetischen und geometrischen Bedeutung der komplexen Zahl ihm schon bestimmter als seinen Vorgängern vor Augen zu stehen. Nur gilt dieser Zusammenhang auch ihm noch als ein verborgener, geheimnisvoller. Die Imaginärzahl ist ihm ein eigenes, „im Geiste gesetztes“, „mentales Objekt“, das zunächst in sich etwas ist, an sich unabhängig davon, wie es etwa im Gebiete der Anschauung oder des Realen zur Erscheinung kommt. Doch liegt, sagt er, in der geometrischen Darstellung der komplexen Zahlen „ein dem formalen Schema . . . zwar dem Begriff nach nicht unbedingt wesentliches, aber doch vollkommen adäquates Phänomen im Raume, in der Anschauungsform des zusammenfassenden Denkens“ vor, die „sich mit psychologischer Notwendigkeit allen unseren abstrakten Vorstellungen als konkretes Abbild beigesellt“. An dieser Ausdrucksweise ist merkwürdig, daß die Anschauung nur als eine besondere Art des Denkens, das in ihr „Konkrete“, ganz Platonisch, als bloßes Abbild, also die rein begriffliche Denkgestalt, der sie sich nur „beigesellt“, als das Urbild angesehen wird. Aber um so unbefriedigender ist es, daß eine notwendige innere Beziehung des anschaulichen Abbildes zum gedanklichen Urbild dennoch nicht aufgezeigt wird. So ist es begreiflich, daß auch Hankel schließlich nicht über die Klage hinauskommt, daß die Metaphysik des Imaginären noch immer sehr im argen liege. Nicht nach einer Metaphysik war zu fragen, so wenig wie nach einer Psychologie, sondern nach schlichter Logik. Das Imaginäre, auch der Zusammenhang zwischen seinem anschaulichen Abbild und dem begrifflichen Urbild, muß sich rein logisch bewältigen lassen,

---

1) S. [*128*], bes. S. 181, 185.

wenn doch die Form der Anschauung selbst nur eine solche des „zusammenfassenden Denkens“ ist.

Dieser Zusammenhang ist es, den unsere obige Betrachtung anbahnen wollte. Seiner Entdeckung war immerhin schon von vielen Seiten vorgearbeitet. Stellt die reelle Zahl die gerade Linie bloß ihrer Länge nach dar — so heißt es schon bei Durège — so die komplexe auch der Richtung nach. Daß hier ein logischer Zusammenhang obwalten muß, konnte nicht lange mehr verborgen bleiben. Wie freilich ein Ausdruck, der rein aus dem Gebiete der Zahl stammt: die Anwendung des rein arithmetischen Verfahrens der (geradzahligen) Radizierung auf die negative Einheit, die einer solchen ihrem Begriff nach ganz unfähig scheint, dazu kommt, den bisher für bloß geometrisch geltenden Begriff der Richtung zu vertreten, das blieb immer noch Geheimnis.

Nahezu erreicht ist die Lösung, soviel ich sehe, zuerst von O. Schmitz-Dumont (Naturphilosophie, 1895). Er trennt von Anfang an (so wie wir) von der rein quantitativen (d. h. metrischen) Betrachtung — in der allein die Quadratwurzel oder mittlere Proportionale unmittelbar eine Bedeutung hat, aber dann auch nur die numerischen Werte angeht — die „qualitative“ Betrachtung, wie wir sagen: der Zählungsrichtung. Für das Verhältnis des Plus und Minus nun glaubt er die rein logische Erklärung zu finden in dem Aristotelischen Begriff des Totalgegensatzes (τελείως ἐναντίον), der seinerseits wiederum mit Quantitätsbegriffen an sich nichts zu schaffen habe. Bloß als Krücke der Anschauung, um einen Träger für die Denktätigkeit zu haben, an dem diese haften könne, wie die Kräfte an den Stoffen in der physikalischen Betrachtung, setze man statt des abstrakten Verhältnisses von Plus und Minus das Verhältnis $(+1):(-1)$, oder in der Umkehrung $(-1):(+1)$. Diesen unter sich äquivalenten Ausdrücken steht dann folgerecht als Ausdruck der Richtungsidentität gegenüber das Verhältnis Plus zu Plus oder Minus zu Minus, also, wenn man auch hier die Krücke der Anschauung zu Hilfe nimmt: $(+1):(+1)$ oder $(-1):(-1)$. Zwischen der reinen Identität aber und dem vollen, aufhebenden Gegensatze liege der vollkommen denkbare Fall, daß zwei Setzungen sich nicht vollständig, sondern nach einem Grade des Mehr und Minder aufheben. Denn Gegensatz und Gradreihe widersprechen sich nicht, seien als denkende Setzungen nicht heterogen in jeder Hinsicht, da sie durch Tätigkeit desselben, in seiner Grundform sich stets gleich bleibenden Denkaktes entstehen. Also habe man das Recht, zwischen $\frac{-1}{-1}$ oder $(-1)^0$ und $\frac{-1}{+1}$ oder $(-1)^1$ die mittlere Proportionale $(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$ zu setzen; womit dann die imaginäre Einheit begründet ist. Die geometrische Darstellung ergibt sich nun von selbst, und zwar nicht als bloße Anwendung auf ein ohnedies Gegebenes, sondern so, daß der Begriff des zweidimensionalen Kontinuums durch den des Richtungs-Kontinuums, welches in der komplexen Zahl seinen sachentsprechenden arithmetischen Ausdruck gefunden hat, erst gegeben wird.

Hierin liegt in der Tat das wahre Prinzip zur Entscheidung der Frage. Im übrigen ist die Ableitung, so wie sie bei Schmitz-Dumont vorliegt, nach mehreren Seiten unbefriedigend. Man sieht nicht, wie der rein logische Begriff des Mittleren zwischen den Gegensätzen dazu kommt, als mittlere Proportionale ausgedrückt zu werden. Und wenn Schmitz-Dumont mit größtem Recht die Richtungsbetrachtung von der metrischen zunächst trennt, so wird dagegen nicht klar verständlich, wie beide hernach wieder zusammenkommen; man sieht nicht, wie eine Gleichung $i^2 = -1$ begründet sei, kurz wie „das“ Imaginäre zur Imaginärzahl wird. Die verschiedenen Richtungen müssen Richtungen der Größensetzung, Richtungen der Zählung, und als solche aus der Natur der Zahl selbst verständlich sein. Das ist es, was bei Schmitz-Dumont vielleicht wohl geahnt, aber jedenfalls zu voller Klarheit nicht gebracht ist. Dies ist aber zugleich die Voraussetzung, um die Richtungsbetrachtung, wie es doch auch Schmitz-Dumont anstrebt, mit der Dimensionsbetrachtung in überzeugende Verbindung zu setzen. Dimensionen sind, als „Abmessungen", eben Zählungen. So wird durchweg der Rückweg von der bloß logischen zur mathematischen Betrachtung bei Schmitz-Dumont nicht gefunden oder doch nicht klargestellt. Und das läßt es begreiflich erscheinen, daß die Mathematiker an dieser anscheinend bloß logischen Aus- oder Umdeutung arithmetischer Begriffe achtlos vorübergingen. Man sah nicht, was für das Verständnis der Zahl da herausspringen solle. Gewiß muß logische Erwägung in dieser so sehr logischen Frage entscheiden, aber nur eine solche, die aus dem Schoße der mathematischen, der arithmetischen Begriffe, die selbst rein logische Schöpfungen sind, homogen hervorgeht, nicht aus einem der Arithmetik an sich fremden Gebiete des Logischen in sie hineingetragen erscheint.

Der Ausgang von dem Aristotelischen Begriff des Gegensatzes ist in der Tat bestenfalls eine Verhüllung, aus der der reine Sachgehalt erst herauszuschälen ist. Wie schon die negative Zahl nicht richtig gedeutet wird durch den Begriff entgegengesetzter als in der Vereinigung einander vernichtender Dinge; wie man schon hier in dem Gegensatz des Plus und Minus den ganz positiven Sinn der Gegenseitigkeit bloßer Beziehungen, den Sinn des Gegenverhältnisses nicht erkannt hat, so konnte erst recht in der Erklärung der komplexen Zahl das Ausgehen vom Gegensatz im Sinne der Aufhebung zu Null (als dem vermeinten arithmetischen Nichts) nur in die Irre leiten. Vielmehr war die Aristotelische, absolut verstandene Kontrarietät erst selbst zu relativieren zum Richtungsgegensatz (Plus-Minus-Verhältnis), welche Relativierung übrigens der Sache nach schon Kant in der wenig beachteten, bedeutenden Schrift von den negativen Größen (1763) vollzogen hat. Im Richtungsgegensatz aber verbirgt sich als die wahre Wurzel der gesuchten Mannigfaltigkeit der Position die zirkuläre Änderung. Der Sache nach schwebt diese auch Schmitz-Dumont vor; auf die zyklische Funktion wird geradezu hingewiesen (S. 113 u. 140). Aber es kommt bei ihm wenigstens nicht zur Klarkeit über ihre Stelle im System der logischen Grundbegriffe und daher über die Art ihrer Verbindung mit den übrigen für die Begründung der Arithmetik erforderlichen Urbegriffen des reinen Denkens; man versteht nicht, wie die Zahl selbst der zirkulären Änderung fähig sein soll.

§ 4. (*Endgültige Rechtfertigung der Einführung der Begriffe Dimension und Richtung in die Zahl.*) Verstehen läßt es sich in der Tat wohl, daß man ernstes Bedenken trug, die Begriffe Dimension und Richtung mit dem Begriff der Zahl in eine so unmittelbare Verbindung zu setzen, wie wir es fordern. Hat doch selbst Graßmann nicht gewagt, sie geradezu der Zahl als Merkmale beizulegen; beide bleiben auch bei ihm im Grunde nur Eigenschaften des Zählbaren, für die in der „Ausdehnungsgröße" nur das geeignete Mittel methodischer Behandlung geschaffen werden sollte. Wie dagegen aus dem eigenen Begriff der Zahl Dimension und Richtung folge, das zu zeigen nimmt auch er keinen Anlauf. Aber eben darum haftet seiner Ausdehnungsgröße ein kaum überwindlicher Schein des Willkürlichen, künstlich Zurechtgemachten an.

Die Zahl als bloßer Ausdruck des Mehr und Weniger scheint ein lineares Gebilde sein und bleiben zu müssen und also, mit einer Mehrheit von Dimensionen, auch eine Mehrheit von Richtungen auszuschließen. Das ist es, was allen Bedenken gegen die komplexen Zahlen von jeher offen oder versteckt zugrunde lag und bis heute zugrunde liegt.

Zwar fällt auch jeder Schatten von logischem Widerspruch sofort weg, wenn man verschiedene, aber unter sich verknüpfte Zählungen einmal zuläßt. Nur für eine einzige

Zählung muß auch die Nullbeziehung einzig sein; diese Bedingung gilt dagegen nicht mehr, sobald eine Mehrheit unter sich verknüpfter Zählungen angenommen werden darf. Aber diese Annahme selbst erscheint zunächst logisch nicht gerechtfertigt, sondern allenfalls nur willkürlich setzbar. So erklärt Whitehead: das Symbol $(-1)^{\frac{1}{2}}$ sei an sich als Zahl sinnlos. Daß algebraische Operationen mit diesem sinnlosen Symbol sich ausführen lassen und zu Sätzen führen, die für Zahlen gelten, sucht er dadurch verständlich zu machen, daß die Operationen der Algebra über die Zahl (als ein besonderes Gebilde) hinausreichen. Ihre Gesetze, obgleich durch die Arithmetik ursprünglich dargeboten, hängen doch an sich nicht von ihr ab, sondern — wovon? Von der Übereinkunft! Nur, da es doch ursprünglich Regeln der Arithmetik waren, so bleiben die arithmetisch deutbaren Ergebnisse algebraischer Entwicklungen immer richtig. Aber daß der bloßen Übereinkunft ein Kraft innewohne, durch arithmetisch absurde Vermittelungen arithmetisch sinnvolle Ergebnisse zutage zu fördern, will nicht einleuchten. So ist es in der Tat auch nicht. $(-1)^{\frac{1}{2}}$ ist allerdings keine „Zahl", wenn man sich einmal darauf festgelegt hat, „Zahl" nur ein einzelnes Glied einer einzelnen Zählung zu nennen. Sobald man dagegen anerkennt, daß aus systematischer Verknüpfung verschiedener Zählungen Zahlausdrücke hervorgehen können, welche nicht Glieder isolierter Zählungen, sondern Beziehungen unter verschiedenen, doch gesetzmäßig verknüpften Zählungen bedeuten, wird der Streit, ob man solche als arithmetische Begriffe anerkennen soll oder nicht, zum unnützen Wortstreit; die Gültigkeit eines durch die komplexe Zahl erhaltenen Ergebnisses für reelle Zahlen ist dann um nichts rätselhafter, als daß ein geometrischer Beweis, der auf $n$ Dimensionen Bezug nimmt, eine Aussage im Bezug auf $n - 1$ Dimensionen begründen kann.

Dies setzt freilich die Zulässigkeit mehrfacher Zählung schon voraus. Nun liegt es nahe genug, darauf hinzuweisen, daß die sogenannten Erweiterungen der Zahl sämtlich auf der Einführung verschiedener aber verknüpfter Zählungen beruhen, wie schon Hamilton (in der Vorrede seiner Vorlesungen) bemerkt hat. Und zwar bietet sich zur nächsten Vergleichung die relative Zahl an, in der die Zählung 0, 1, 2... zweimal auftritt, unterschieden durch das Vorzeichen, verknüpft im gemeinsamen Ausgangswert 0; verknüpft aber durch die, nicht aus irgendwelcher Willkür angenommene, sondern mit der ursprünglich die Zahl erzeugenden Grundrelation von 0 zu 1 oder 1 zu 0 zugleich gegebene Beziehung dieser beiden Beziehungsweisen (des Plus und Minus), gemäß welcher die eine die Umkehrung der anderen oder ihren Gegensinn darstellt. Durch diese so ursprünglich begründete Verknüpfung wird die relative Zahlreihe, obgleich sie von einer Seite als Verknüpfung zweier Zählungen erschien, zu einem fortan unteilbar einheitlichen Gebilde. So erwiesen auch die gegeneinander inkommensurabelen Zählungen, die sich zunächst als verschiedene, obgleich streng gesetzmäßig verknüpfbar, darstellten, sich in letzter Betrachtung, nachdem der tiefere Grund dieses Unterschieds und dieser Verknüpfbarkeit erkannt war, als nicht bloß hinterher vereinbar, sondern wurzeleins und in der einen, stetigen Zahlreihe notwendig zusammenhängend. So muß denn wohl auch die komplexe Zahl, so sehr ihr zunächst der Schein eines willkürlichen Kompositum anhaftet, in einer letzten Betrachtung sich als wesentlich einiges Gebilde, im Ursprung aller Zahlsetzung von Haus aus begründet, erweisen. Irgendein Hinweis auf die Tatsache, daß mehr Dimensionen und Richtungen des Zählbaren, z. B. räumlicher Beziehungen vorkommen und einen Ausdruck in der Zahl verlangen, kann hier schlechterdings nichts ausrichten; sondern die Entscheidung muß streng in den eigenen Gesetzen der Zahl gefunden werden. Da aber haben wir sie dem Prinzip nach bereits gefunden.

Zur Darstellung mehrdimensionaler Beziehungen, nachdem solche anderweitig gegeben sind, würde die gewöhnlich verstandene, eindimensionale Zahl zur Not hinreichen; obwohl genau betrachtet nur deshalb, weil schon die schlichte Operation des Multiplizierens ein Analogon von Mehrdimensionalität einschließt. Nämlich es läßt sich schon die allein auf die Werte bezogene multiplikative Entwicklung der Zahl zum Ausdruck mehrdimensionaler Beziehungen des Gezählten gebrauchen, wie es schon den Pythagoreern geläufig war. Aber es sind immer nur die Werte, die so zum Ausdruck gebracht werden, nicht die Dimensionsbeziehungen selbst. Wertbeträge mehrdimensionaler Gebilde werden aus den in jeder einzelnen Dimension gemessenen hergeleitet auf Grund voraus gegebener Beziehungen unter den Dimensionen, von denen die gewöhnliche Multiplikation an sich nichts weiß. Es erfolgt also auf diese Weise die Entwicklung in die Dimensionen nicht durch die Zahl.

Nun aber haben wir einen Sinn der Multiplikation kennen gelernt, der unmittelbar die Mehrheit der Dimensionen, und zwar sofort in voller Allgemeinheit einführt. In der multiplikativen Entwicklung der r e l a t i v e n Zahl ist, wie sich gezeigt hat, die Überschreitung der einzigen Dimension der Zahl dem Grundsatz nach schon vollzogen und faktisch in Gebrauch genommen; daher denn auch das Imaginäre sich unabweislich ergibt, sobald die multiplikativen Beziehungen der relativen Zahlen folgerecht weiterentwickelt werden. Das Vorzeichen setzt eben schon die Richtung, und zwar sofort eine Zweiheit von Beziehungsrichtungen und einen möglichen Austausch unter diesen. Damit ist die Eindimensionalität grundsätzlich überschritten, so daß für eine folgerechte Weiterentwicklung der Zahlbeziehungen schon kein anderer Weg übrig bleibt als, die Mehrdimensionalität allgemein zur Voraussetzung zu erheben.

Die bloße Wertbetrachtung war auf mehr Dimensionen, wie gesagt, nur anwendbar, wenn diese anderweitig gegeben waren. Auch aus der bloßen Reihenfolge, solange diese einseitig als Sonderung verstanden wird (indem zwar die Verbindbarkeit überhaupt festgehalten, aber nach irgendeiner unterschiedlichen Art der Verbindung nicht gefragt wird) würde eine Mehrheit von Dimensionen nicht folgen. Und denkt man sich auch eine Reihenfolge wiederum solcher Reihenfolgen (selbst unendlicher, was sich als zulässig erwies), und Reihenfolgen dritter, vierter, *n*ter Stufe, doch käme man nicht aus der einzigen Dimension heraus, sondern nur zu den Cantorschen oder Veroneseschen Unendlichen. Dagegen mit der Multiplikation als Relation der Relation, sofern diese auf die Positionsbeziehung, zunächst ganz abgesehen von Wertbeziehungen, sich erstreckt, tritt sofort die mehrdimensionale Betrachtung in ihr volles Recht.

Nicht nur Wertbeträge haben, auf Grund des Mehr und Weniger, gegeneinander eine Lagebeziehung, sondern Lagebeziehungen selbst haben untereinander eine Lagebeziehung. Damit ist unmittelbar die Positionsbetrachtung selbst zur zweiten Dimension erhoben. Die Potenz, als Potenz der Lageänderung, ist unmittelbar ihrem Begriff nach die Dimension.

Die Einzigkeit unserer Urreihe bleibt dabei übrigens unangetastet. Sie gerade ist gefordert als Vergleichsgrundlage für jede über eine Dimension hinausgehende Positionsbeziehung. Die Urreihe wird damit zur Nullreihe, im Sinne des festen Ausgangs für die Positionsbetrachtung. Eben als solche mußte sie absolut eindeutig konstruiert werden, damit dann die ganze, nunmehr unbeschränkte Mannigfaltigkeit der Positionsbeziehungen auf ihr sich aufbauen könne. Nämlich auch die ungeänderte Lage wird, im Hinblick auf die nun als möglich erkannte Änderung, zum Lageverhältnis, dem Verhältnis einer gegebenen Lage zu sich selbst, welche als nullte Potenz der Grundänderung der Lage folgerecht ausgedrückt wird. Die „gerade" Reihe positiven Vorzeichens wird mit anderen Worten zur Reihe vom Winkel 0, während die gerade reelle, d. i. positiv-negative Reihe dem gestreckten Winkel oder dem Winkel 1, nämlich der Fundamentaländerung der Positionsbeziehung, von Plus in Minus oder umgekehrt, entspricht. Die Übertragung der Einheitsstrecke aus dem Plus- in den Minussinn drückt sich dann folgerecht aus als Änderung des $(-1)$ von der nullten zur ersten Potenz. Dann entspricht $(-1)^{\frac{1}{2}}$ der Halbierung des gestreckten Winkels, also der Normale, die beliebigen gebrochenen Potenzen von $(-1)$ der beliebigen Winkelteilung zwischen 0 und 1, wobei die $n$ verschiedenen Werte der $n$ten Einheitswurzel in bekannter Weise ihre (wie man sagt) „geometrische" Deutung finden.

Eine rein mathematische Ausführung in diesem Sinne, auf Grund einer Erweiterung der goniometrischen Funktionen, welche diesen statt des Winkels $\frac{1}{2}\pi$ den beliebigen Winkel $\frac{1}{n}\pi$ zugrunde legt, woraus zugleich eine entsprechende Erweiterung der Hamiltonschen Quaternionen folgt, findet man in einer Arbeit von Unverzagt (*174*, 1876; vgl. auch Drobisch, *38*[a], 1848). Besonders auch darin entspricht diese Darlegung ganz unseren eben entwickelten Voraussetzungen, daß sich die Längenbeziehung bei ungeänderter Beziehungsrichtung als bloßer Sonderfall der goniometrischen, nämlich für den Winkel 0, ergibt. Mit Recht sieht Unverzagt in der so begründeten Rechnungsart, die nur der konsequente Ausbau der von Möbius, Hamilton und Graßmann angebahnten ist, eine der möglichen Erfüllungen der Leibnizschen Forderung einer Analysis, welche die Lagebeziehungen in gleicher Weise wie die Größenbeziehungen und auf gleicher Linie mit diesen zu behandeln gestatte (*Analysis situs*); welche Forderung ebenso für die Entdeckung der projektivischen Geometrie durch Poncelet, für Riemanns Gebietsrechnung und für Graßmanns Ausdehnungslehre wegweisend gewesen ist. Bei diesen allen erwies sich die Positionsbetrachtung fundamentaler und daher umfassender als die bloße Wertbetrachtung; so wie die komplexe Zahl die gewöhnliche zugleich umfaßt. Die Zahl existiert eben nicht ohne die Richtung, und nur so lange erscheint die in Abstraktion von der Richtung betrachtete Zahl einfacher, als man unterläßt, die Positionsbeziehung in vollem Umfang in Betracht zu ziehen; während jeder Ausdruck der letzteren durch die erstere 1. nicht ohne gewisse Minimalvoraussetzungen aus dem Gebiete der Position (zum wenigsten das Verhältnis von Plus und Minus) möglich ist, 2. notwendig komplizierter und weniger direkt ausfällt als ein solcher, der die Positionsbeziehung von Anfang an auf gleicher Linie mit der auf die bloße Extension erstreckten Maßbeziehung, daher direkt und ihrem vollen Umfange nach ins Auge faßt. Vor allem behält jede Art der Zurückführung der Lage- auf Wertbeziehungen unvermeidlich in den Voraussetzungen etwas Willkürliches, was dagegen ganz wegfällt, sobald die Lagebeziehung in gleichberechtigter Stellung mit der Wertbeziehung vom ersten Anfang an berücksichtigt wird. Die Vergleichung irgendeiner Cartesianischen Behandlung der Richtungen in Verbindung mit den Längen mit der Streckenrechnung von Möbius, Graßmann, Hamilton oder Unverzagt läßt den Unterschied sofort in die Augen fallen. Freilich mußten die Zahlbeziehungen im engeren Bereich bis zu einem gewissen Punkte entwickelt sein, ehe sie diese umfassendere Bedeutung frei entfalten konnten. Man braucht die ganzen Zahlen, selbst um die Potenzen, auch als Potenzen der Richtung, ausdrücken zu können. Der Richtungsunterschied hat selbst einen Betrag; es gibt gleiche, also auch doppelte usw. Änderungen der Richtung, die sich als solche notwendig durch Zahlbeträge ausdrücken. Dagegen ist die Richtungsverschiedenheit auf keine Weise aus irgendeiner bloßen Verschiedenheit von Größenbeträgen konstruierbar, vielmehr jede Änderung der

Größenbeziehung unterliegt von Anfang an zugleich der Richtungsbeziehung; nur wird zur größtmöglichen Vereinfachung die Richtungsbeziehung zunächst ohne andere Änderung als die einfachste (von Plus in Minus und umgekehrt) angenommen und läßt so in den Rechnungen ihre umfassendere Bedeutung nicht sofort erkennen. Diese müßte in logisch-radikaler Betrachtung auch schon in der gewöhnlichen Zahl irgendwie mit zum Ausdruck gebracht werden. So geschieht es in der Tat auf die angegebene Weise bei Unverzagt; und so geschah es auch schon bei Graßmann, indem die Zahlgröße zur Ausdehnungsgröße nullter Stufe (ebenso wie als diskrete zum bloßen Quotienten stetiger Größen) wurde; womit der Sache nach gesagt ist, daß die Ausdehnungsgröße als stetige $n$-dimensionale Zahl der gewöhnlichen (diskreten eindimensionalen) Zahl (d. h. Menge von Einheiten) sich logisch überordnet und sie als Sonderfall einschließt. Durch diese Überordnung aber stellt nun die Einheit des Systems sich erst vollständig her. Es kann sich der Schein nicht länger behaupten, als sei diese durch die Zulassung von mehr Dimensionen durchbrochen und der Weg willkürlicher Erweiterungen beschritten, den ein logisch-genetischer Aufbau der Zahl streng meiden muß. Die eindimensionale Zahl vielmehr bliebe der Position nach unstetig; also mangelte gerade ihr die wesentliche logische Einheit, welche unbedingt Kontinuität erfordert.

§ 5. (*Verhältnis der Begriffe Dimension und Richtung.*) Nur eines bedarf hier noch der weiteren Aufhellung, nämlich das innere Verhältnis der Begriffe Dimension und Richtung untereinander. Ich glaubte in meinen ersten auf diese Frage bezüglichen Untersuchungen (*127*, *128*) unbedenklich die Mannigfaltigkeit der Dimensionen erst durch die der Richtungen einführen zu können. Hiergegen wurde von mehreren Seiten eingewendet: es leuchte nicht ein, mit welchem Recht überhaupt aus der Grundreihe hinausgegangen werde. Zumal wenn die Grundreihe von vornherein die Zahlreihe sein (die Zahl vor den Richtungen und Dimensionen für sich feststehen) sollte, so war in der Tat diese Berechtigung nicht gegeben. Zählen (durfte man einwenden) heißt in eine Reihe ordnen, also gibt es insoweit nichts außer der einen Reihe. Diesem Bedenken suchte ich dann (*130*, *133*[1]) dadurch zu begegnen, daß ich die Mehrdimensionalität der Zahl unabhängig von der Richtungsbetrachtung einführte auf Grund der Erwägung, daß ja unsere Grundreihe nicht ein Ding, sondern ein reines Verfahren bedeute. Daher lasse sich diese Reihe nicht bloß einmal, sondern beliebig vielfach setzen; es lassen sich Reihen solcher Reihen bilden, jede für sich von gleichem Aufbau wie die ursprüngliche, alle aber verbunden durch ein System von Beziehungen, in jeder Hinsicht entsprechend dem der Einzelglieder der Grundreihe; nicht also als gleichartige Fortsetzung derselben Reihe, sondern in neuer Funktion, indem die Glieder der Reihe jetzt weder Einzelglieder noch irgendwie begrenzte Reihen solcher, sondern ganze, unendliche Reihen, ebenso wie die Grundreihe, sein sollen. Es ließen sich dann auch wiederum Reihen solcher Reihen von Reihen bilden, und so unbeschränkt weiter. So ergaben sich die Dimensionen — scheinbar — vor den Richtungen, und zwar sofort unendliche; und damit schien die vorher vermißte Grundlage für eine Mannigfaltigkeit auch der Richtungen gewonnen. Nämlich es ließ sich nunmehr leicht zeigen, daß es in sämtlichen, der Voraussetzung nach durchaus identisch konstruierten Reihen z. B. ein Glied 0, ein Glied 1 usf. gab, also, wenn man die einander entsprechenden Glieder der verschiedenen Reihen durch Indices unterschied, Reihen:

$$\begin{array}{c} 0_0\ 1_0\ 2_0 \ldots \\ 0_1\ 1_1\ 2_1 \ldots \\ 0_2\ 1_2\ 2_2 \ldots \\ \text{usf.} \end{array}$$

Es bildeten aber dann z. B. die Nullglieder sämtlicher Reihen ($o_0$ $o_1$ $o_2$ . . .) auch unter sich eine Reihe, welche mit der Grundreihe das Glied $o_0$ gemein hat. Und zwar bildeten die Nullglieder eine gerade Reihe; denn da die übrigens in jeder Hinsicht identisch konstruierten Reihen auch in derselben, nicht bloß von Glied zu Glied gleichen, sondern zugleich schlechthin einfachen Art der Relation zueinander geordnet sein sollten, wie die Glieder der Grundreihe, so konnte in der Tat auch zwischen den identischen Gliedern sämtlicher Reihen (z. B. den Nullgliedern) nur dieselbe einfache, immer identische Relationsart (die als Geradheit schon definiert war) stattfinden. Diese Reihe hatte sofort auch für sich einen Plus- und Minussinn; es fragte sich nur noch, wie dieser sich zum Plus- und Minussinn der Grundreihe verhalten müsse. Die Frage entschied sich mit Notwendigkeit dahin, daß beide sich zu beiden (im Grundfall) gleich verhalten, d. h. die Relation Plus zu Minus oder Minus zu Plus der Grundreihe durch die Querreihe, ebenso die Relation Plus zu Minus oder Minus zu Plus der Querreihe durch die Grundreihe halbiert gedacht werden mußte. Für diese, immerhin nicht unmittelbar einleuchtende und schwer als unerläßlich zu beweisende Annahme sah ich den entscheidenden prinzipiellen Grund darin, daß hier wie stets in genetischer Ableitung der Fall der Gleichheit zugrunde zu legen sei. Eine ungleiche Beziehung nämlich würde, wenn keine Unbestimmtheiten bleiben sollen, anderweitige Bestimmungsstücke fordern, was der genetische Aufbau verbietet. Gilt aber die Voraussetzung, so ist durch eine so konstruierte Querreihe (z. B. die der Nullglieder sämtlicher Reihen) die Senkrechte dargestellt; man hat also zunächst die Normalrichtung, die der gewöhnlichen Imaginärzahl $(-1)^{\frac{1}{2}}$ entspricht. Es machte dann keine besondere Schwierigkeit mehr, die Winkelgröße allgemein, in zwei Dimensionen zunächst, ferner aber, da die einmal eingeführte Dimensionsbetrachtung ohne weiteres für eine beliebige Zahl von Dimensionen zureicht, auch für beliebige Dimensionen einzuführen.

Diese Deduktion scheitert schwerlich an dem Einwand von Max Simon[1]) (dem die obige Darstellung implicite schon begegnet ist), daß man auf die angegebene Art die Cantorschen transfiniten Zahlen, aber nicht die qualitative Verschiedenheit der Richtungen in der Ebene oder die komplexen Zahlen erhalte. Es war doch Voraussetzung, daß der ursprünglichen Reihe alle Werte angehören, die in der gleichen Relation (Nullbeziehung) überhaupt setzbar sind. Für die Cantorschen Transfiniten aber gilt dieselbe Art der Nullbeziehung, und zwar als Beziehung auf eine und dieselbe, soweit überhaupt einzige Null der Urreihe; sie gehören also, wofern sie überhaupt angenommen werden, notwendig derselben, ursprünglich einzigen Reihe an. Wird nun diese Reihe wiederholt gesetzt und unter den so gesetzten Reihen eine neue Beziehung angenommen, so ergibt sich nicht eine Fortsetzung der ursprünglichen Reihe in ein Transfinites nur höherer Ordnung, sondern, wenn überhaupt etwas, dann notwendig der Überschritt in eine neue Dimension.

Aber allerdings wird die Überschreitbarkeit der ursprünglichen, als einzig angenommenen Richtung der Zählung überhaupt hierbei stillschweigend schon vorausgesetzt, und das ist es wohl, was der Einwand wesentlich besagen wollte. So berührt sich dieser Einwand nahe mit dem, welchen Jonas Cohn (*28*, S. 212 ff.) gegen Russells der meinigen nahestehende wenn nicht äquivalente Einführung der Dimensionen[2]) erhebt. Russell machte nämlich die Bemerkung, die auch mir zu meiner Aufstellung den Anstoß gegeben hatte, daß in Graßmanns Darstellung der Dimensionen durch die komplexen Zahlen beliebiger Ordnung die

1) Zeitschr. f. Math. u. math. Unterricht, XXXIII, S. 125.
2) [*154*] Ch. 44, §§ 351 ff.

Verschiedenheit der Einheiten und damit die Mehrheit der Dimensionen nicht wirklich abgeleitet, sondern ohne Begründung eingeführt wird. Aus den Gesetzen der bloßen Zahl scheint sie überhaupt nicht abgeleitet werden zu können, da eine derartige qualitative Unterscheidbarkeit der Einheiten (so sagt Cohn) „unter den Voraussetzungen der Arithmetik nicht vorkommt". Russell glaubte nun diese Lücke zu schließen durch eine Konstruktion ähnlich der oben angegebenen, von mir zuerst 1901 vorgetragenen, nämlich durch Bildung von Reihen zweiter, dritter, *n*ter Ordnung, d. h. Reihen von Reihen (oder Beziehungen von Beziehungen), Reihen wieder solcher Reihen, und so unbeschränkt weiter. Auch Russell denkt indessen nicht daran, die so entstehenden Systeme als reine Entwicklungen der Zahl anzusehen. Sie gehen nicht hervor durch eine Erweiterung von Zahlbeziehungen auf *n* Dimensionen, sondern geben, wie er sagt, dieser Erweiterung (d. h. den komplexen Zahlen) wo nicht den „Ursprung", doch den „Seinsgrund" [1]); d. h. man bildet die Systeme komplexer Zahlen, um die Elemente der *n* dimensionalen Mannigfaltigkeit dadurch darstellbar zu machen, nachdem diese unabhängig von der Zahl — nämlich, wie Russell meint, rein logisch und nicht arithmetisch — begründet sind.[2]) Insofern wird Russell wohl nicht getroffen durch den Einwand Cohns [3]), daß die Möglichkeit von mehr Dimensionen bedingt sei durch eine inhaltliche Verschiedenheit von Gegenständen, die aus rein arithmetischen Bestimmungen nicht zu schöpfen sei; denn die reine Arithmetik schließe durch ihre Voraussetzungen eine solche Verschiedenheit gerade aus. „Wenn also Russell glaubt, mehrdimensionale Systeme arithmetisch erzeugt zu haben, so irrt er." Nach dem Gesagten scheint

1) Couturat [*31*] S. 145.
2) Russell a. a. O., Couturat S. 141, 145.
3) a. a. O. S. 215.

es nicht, daß dies der Glaube Russells überhaupt gewesen sei. Dagegen war es allerdings mein Glaube, unmittelbar durch die Zahl selbst, nämlich als komplexe, die Mehrheit der Dimensionen einzuführen. Somit ist meine Aufstellung von der Russells prinzipiell verschieden. Aber gerade so scheint eher sie als die Russells dem Einwande Cohns ausgesetzt, der dem Kern der Sache nach offenbar auf das alte Bedenken zurückkommt, daß die Zahl als solche überhaupt nur von einer Dimension, daher aus sich einer Erweiterung auf mehr Dimensionen unfähig sei.

Aber darauf ist oben die Antwort schon gegeben worden; und in wiederholter, gründlicher Erörterung der Frage auch in unserem philosophischen Seminar sind wir auf dieselbe Antwort immer zurückgekommen: die Überschreitung der einzigen Dimension ist damit gegeben, daß schon in der ursprünglichen Zahlreihe nicht bloß ein Unterschied der Beziehungsart, sondern auch eine neue Beziehungsart dieser Beziehungsarten, also eben eine Relation von Relationen, d. h. aber, das Fundament einer zweidimensionalen, überhaupt mehrdimensionalen Betrachtung eingeschlossen liegt. Nur das bleibt zu entscheiden, ob diese Überschreitung ursprünglich durch die Positionsbeziehung selbst, d. h., wie schon oben ausgesprochen wurde, durch die direkte Einführung der Winkelgröße in die Zahl, oder durch die von verschiedenen Einheiten zu geschehen habe. Welche von beiden Betrachtungen man auch zum Ausgang wählt, in jedem Fall muß hernach die andere hinzutreten, und es lassen sich an sich gleichgut unter Voraussetzung des Winkels die Reihen von Reihen begründen, wie jener unter Voraussetzung dieser; faktisch sind in der Entwicklung der mathematischen Wissenschaft beide Betrachtungsarten hervorgetreten und auch sofort miteinander verbunden worden. Nach wiederholter Überlegung aber will es mir scheinen, daß die erstere Betrachtungsart die fundamentale, meine ursprüngliche Ableitung also in sich wohlbegründet gewesen ist, obgleich ich die zureichende Begründung damals nicht finden konnte und deshalb zunächst den anderen Weg glaubte wählen zu sollen. Die Reihen von Reihen nämlich verlangen für die neue Anordnung (die der Reihen selbst) schon eine neue Richtung, wie auch immer deren Beziehung zur Richtung der Urreihe angenommen wird. Also kann man nicht die Richtungsverschiedenheit überhaupt durch die Reihen von Reihen (d. h. die ausgeführte Dimensionsbetrachtung) erst einführen wollen. Dagegen werden umgekehrt durch die neuen Richtungen unmittelbar auch neue Reihen, mithin Reihen von Reihen hergestellt; denn die Richtungen sind Richtungen der Zahl; eben für sie steht das Verfahren des Zählens, wie es zunächst als eindimensionales aufgestellt wurde, fortan zu unbeschränkter Wiederholung bereit, nachdem sich erwiesen hat, daß die Richtungen überhaupt nicht durch den an sich etwa von ihnen unabhängig vollziehbaren Aufbau der Zahl bedingt, sondern vielmehr für diesen ihrerseits bedingend sind. In diesem bestimmteren Sinne behält mein früheres Argument: daß die Zahlreihe nicht ein Ding, sondern ein Verfahren bedeute und darum nicht bloß für ein einziges Mal, sondern zu beliebig wiederholter Anwendung zu Gebote stehe, volle Geltung und findet gerade in der eben angegebenen Verbindung mit der Richtungsbetrachtung uneingeschränkte und einwandfreie Anwendung. Schon die ursprüngliche Zahlreihe wird, wie schon gesagt, durch die Doppelheit des Beziehungssinns zur zweifachen Zählung; es ist also die Einzigkeit der Zählung schon durch die relative Zahl überschritten, ganz im Einklang mit unserer Behauptung, daß durch die Richtungsbetrachtung unmittelbar die Mehrheit der Zählungen, also auch der Einheiten herbeigeführt werde. Der ferneren Erweiterung der Richtungsbetrachtung muß daher auch die Erweiterung der Zählung, mithin der Einheiten, und damit die Dimensionsbetrachtung, unweigerlich folgen.

§ 6. (*Abschließende Betrachtungen über die Dimensionen der Zahl.*) Hiermit ist die prinzipielle Frage entschieden. In welcher genauen Gestalt dann die weitere Konstruktion ausgeführt wird, ob durch die zirkuläre Änderung oder durch ein Quadratnetz (worauf die obige Darstellung hinauskam), ist nicht von der gleichen prinzipiellen Wichtigkeit. Auf die erstere Art erhält man, zunächst vom Nullpunkt der ursprünglichen Reihe ausgehend, die Mannigfaltigkeit der durch diesen Punkt gehenden Strahlen, also das Strahlenbüschel. Dieses reicht aus, die Punkte zunächst der Ebene zu geben; in entsprechender Weise lassen sich aber auch die Punkte im drei- oder $n$-dimensionalen System, immer von demselben, einzigen Nullpunkt aus, hervorgehend denken. Aber auch eine Konstruktionsart wie durch ein Quadratnetz läßt sich aus unseren Voraussetzungen unschwer begründen. Denn da ganz die gleichen Konstruktionen von jedem Gliede der Ausgangsreihe aus (indem man es zum Null-Punkt wählt) möglich sind, so steht es ohne weiteres auch frei, die ganze Grundreihe in irgendeiner denkbaren Richtung, z. B. der senkrechten (der übrigens ein absoluter Vorzug nicht zukommt), auch stetig transformiert zu denken, also die Ebene (wie man gewöhnlich sagt) durch geradlinige Fortbewegung der Geraden (sowie diese durch Bewegung des Punktes unter Festhaltung einer einzigen Richtung) sich erzeugen zu lassen, und auf entsprechende Weise dann weiter jedes System von $n$ Dimensionen aus dem von $n - 1$ Dimensionen. Es scheint, daß Graßmann ($A^1$, § 16) eine solche Erzeugungsweise im Sinne gehabt hat, da er 1. aufs stärkste betont, daß alle durch verschiedene „Grundänderungen“ (Richtungen) erzeugten Gebilde „nicht als anderweitig schon gegebene aufgefaßt werden dürfen, sondern als ursprünglich erzeugt“, und da er 2. das so entstandene System zweiter Stufe ganz als Ebene beschreibt, welche dadurch erzeugt gedacht werden soll, daß „alle Punkte einer Geraden nach einer neuen, nicht in ihr enthaltenen Richtung (oder der entgegengesetzten) sich fortbewegen", so daß die Ebene als Gesamtheit der Parallelen erscheint, welche eine gegebene Gerade durchschneiden, aber, da sie selbst sich nicht schneiden und auch die ursprüngliche Gerade nicht noch ein zweites Mal treffen, durchweg verschiedene Punkte ergeben. Ebenso gelangt er dann zum Raum durch Bewegung der Ebene nach einer neuen, nicht in ihr liegenden Richtung oder der dieser entgegengesetzten. Immerhin erscheint diese geometrische Ableitung bei Graßmann bloß als Beispiel einer allgemeineren, die er im Sinne hat, aber in keiner Weise entwickelt, so daß man auf das Gemeinte eben nur aus diesem „Beispiel" zurückschließen kann. Auch fällt auf, daß im weiteren Aufbau seines Systems von der Voraussetzung einer solchen Erzeugungsweise seiner Elemente gar kein Gebrauch gemacht, besonders die gewöhnliche komplexe Zahl $\left(i = \sqrt{-1}\right)$ für sie nicht benutzt, sondern nur als merkwürdige, sehr beweisende Analogie zu seinen $n$ dimensionalen Zahlen erwähnt und als auf der Mitte zwischen der gewöhnlichen Zahl und der Ausdehnungsgröße stehend bezeichnet wird ($A^2$, Vorr. S. VI), indem sie aus zwei Einheiten $\left(1 \text{ und } i = \sqrt{-1}\right)$ ebenso durch reelle Zahlkoeffizienten dargestellt werde, wie die extensive Größe aus zwei oder mehr Einheiten. Es wäre nur konsequent gewesen, die Ausdehnungsgröße überhaupt als Erweiterung der komplexen Zahl von zwei auf $n$ Dimensionen zu begründen; wobei es übrigens nicht notwendig war, gerade an der Voraussetzung $i = \sqrt{-1}$ festzuhalten; denn an sich hat, wie gesagt, die Zweiteilung der fundamentalen Relation Plus zu Minus oder Minus zu Plus keinen unbedingten Vorzug vor irgendeiner anderen Teilung. Nur die bequemste Form des Komplexen ist die auf diese besondere Voraussetzung gegründete; und hinreichend zur Darstellung von Zahlbeziehungen beliebiger Dimension ist sie wie jede andere. Ihr Gebrauch entspricht in jeder Beziehung dem der rechtwinkligen Koordinaten in der Cartesischen Geometrie und andererseits der Begründung der goniometrischen Funktionen auf die Verhältnisse im rechtwinkligen Dreieck, welche beiden Darstellungsweisen der Ebene und beziehungsweise des Winkels in ihr eingeschlossen sind und durch sie eigentlich erst ihre Begründung erhalten.

„Interessant ist es noch zu bemerken", sagt Graßmann ($A^1$, § 79), „wie bei der rein geometrischen Betrachtung wie auch in der abstrakten Wissenschaft die Betrachtung vom Raume aus zur Ebene, und dann erst von dieser zur geraden Linie führt, und daß somit diejenige Betrachtung, in welcher alles räumlich auseinandertritt, sich räumlich entfaltet, als die der Raumlehre eigentümliche und für sie als die einfachste erscheint, während, wenn ihre Gebilde ineinander liegen, dann auch alles noch verhüllt erscheint, wie der Keim in der Knospe, und erst seine räumliche Bedeutung gewinnt, wenn man das Ineinanderliegende in Beziehung setzt zu dem räumlich Entfalteten." Das gilt auch, wenn man, wie es der Sache nach in der Tat gemeint ist, für die räumliche Bestimmung die $n$dimensionale, für die lineare die eindimensionale Zahlbeziehung setzt. Allgemein ist das Komplexe wissenschaftlich das Einfachere; das vermeintlich Einfache beruht auf Abstraktionen, welche die Beziehungen, von denen abgesehen wird, wirklich nicht aufheben können, sondern nur willkürlich außer Betracht lassen. Das aber kann nie ohne Schaden an der inneren Konsequenz der Entwicklung gelingen, da man auf eben die Beziehungen, von denen man absehen wollte, hernach in den besonderen Problemen doch immer wieder stoßen muß und sich dann genötigt sieht, die künstlich gesetzte Schranke der Betrachtung wieder zu überschreiten. Es bewährt sich durchweg auch hier das früher Gesagte: die Erweiterung eines Begriffs, der eine fundamentale Geltung beansprucht, kann nur dann rechtmäßig sein, wenn der Begriff zuvor zu eng gefaßt war. Nicht die weitere Fassung ist dann logisch bedenklich, sondern im tieferen Sinne des Logischen träfe das Bedenken die engere Fassung, von der ausgegangen wurde. Gleichwohl hat diese die sachliche Berechtigung, daß die Betrachtung analysierend vorgehen, daher von vielen an sich vorhandenen Beziehungen vorerst absehen muß, auch um die methodischen Mittel bereitzustellen, die zur gedanklichen Beherrschung der vorerst beiseite gesetzten Beziehungen gebraucht werden.

Will man nicht unsere Ableitung anerkennen, und vermag man auch nicht eine andere, ihr gleichartige, nämlich ebenso rein logische Ableitung zu geben, so bleibt freilich nichts übrig, als, mit J. Cohn, die Mehrheit der Dimensionen auf „irgendwelche“ Verschiedenheiten der „Gegenstände“ zu gründen; ein Weg, der uns nach unseren allgemeinen Voraussetzungen gänzlich abgeschnitten ist; denn wir haben keine Gegenstände, nämlich dem Denken sind keine gegeben, ehe sie durch Denken geschaffen sind. Auch nicht mit irgendeinem „Minimum von Denkfremdheit“ kann unsere Logik sich abfinden, ausgenommen dies Minimum sei gleich Null. Das Denkfremde wäre eben auch nicht denkmöglich; es darf für das Denken gar nicht existieren, es wäre denn im Sinne des Problems, das aber selbst als Problem dann schon in den Prozeß des Denkens eingespannt wäre und schließlich, wenn auch vielleicht erst nach hartnäckiger Gegenwehr, sich ihm ergeben müßte. Übrigens ist zu sagen, daß bisher niemand die Verschiedenheiten der Gegenstände, die den Begriff der Dimensionen geben sollten, unabhängig von der Voraussetzung der Dimensionen anzugeben vermocht hat. Natürlich sind es die Dimensionen des Raumes, die man im Sinne hat. Aber 1. um die Dimensionen des Raumes denken zu können, muß man schon die Dimensionen überhaupt denken können; 2. ist auch der Raum kein gegebener Gegenstand. Er ist weder als drei-, noch als zwei- oder eindimensionales System gegeben, sondern er ist in jedem Fall, auch als der Raum der Empfindungen, konstruiert.[1]) Für diese Konstruktion aber bestehen keine anderen Möglichkeiten, als die im sachlichen Sinn einer Ordnung, einer Konstruktion einer Mannigfaltigkeit gemäß einer durchgängig einheitlichen Gesetzesordnung überhaupt begründet sind und also rein logisch sich müssen entwickeln lassen. Diese Entwicklung selbst war hier noch nicht unsere Aufgabe; aber die reinen Denkmittel zu ihr haben wir bereitgestellt. Mit der Einführung 1. der Stetigkeit und 2. der Mannigfaltigkeit der Dimensionen und Richtungen in die Zahl, d. h. in die allgemeine und allumfassende Gesetzlichkeit der Ordnungs- und Maßbestimmung, ist eben diese und damit das gesamte mathematische Verfahren zubereitet für die gedankliche Bewältigung der Probleme der Raumordnung und ebenso der Zeitordnung — soweit wenigstens sie nicht das Problem der Existenz miteinschließen, das Einzige, was mit bloß mathematischen Mitteln nicht zu zwingen ist.

Im Grunde ist es dies Letzte, was man im Sinne hat, indem man sich der ausschließend logischen Ableitung der Dimensionen und Richtungen (wie auch schon der Stetigkeit) widersetzt. Das eben verrät die Berufung auf Gegenstände, die als denkfremde dennoch dem Denken gegeben werden sollen. Aber Existenz ist selbst ein nur komplexeres Problem des Denkens. Nichts anderes besagt die Berufung auf „Anschauung", selbst wenn sie als reine verstanden, aber doch vom reinen Denken geschieden wird. In dem, was man Anschauung nennt, wirken im Grunde die sämtlichen reinen Denkfunktionen nur in unaufgelöster Verflechtung zusammen. Es ist daher die Berufung auf sie nicht überhaupt ungegründet; in der Anschauung ist das reine Denken allein konkret. Und es ist gerade die Kontinuität des Denkens, es ist die Wurzelung aller seiner Sondergestalten in der Einheit des unendlichen Ursprungs, was die Anschauung antezipiert. Aber sie antezipiert sie bloß, sie

1) Vgl. Poincaré, Wiss. u. Hyp., II, Kap. 4 (S. 53 ff.).

enthält sie nur als Problem, das allein durch reines Denken seine Auflösung finden kann. Insofern also ist die Berufung auf die Anschauung in der Logik schlechthin unzulässig, als sie eine Umgehung der eigentlichsten Aufgabe der Logik bedeutet, die darin besteht, das Konkrete der „Anschauung“ selbst durch strenge, bis zur Wurzel dringende Analyse in die reinen Denkbestimmungen, die in ihr verflochten sind, auseinanderzulegen. Anschauung kann dem Denken nichts „geben“, sie kann selbst nur durch Denken „gegeben“, d. h. bestimmt werden. So vor allem in der Mathematik.

Doch ist es eben das Problem vom Verhältnis von Anschauung und Denken, dem wir näher zu treten im Begriff stehen und zu dessen völliger Auflösung wir vorzudringen hoffen, indem wir jetzt unsere Frage auf Zeit und Raum unmittelbar richten.