



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn

Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften

Natorp, Paul

Leipzig [u.a.], 1910

Sechstes Kapitel. Zeit und Raum als mathematische Gebilde.

urn:nbn:de:hbz:466:1-35817

Sechstes Kapitel.

Zeit und Raum als mathematische Gebilde.

§ 1. (*Zeit und Raum bei Aristoteles, Plato und Kant. Das Problem von Anschauung und Denken.*) In den bisherigen Aufstellungen wurde von „Anschauung“ ohne Zweifel vielfach Gebrauch gemacht. Aber wir haben uns dabei streng an die Bedingung gehalten, die von den großen Mathematikern stillschweigend immer anerkannt und befolgt worden ist, und die von Veronese auch bestimmt formuliert wird: von der Anschauung nur den Ausgang zu nehmen, mehr nicht als das Problem aus ihr zu schöpfen, die Aufstellung der Begriffe und Entwicklung der Gesetze der Mathematik aber rein durch Denken zu vollziehen; auf das bloße Zeugnis der Anschauung nichts, sei es in die Definitionen oder in die Beweise, einfließen zu lassen.

Aber eben damit sind wir auch im Bereiche bloßer Denkgelbilde verblieben. Ein solches ist, so wie sie in den vorigen Kapiteln sich darstellte, die Zahl in allen ihren Gestaltungen, einschließend auch Richtung und Dimension. Mit der Zeit dagegen und dem Raume treten wir, so scheint es, in eine andere Gattung von Erkenntnisgrundlagen hinüber, in welcher, nach fast allgemeiner Annahme, das Denken nicht mehr allein zu gebieten hat, sondern seine Herrschaft teilen muß mit einem anderen Erkenntnisfaktor, dem zum wenigsten ein „Minimum von Denkfremdheit“ anhafte, jenem, der seit Kant den Namen „Anschauung“ führt, werde diese nun verstanden als reine oder geradezu als empirische. Brauchte

bis dahin von der Anschauung und ihrem Verhältnis zum Denken nur in einigen vorgreifenden Nebenbemerkungen gesprochen zu werden, so wird es an dieser Stelle unerlässlich, eine endgültige Klarstellung dieser für Philosophie und Mathematik gleich wichtigen, aber in beiden auch gleich sehr umstrittenen Unterscheidung anzustreben.

Bei Aristoteles nehmen Ort und Zeit eine bedeutende Stelle in der begrifflichen Grundlegung zur allgemeinen Naturwissenschaft ein; im System seiner Kategorien erscheinen sie unter den Benennungen des Wo und Wann. Indessen die Aristotelischen Grundprinzipien der Naturwissenschaft wie auch seine Kategorien sind nicht „reine Verstandesbegriffe“ im Sinne Kants, sondern Abstraktionen (obgleich letzte Abstraktionen) von den Dingen, und zwar den Sinnendingen. Das bestätigt gerade die Aufnahme des Wo und Wann unter die Kategorien, wenn man sich der Rolle erinnert, die beiden in der Aristotelischen Physik angewiesen wird. Reine Verstandesbegriffe im strengen Sinne sind dagegen die Ideen Platos. Aber Plato trennt von diesen mindestens den Raum und weist ihm — der Sache nach aber auch der Zeit — eine eigenartige, zuletzt freilich ihm selbst problematisch bleibende Zwischenstellung zwischen den Ideen und den Sinnendingen an. Darin verrät sich die Einsicht, daß gerade diese Erkenntnisgrundlagen von einer besonderen Beschaffenheit sind. Plato bezeichnet den Raum als Gegenstand eines unechten, eines Pseudodenkens, das uns glauben macht, was immer ist, müsse irgendwo, an einem Orte sein; während für Plato feststeht, daß das echtste Sein, das der Ideen, an diese Bedingung nicht gebunden, sondern ortlos wie auch zeitfrei sei. Daß aber der Raum eine Bedingung sein soll für das Denken der Existenz eben des Sinnlichen, d. h. aber, für die Darstellung der Ideen im Sinnlichen, nämlich ein System bloßer Stellen, welche die Ideen gleichsam durchwandern; daß also der Sache nach schon bei ihm der

Raum eine „Bedingung möglicher“ — als Wissenschaft möglicher — „Erfahrung“ ist, wird in einer Reihe tiefer Wendungen deutlich; und daß der Zeit eine dieser ganz ähnliche und eng verbundene Rolle zufallen soll, ist ebenfalls nicht zu verkennen. Nahe genug hätte es nun gelegen, beide eben darum den Ideen zuzurechnen, wie es der Sache nach wenigstens im „Parmenides“ auch geschieht. Doch entschied sich Plato, wie es scheint, gerade in letzter Erwägung (im „Timäus“), dem Raume jene eigentümliche Sonderstellung anzuweisen, wobei er mit der allen großen Denkern eigenen Ehrlichkeit die nicht überwundene, vielleicht überhaupt nicht überwindliche Dunkelheit dieser Sonderstellung sich und seinen Lesern offen eingesteht.

Es scheint nicht, daß Kant sich an dies Platonische Eingeständnis erinnert hat, als auch er sich entschloß, Zeit und Raum aus der Reihe der reinen Grundbegriffe des „Verstandes“, denen namentlich die Wolffische Schule sie beigerechnet hatte, auszuschließen und sie, viel entschiedener als Plato, auf die Seite der Sinnlichkeit zu rücken; während er ihnen zugleich doch für diese eine Gesetzesbedeutung zuerkannte, die sie unentrinnbar den reinen Verstandesbegriffen wieder nähert. Geradezu als „Gesetze“ der Sinnlichkeit werden Zeit und Raum bezeichnet in der Dissertation von 1770; später, in der Kritik der reinen Vernunft, überhaupt in den Schriften der kritischen Periode, ist dieser Ausdruck, wie es scheint, absichtlich vermieden; gerade damit Zeit und Raum nur ja nicht als Verstandesgesetze, wenngleich für die Sinnlichkeit, erscheinen.

Indessen verkennt doch Kant nicht, daß Zeit und Raum bloße „Verhältnisvorstellungen“ sind. „Reine“ Anschauungen heißen sie ihm nicht in der Bedeutung von etwas Angeschautem, Daten der Anschauung, sondern vielmehr als Weisen des Anschauens. Bestimmter werden sie beschrieben als Weisen, wie das Mannigfaltige der Erscheinungen „in gewissen Verhältnissen geordnet werden kann“. Dies

und nur dies besagt der viel mißverständene Terminus „Form der Anschauung“. Zeit und Raum stellen dar: die Form, d. h. die gesetzmäßig bestimmte Art der Ordnung, gemäß welcher alles Mannigfaltige der Erscheinungen in den Verhältnissen des Nach- und Nebeneinander „angesehen“, d. h. konkret vorgestellt wird. Hierbei ist das Ordnen selbst Leistung des synthetischen Denkens. Nicht also die Tätigkeit des Ordnen bedeutet die Zeit- und Raumanschauung. Aber doch drücken beide nur aus eine bestimmte Weise, in der diese Ordnung sich uns allein vollziehen kann; eine gewisse „Bedingung“ also, an die die ordnende Tätigkeit des synthetischen Denkens an dem Mannigfaltigen der Sinnlichkeit gebunden ist. So vermag Kant den Charakter des Apriori, d. h. der Allgemeinheit und Notwendigkeit, kurz den Gesetzescharakter der zeit-räumlichen Vorstellung festzuhalten, obgleich es nicht Gesetze reinen Denkens sein sollen, die in ihr sich ausdrücken.

Unvermeidlich aber mußte sie damit nun doch mit der in sich streng einheitlichen Gesetzlichkeit des reinen Denkens in eine sehr enge Verbindung treten. Diese kommt denn auch in den weiteren Aufstellungen Kants (in der transzendentalen Analytik) immer deutlicher zutage, bis hart an die Grenze der förmlichen Zurücknahme der anfänglichen Festsetzungen.

Zeit und Raum sind nach Kant nicht gegebene, von uns angeschaute „Mannigfaltigkeiten“ oder auch Ordnungen wohl gar sinnlicher Dinge. Als Gesetzlichkeiten einer von uns erst zu vollziehenden, nicht vorgefundenen Ordnung eines Mannigfaltigen der Sinne überhaupt aber müssen sie offenbar der Zahl, die auch eine Gesetzlichkeit der Ordnung, und zwar dieses selben Mannigfaltigen der Sinne darstellt, nahe verwandt sein; um so mehr, da Kant auch für die Zahl nicht das reine Denken allein verantwortlich macht, sondern gleichfalls „Anschauung“ als „Bedingung“ heranzieht. Der reine Verstandesbegriff, dessen

Funktion die Zahl eigentlich nur entwickelt, nämlich der der Größe, bedarf — so heißt es schon in der Dissertation — zu seiner *actuatio in concreto* der Anschauung.

Und wer wollte leugnen, daß diese beiden: Zahl und zeit-räumliche Vorstellung, sich innerlichst nahestehen? Schon für Aristoteles war wenigstens die Zeit mit der Zahl aufs engste verknüpft; beide vereinten sich unter dem gemeinsamen Begriff der Reihenfolge, des Vor und Nach (*πρότερον καὶ ὑστερον*), also der Ordnung. Im „Nacheinander“ liegt deutlich beides: der Begriff des Einen und Anderen und die Ordnungsbeziehung, d. h. eben die Momente, auf denen das Grundwesen der Zahl beruht. Die Zeit, scheint es, ist geradezu Zahl; nach Aristoteles die „Zahl der Bewegung“, d. h. allgemein der Veränderung; aber wir wissen ja, daß auch die Bewegung, auch die Veränderung der reinen Zahl nicht überhaupt fremd ist; eben als Ausdruck der Größe bedeutet sie schon die „Veränderliche“. Wie also sollte die Zeit sich der Methode der Zahl entziehen können? Daß aber vom Raume ein gleiches gilt, müßte, wenn es sonst zweifelhaft wäre, durch die Erörterungen unseres letzten Kapitels klar geworden sein. Wenn selbst Richtung und Dimension den Gesetzen der Zahl nicht bloß nachträglich sich fügen müssen, sondern geradezu aus ihnen logisch hervorgehen, was kann dann die Gesetzlichkeit des Raumes anders sein als eine bestimmte Seite eben der Gesetzlichkeit der Ordnungsbeziehung überhaupt, die wir als den letzten Sinn der Zahl und damit des Mathematischen überhaupt erkannten?

Nach den herkömmlichen Begriffen freilich müßte Kant wohl einer solchen Auffassung weltenfern stehen, da man ihm zutraut, mit seiner „reinen Anschauung“ des Raumes und der Zeit einen schlechthin denkfremden Faktor, etwas wie einen blinden Vorstellungszwang einführen zu wollen, dem selbst das reine Denken in der Mathematik des Raumes und der Zeit und vollends in der Naturerkenntnis sich fügen

müsse. Nun aber sind ihm Zeit und Raum, als gewisse Arten, das Mannigfaltige „im Gemüte“ — in den reinen „Verhältnissen“ des Nach- und Nebeneinander — „zu setzen“, gänzlich abhängig von dieser unserer Tätigkeit des Setzens, daher von der „Synthesis“ zunächst der „Apprehension“, gewiß aber auch der „Reproduktion“ und der „Rekognition“, da nach Kants eigenen Ausführungen diese drei Stufen der Synthesis voneinander schlechthin untrennbar sind.¹⁾ Geradezu zum *actus animi* wurde die Zeitvorstellung schon in der Dissertation, in fast hartem Widerstreit mit der sonstigen Erklärung, wonach sie, mit dem Raume, vielmehr der „Rezeptivität der Sinnlichkeit“ angehören sollte. Wie unterscheidet sich aber dann überhaupt die „reine Anschauung“ der Zeit und des Raumes von einer reinen Setzung des Denkens, insbesondere (was uns hier zuerst angeht) von der Zahl?

Daß sie ohne diese nicht zustande kommt, ist klar, nicht bloß in der Sache, sondern auch in Kants eigener Darstellung. Als Setzung bloßer „Verhältnisse“ setzt sie unentrinnbar das Denken voraus, das als Synthesis, d. h. Vereinigung eines Mannigfaltigen wie in einem Blick des Erkennens, überhaupt nichts anderes ist als Beziehen, also Setzen von Verhältnissen. Auch ist nach Kant die Leistung des Denkens synthetisch eben damit, daß sie an der Anschauung sich vollzieht und nur so konkret wird. Wird damit nicht die Synthesis zur Anschauung, die Anschauung zur Synthesis — die doch die Grundfunktion des Denkens sein soll? Das synthetische Denken bedeutet das schöpferische; schöpferisch aber beweist es sich eben als Anschauung, wenn doch diese die *actuatō*, die „Wirklichmachung“

1) Es möchte sich aus Kants eigenen Andeutungen begründen lassen, daß die Zeitvorstellung aus der „Apprehension“, die Raumvorstellung aus der „Reproduktion“ entspringt. Man beachte besonders die Rolle, welche die Zeit im „Schematismus“ spielt, und der Raum ebendort spielen — müßte.

des Denkens selbst, also seine eigene höchste Prägnanz bedeutet, die Prägnanz, den Gegenstand wirklich hinzustellen, ihn „konkret“, d. h. eben in voller Gegenständlichkeit, nicht in irgendwie unbestimmt bleibender Allgemeinheit der Regel bloß zu bedingen, allenfalls zu fordern, sondern zu geben. Kann das, was den Gegenstand „gibt“, nach den idealistischen Voraussetzungen Kants etwas anderes sein als schöpferische Synthesis, mithin Denken, volle Prägnanz des Denkens: Erdenken des Gegenstandes?

Genau hierauf weisen aber auch alle die besonderen Merkmale, durch welche Kant Anschauung von Denken unterscheidet. „Bloßes“ Denken, ohne Anschauung, ist „leer“, nämlich ungegenständlich; Anschauung also, wenn gleich ohne Denken „blind“, über sich selbst nicht aufgeklärt (was ebenso von der Synthesis ohne Analysis gilt), doch dafür „voll“, nämlich voll gegenständlich. Auf die Anschauung „zweckt“ das Denken bloß „als Mittel ab“; d. h. in der Anschauung erst vollendet sich das Denken zur Erkenntnis des Gegenstandes. Die Gegenstandsbeziehung des bloßen Denkens ist nur „mittelbar“, die der Anschauung allein „unmittelbar“; gleichbedeutend: durch Anschauung wird der Gegenstand „gegeben“, nicht mehr „bloß“ gedacht.

Und eben dies begründet das Merkmal, an dem ganz besonders Zeit und Raum als Anschauung und nicht bloße Denkgebilde erkannt werden sollen: die Gegenstände stellen sich unmittelbar in Zeit und Raum, nicht bloß unter ihnen als allgemeinen oder diskursiven Begriffen dar; Zeit und Raum sind nicht Begriffe im Sinne von Allgemeinheiten, sondern sind „wesentlich einig“, *per essentiam non nisi unicum*, sagt schon die Dissertation; die Vorstellung aber, die „nur durch einen einzigen Gegenstand gegeben werden kann“, heißt Anschauung. Sogar gerade in ihrer Unendlichkeit, die sonst eher den Begriffscharakter nahelegen würde (denn, wenn irgendetwas, scheint Unendlichkeit nur gedacht,

nicht unmittelbar vorgestellt, d. h. angeschaut werden zu können), sind sie dennoch „gegeben“, d. h. wir haben sie, und zwar nicht in bloß diskursiver Allgemeinheit, als Begriffe, sondern als unmittelbare, in strenger Einzigkeit zugrundeliegende Vorstellungen d. i. Anschauungen.

§ 2. (Fortsetzung. Entscheidung über Anschauung und Denken.) Dieses Merkmal der Einzigkeit, auf das Kant immer wieder zurückkommt und das höchste Gewicht legt, fordert noch besondere Aufmerksamkeit. Man weiß, woher es historisch stammt. Leonhard Euler [48] hatte in einer bedeutenden Abhandlung des Jahres 1748¹⁾ nachdrücklich betont: Der Raum ist kein Generikum, kein logischer Allgemeinbegriff; kein Abstraktum von den Beziehungen der Teile der Körper (wie die Wolffianer lehrten); keine prädikative Bestimmung (abhängiges Merkmal) der Körper; denn der Raum bleibt, wenn man die Körper ganz, nicht bloß gewisse Bestimmungen derselben, wegnimmt. Das war für Kant, dessen Denken über die Natur an Newton geschult war, unbedingt überzeugend und wurde ihm zu einem Hauptanstoß für den gründlichen Umbau des Systems der Urbegriffe der Erkenntnis, dessen Ergebnis die Kritik der reinen Vernunft ist. Aber nur einer der Ausdrücke dieser Wandlung ist die Unterscheidung von Anschauung und Denken; neben dieser steht, ja sie überwiegt in den zentralen Untersuchungen der Kritik weit die andere Unterscheidung der synthetischen und analytischen Funktion des Denkens. Das synthetische Denken aber ist zugleich das anschauliche, das anschauliche das synthetische; eine Gleichsetzung, die ganz durchsichtig nur wird, wenn man unter Anschauung nichts mehr versteht als die Durchführung und Vollendung der Synthesis, also gerade das echtste, ur-

1) *Réflexions sur l'espace et le temps*, in den Schriften der Berliner Akademie. (Ausführlich darüber Cassirer, 18, II, 349 ff.)

sprünglichste Denken, geradezu das Ursprungsdenken selbst. In der Einheit des Ursprungs wurzelt die Unendlichkeit, und die Einzigkeit in dieser Unendlichkeit und durch sie, die nur die vollendete Einheit ist. Und eben dieser Einzigkeitscharakter ist es zugleich, der die zeiträumliche Darstellung zur vollen, unmittelbaren Darstellung des Gegenstandes macht. Erkenntnis des Gegenstandes heißt Bestimmung des Unbestimmten; Einzigkeit aber bedeutet nichts als vollendete Bestimmtheit. Bestimmung überhaupt geschieht nach den Gesetzen des Denkens; deren allgemeiner Ausspruch aber, bloß als Gesetze, enthält noch nicht, vollführt nicht selbst die Bestimmung; ihr wirklicher Vollzug — durch die Vermittlung der „Schemata“, die jemand¹⁾ treffend als „Einführungsbestimmungen“ zu der „Gesetzgebung“ des Denkens bezeichnet hat — ist es, den die „Anschauung“ bedeutet. Darum ist es nicht etwa weniger, sondern noch viel mehr Bestimmung; die Bestimmung, die nichts unbestimmt läßt; also Denken, das Denken, wobei nichts ungedacht bleibt; jene Determination des Denkens, die gegenüber aller Unbestimmtheit des bloß Allgemeinen: der Gegenständlichkeit, den Gegenstand selbst in seiner nicht bloß Einzelheit, sondern Einzigkeit darstellt. So versteht es sich, daß das Merkmal der Einzigkeit der Zeit und dem Raume zukommen soll, gerade sofern sie Anschauungen, d. h. Bedingungen der Darstellung des Gegenstandes im Konkreten der — selbst aus gleichem Grunde einzigen — „Erfahrung“ sind; und es versteht sich, weshalb diese „Bedingungen“ (wie sie Kant mit Vorliebe nennt), gegenüber den Allgemeinheitsfunktionen der „bloßen“ reinen Begriffe des Verstandes, „restringierend“ (einschränkend), d. h. determinierend, genannt werden.

Aber dann hat die „reine Anschauung“ ihren natürlichen

1) Wellstein [187] 130 — wohl auf Anregung von philosophischer Seite.

Ort im System der reinen Grundbedingungen der Erkenntnis unweigerlich nach den bloßen Allgemeinheitsfunktionen der Gegenständlichkeit, den Kategorien und Grundsätzen Kants, also seinem „reinen Denken“. Die Anschauung „realisiert“ erst den „Verstand“, indem sie ihn zugleich „restringiert“: also wäre ihre richtige Stelle erst da, wo die bis dahin durch Abstraktion voneinander gesonderten und je nach ihrer eigentümlichen Leistung erwogenen, eben damit die volle Gegenständlichkeit noch nicht erbringenden Momente des Erkenntnisprozesses zusammengeführt werden, um alle im Verein erst den vollen, d. h. einen Gegenstand der einen Erfahrung zu konstituieren. „Es ist nur eine Erfahrung,“ sagt Kant, „in welcher alle Wahrnehmungen als in durchgängigem und gesetzmäßigem Zusammenhange vorgestellt werden, ebenso wie nur ein Raum und Zeit ist, in welchem alle Formen der Erscheinungen und alle Verhältnisse des Seins und Nichtseins stattfinden.“ Nicht bloß „ebenso wie“ für Zeit und Raum, gilt die Bedingung der Einzigkeit für die „Erfahrung“, sondern die Einheit der Erfahrung, welche identisch ist mit der der Natur, kommt selbst allein zustande mit der der Zeit und des Raumes, und diese allein mit jener; wie es besonders in den Beweisen der „Analogien“ sich klar herausstellt. Somit ist die Einheit der Zeit und des Raumes — d. h. eben das, was sie als Anschauungen unterscheiden soll — geradezu erst das Ergebnis der „Grundsätze“, besonders derer der Relation. Und so kann gar kein Zweifel mehr bleiben, daß sie erst das Resultat und nicht eine vorausgehende Bedingung jener Synthesis des Denkens ist, welche eine Erfahrung, nämlich eine Erfahrung, die Einheit der Erfahrung erst „möglich macht“.

Eine genaue Durchprüfung von Kants „transzendentaler Deduktion der reinen Verstandesbegriffe“, d. h. der zentralsten und überhaupt entscheidenden Untersuchung der Kritik der reinen Vernunft, besonders in der Fassung der

zweiten Auflage, läßt hierüber keine Mehrdeutigkeit bestehen. Geradezu in Berichtigung der Aufstellungen der transzendenten Ästhetik wird hier der synthetische, also Denkursprung der Zeit- und Raumeinheit ausgesprochen¹⁾, durch welchen nicht bloß „alle Begriffe“ von Zeit und Raum „zuerst möglich“, sondern diese sogar „als Anschauungen zuerst gegeben“ werden, indem „der Verstand die Sinnlichkeit bestimmt“. Auch ihr „reines“ Mannigfaltiges ist nicht voraus, sondern wird erst „gegeben“ durch die reine Synthesis.

Gefordert ist die Einzigkeit der Zeit und des Raumes um der Einzigkeit willen, die im Begriff der Existenz, als des letzten Zieles der theoretischen Erkenntnis, notwendig gedacht wird. Existenz aber ist selbst ein Begriff des reinen Denkens; es ist nur der Begriff jener Bestimmung des Gegenstandes, die nichts unbestimmt läßt. Eben das ist dann erst Erfahrung, im Unterschied von der Allgemeinheit des bloßen Verfahrens des Denkens. Erfahrung, möchte man sagen, ist das bis zu Ende durchgeführte Verfahren. Das Sein der Erfahrung bleibt also immer Sein des Denkens; aber vollendetes Sein des vollendenden Denkens. Denken aber ist nichts anderes als Setzen von Relation. So begreift es sich, daß Zeit und Raum, so sehr immer auf die Existenz bezogen, dennoch nichts enthalten als reine Relationen ohne voraus gegebene Relata; die Relata werden erst gesetzt durch die Relation und fallen daher weg, sobald die Relation wegfällt. Eben damit beweist sich die Setzung dieser Relationen als schlechthin ursprünglich, primitiv, wie es in den bekannten Argumenten Kants vom Raume und der Zeit ausgeführt wird. Als ursprünglich aber können sie ihren Ursprung nur im Denken suchen; es gibt keinen anderen.

Nach diesem allen ist die Voranstellung der Zeit und des Raumes vor die Gesetze des Denkens des Gegenstandes

1) Anm. zu § 17, §§ 20, 21, bes. aber § 26 mit Anm.

im System der Kantischen Transzendentalphilosophie ein ernster Fehlgriff, verständlich und entschuldbar allenfalls nur im Sinne einer Vorwegnahme. In einem strengeren Systemaufbau hätten sie ihre Stelle wohl finden müssen in der Modalität, bei der Kategorie der Wirklichkeit; aber auch bei der Möglichkeit und der Notwendigkeit. Zwar gerade indem die Forderung der Einzigkeit in der Modalität der Gegenstandserkenntnis begründet ist, muß sie sich auf das ganze System der reinen Denkbedingungen der Gegenständlichkeit und auf jede dieser Bedingungen besonders erstrecken; so zunächst und ganz unwidersprechlich auf die Relation, durch diese mittelbar aber auch weiter zurück auf die „mathematischen“ Bedingungen der Gegenständlichkeit, die von Kant in den Grundsätzen der Quantität und Qualität formuliert werden. Sie muß sich auf sie erstrecken zum wenigstem im Sinne der Aufgabe unendlicher, in dieser Unendlichkeit aber streng einheitlicher Bestimmung. So tritt denn auch das Problem der Unendlichkeit, und zwar der Einheit in dieser Unendlichkeit, der Sache nach überall auf, wengleich es seine prägnanteste Bedeutung erst entfaltet in der Durchdringung aller synthetischen Leistungen zur Bestimmung des Gegenstandes, des einzigen der einzigen Erfahrung. Eben deshalb hat übrigens das Ausgehen von der Forderung dieser Einzigkeit wohlberechtigten Sinn, und als vorgreifende Entwicklung des Problems auch die Zerlegung in die Faktoren Anschauung und Denken, oder richtiger: Denken und Anschauung. Im Terminus „Anschauung“ wird im Grunde nichts als jene letzte wechselseitige Durchdringung aller reinen Denkleistungen, oder die allseitige Kontinuität der Denkprozesse in dem einen Prozeß des Denkens, d. h. die Unendlichkeit und Einheit des Ursprungs, antezipiert. In diesem Sinne der Antezipation ist schließlich auch in der Wissenschaft der Mathematik die Berufung auf Anschauung nicht schlechthin zu verwerfen, sondern nur, wenn sie die Umgehung der Rechenschaft aus

dem reinen Denken bedeuten will. Die ganze Entwicklung der Erkenntnisfunktionen muß sich vom ersten Anfang an ergeben im Hinblick auf die Einheit des Unendlichen als Problem. Sofern aber nur aus dem Problem die Lösung hervorwächst, steht sie als Problem auch richtig am Anfang; doch eben nur so. So bewährt sich die schöpferische Genialität des Kantischen Denkens in jedem Linienzuge seines Aufbaues, so wenig dieser, als systematischer, formal vollendet ist.¹⁾

Muß etwa hier noch dem Bedenken begegnet werden, daß eine „Einheit“ des „Unendlichen“ widersprechend sei, weil sie Vollendung des Unvollendbaren bedeute? Zweierlei wäre darauf zu antworten: 1. Unendlichkeit besagt nicht bloß negativ Nichtvollendbarkeit, sondern positiv den stets möglichen und stattfindenden Fortgang des Prozesses des Denkens oder Fortbestand seiner Relationen; 2. die verlangte Einheit bedeutet nicht Abschluß im Sinne des Fertigwerdens, sondern des stets festzuhaltenden Einheitsbezugs, gegründet in der Einheit eben der Methode, die als solche für einen unendlichen Fortgang nicht bloß zulängt, sondern ihn fordert und notwendig macht. Durch diese Einheit wird die Unendlichkeit positiv; aber auch umgekehrt verhindert es die Unendlichkeit, daß die Einheit, im falschen Sinne des Abschlusses, eine absolute Leere, also eine absolute Negativität außer sich ließe und damit selbst wiederum zu etwas Leerem, Negativem zu werden in Gefahr käme. Beide, in ihrer reinen Positivität gedacht, koinzidieren vielmehr, als daß sie sich ausschließen.

Sind also Zeit und Raum Bedingungen der Existenzbestimmung in möglicher Erfahrung, so gehen sie eben damit hinaus über die bloße Gesetzlichkeit der Zahl,

1) Indirekt ist mit diesen Ausführungen der Kritik begegnet, welche Russell (154, ch. 52) an Kants Raumtheorie geübt hat. Vgl. übrigens Cassirer [19].

die, für sich betrachtet, nicht zur zeit-räumlichen Gesetzlichkeit durchgeführt, den Charakter abstrakter Generalität nicht überwände. Erst durch Zeit und Raum, oder soll man nicht vielmehr sagen, als Zeit und Raum, wird die Zahl selbst konkret, wird sie Zahl der Dinge, geradezu der Existenz.

Aus diesem letzten logischen Grunde folgt im System der Wissenschaften die Lehre über Zeit und Raum erst der allgemeinen Mathematik, als deren Grundbegriff wir jetzt unbedenklich den einzigen, wenn nur in genügender Komprehension verstandenen Begriff der Zahl bezeichnen dürfen. Die bloß mathematischen Bestimmungen der Zeit und des Raumes sind, wie sich zeigen wird, durch die Zahl vollständig gegeben; doch sind beide darum im Begriff der Zahl nicht erschöpft. Das, wodurch sie über diese hinausgehen, ist eben der direkte Bezug auf Existenz, d. h. nicht etwa vom Denken weg und aus ihm hinaus, sondern auf das Denken des vollen Gegenstandes, das zugleich erst das volle Denken ist. Was unterscheidet die Folge in der Zeit von der Folge in der Abzählung? Nichts als der unmittelbare Bezug auf Existenz. Dieser ist als solcher der reinen Mathematik fremd; er vollzieht, übrigens in strenger Kontinuität, den Überschritt von der Mathematik zur mathematischen Physik, zunächst zur grundlegenden Physik, der Mechanik. In bloßer Mathematik, ohne vorgreifenden Bezug auf die Mechanik und durch diese auf die gesamte Physik, wäre von keiner Zeit und folgerecht auch von keinem Raum zu reden, sondern einzig von der Zahl.

Damit werden aber nicht Zeit und Raum selbst zu Gegenständen der Erfahrung, wie fast alle, die ihren nicht mehr rein mathematischen Charakter erkannten, fälschlich geschlossen haben. Vielmehr umgekehrt: die Empirie wird durch sie der reinen Gesetzlichkeit des Denkens erschlossen. Zeit und Raum werden „Bedingungen möglicher Erfahrung“ in einem prägnanteren Sinne, als dies von den bloßen Gesetzen der Zahl gilt; aber nicht sie selbst werden

Erfahrungen nur etwa sehr primitiver und umfassender Art; sondern sie bleiben reine Denkbestimmungen. Mathematik stellt beide auf als bloße Stellensysteme, schlechthin unabhängig von jeder bestimmten, durch besondere Erfahrungen zu gebenden Weise der Besetzung der Stellen. Sie sind daher auch nicht selbst existent, aber Bedingungen des Existierens; und wieder deshalb nicht Erfahrungen, aber gesetzgebend für Erfahrung, für alles, was im Erfahrungssinne existent heißen kann. Ihre Herleitung aus fertigen Erfahrungen (im Sinne gegebener Existenzen) wäre derselbe Zirkel, wie wenn man die Gesetze der Zahl von den Hausnummern ablernen wollte. Das ist in der Tat in gewissem Maße möglich, aber nur, nachdem man zuvor die Häuser numeriert hat. So kann man gewiß Zeit und Raum von den zeit-räumlichen Gegenständen abstrahieren, aber nur, nachdem diese zuvor als zeit-räumliche im Denkprozeß der Erfahrung konstituiert worden sind. Also gehören sie in aller Strenge zu den Setzungen reiner Erkenntnis. Sie erscheinen daher auch in der Wissenschaft als Gebilde ganz vom Typus des Mathematischen, was ja eigentlich nur das rein Wißbare, wissenschaftlich rein Bestimmbare bedeutet. Wenn sie, wie gezeigt, den Existenzbezug dem Mathematischen hinzufügen, so bedeutet dies nicht die Empirisierung der Mathematik, sondern die Mathematisierung der Empirie. Indem sie, wie auf Messersschneide, auf der Grenze zwischen Mathematik und Empirie stehen, stellen sie die Kontinuität zwischen beiden her.

Darum nun fordern sie eine zweiseitige Betrachtung: als mathematische Gebilde, und als Grundbedingungen der Existenzbestimmung in möglicher Erfahrung. In diesem Kapitel haben wir es mit ihrem bloß mathematischen Charakter und Aufbau zu tun. Es wird sich zwar zeigen, daß schon dabei die Existenzbeziehung nicht ganz beiseite gesetzt werden kann. Ausdrücklich aber und in vollem Umfang soll diese im letzten Kapitel untersucht werden.

§ 3. (*Die Zeit als mathematisches Gebilde.*) Nimmt man zunächst die Zeit so in Betracht, wie sie in der grundlegenden Wissenschaft von der Natur, der reinen Bewegungslehre oder Mechanik zugrunde gelegt wird, so stellt sie sich dar als feststehende, unverrückbar einzige Ordnung, in welche alle Objekte der Natur sich einreihen, die sie gleichsam durchlaufen müssen. So hat besonders Newton in dem gewichtigen Scholion zu den Eingangsdefinitionen seiner „Prinzipien“ sie eindringlich gezeichnet: Die absolute, wahre, mathematische Zeit, in sich und ihrer Natur nach, ohne Beziehung auf irgendetwas Äußeres, fließt gleichförmig. . . . Der Fluß der absoluten Zeit kann sich nicht ändern; (denn) die Dauer oder Beharrung der Existenz der Dinge ist (eine und) dieselbe, sei die Bewegung schnell oder langsam oder gar keine . . . die Zeiten und die Räume sind gleichsam die Örter (*loca*, Systeme von Stellen) ihrer selbst und aller Dinge. In der Zeit, nach der Ordnung der Aufeinanderfolge¹⁾, im Raume, nach der Ordnung der Lage²⁾, findet alles seine Stelle (*locantur universa*); es ist in ihrem Wesen begründet, daß sie Stellen sind; und daß die ersten (d. i. ursprünglichen) Stellen (*primaria loca*) sich bewegen (d. h. ihre Stellen wechseln) sollten, ist absurd; folglich (und in diesem Sinne) sind sie die absoluten Stellen, und allein die Übertragungen von diesen Stellen (auf andere) sind die absoluten Bewegungen. — Der entscheidende Grund für diese Aufstellungen ist ersichtlich dieser: die primäre, letztlich grundlegende Bedeutung der Zeit (wie ebenfalls des Raumes) für die Stellenordnung der Existenz verlangt ihre absolute Einzigkeit, Unverrückbarkeit, und deshalb auch Gleichförmigkeit und Stetigkeit.

Nach diesem Begriff aber deckt sich die Zeitordnung,

1) dem Aristotelischen πρότερον και ὑστερον (Vor und Nach).

2) der Aristotelischen θέσις (Position, Gelegen- oder Gesetztheit, Sitz oder Stand).

was ihre rein mathematischen Eigenschaften betrifft, vollständig mit der eindimensionalen geraden Reihenordnung der Zahl. Ganz und gar so, als Zahlreihe, stellt die Zeit sich dar in den Bewegungsgleichungen der Mechanik und der gesamten Physik. Alle Veränderung in der Natur mißt sich zuletzt an dieser einzigen Grundskala, die als unabhängig Variable t (*tempus*) bloß mathematisch betrachtet nichts ist, als die Zahlreihe selbst, und zwar zunächst die Reihe der Ordnungszahlen von $-\infty$ zu $+\infty$. Sie kann, sie darf nichts anderes sein, wenn sie ihr Amt erfüllen soll: die Darstellung aller Vorgänge der Natur in einem einzigen Funktionalzusammenhang als erstwesentliche Bedingung zu ermöglichen. Denn diese erfordert, als letzte Grundlage eben der funktionalen Beziehung, eine solche Grundskala als Ur-Maßreihe, die, eben um diese ihre Funktion zu erfüllen, notwendig als eindimensionale, stetige, homogene, gerade Reihe, mithin als die Zahlreihe, genau so wie wir sie konstruiert haben und konstruieren mußten, zugrunde zu legen ist. Das ist der rein mathematisch ausgedrückte Sinn der Newtonschen Sätze: daß in der Zeit (wie andererseits und aus gleichem Grunde im Raum) „*universa locantur*“ — alles, nämlich was in die einzige Ordnung der Natur sich als Glied einfügen soll, seine Stelle finden muß; und daß die letzten Stellen nicht selbst ihre Stellen wechseln (sich verschieben) können, das will besagen: daß sie nur so unverrückbar feststehend angesetzt werden können, um ihre Funktion der Stellenordnung für „alles“, was zur Natur gehört, zu erfüllen.

Aus dem gleichen, rein transzendentalen Grunde kann die Zeit weder ungleichförmig noch unstetig noch von mehr als einer Dimension gedacht werden. Nämlich eine ungleichförmige Ordnung müßte erst wieder auf eine andere, gleichförmige zurückbezogen werden, wenn ihre Ungleichförmigkeit in einer denkbaren Einheit der Existenz möglich sein, ja wenn diese Ungleichförmigkeit selbst auch nur sollte

ausgedrückt und bestimmt werden können. Ebenso eine unstetige Zeit würde erstens die Einheit der Existenz zerreißern, und würde zweitens dennoch die stetige, und zwar als ihr voraufgehend und zugrundeliegend, schon ihrem Begriff nach fordern, da sie überhaupt nur in Beziehung auf sie als unstetig erkannt und bestimmt werden könnte. Und so endlich ist die Eindimensionalität unerlässlich gefordert von der letzten, darum absolut einzigen Grundlage der Ordnung nicht sowohl des Existierenden als seiner Existenz selbst; denn nicht die Inhaltsbestimmung dessen, was existiert, betrifft die Zeit selbst und als solche, sondern der wechselnd bald so bald so sich bestimmende Inhalt des Existierenden, die nach bestimmten Gesetzen sich entwickelnden Wertreihen $x_0 x_1 x_2 \dots$, $y_0 y_1 y_2 \dots$ usf. irgendwelcher Veränderlichen x , $y \dots$ sind, hinsichtlich dieses Wechsels ihrer Bestimmung von Punkt zu Punkt im Veränderungsgange der Natur, zu beziehen auf eine einige und selbige, ihnen allen zuletzt zugrunde liegende Stellenordnung, welche eben die Zeit bedeutet. Sie ist einfach die gemeinsame Reihe der Ordnungszahlen für die in einem einzigen Funktionalzusammenhang unter sich zu verknüpfenden Wertreihen sämtlicher in das einzige System der Existenz eingehenden Veränderlichen. So heißt die Zeit, als einzige Ordnung des Existierens, niemals zusammen mit den Inhaltsbestimmungen des Existierenden. Und gerade so muß sie, nicht bloß nur einzig, sondern, gleich der ursprünglichen Reihe der Ordnungszahlen, auch nur eindimensional gedacht werden.

Wenn also, worauf so vieles hindrängt, zwischen Zeit und Zahl ein besonders enger Zusammenhang besteht, so sind es doch unmittelbar und bedingungslos nur die Eigenschaften der Ordnungs- oder Stellzahl, die an der Zeit sich wiederfinden. Zwar können irgendwelche Zeitzusammenhänge (Zeitfolgen, Abstände, Strecken) durch Maßzahlen dargestellt werden; aber nur so, wie auch in einem System

bloßer Ordnungszahlen solche Zusammenfassungen möglich sind, also nur folgeweise und genau nur soweit, als die Maßbeziehungen Ordnungsbeziehungen ausdrücken und ihnen äquivalent bleiben, nicht aber, soweit überhaupt die Maßbeziehung ihrer eigentümlichen Gesetzlichkeit nach sich erstreckt. Zeitordnung ist in sich nur Ordnung des Nacheinander, d. h. des Einen nach dem Anderen, richtiger: des Anderen nach dem Einen, oder des Folgens auf ein Voraufgehendes; und nur indem wiederum eine Folge sich an eine andere an- und mit ihr in einer umfassenderen zusammenschließt, ergibt sich sekundär eine Messung der Zeit. In dieser wird aber vom Nacheinander eigentlich abgesehen, das Nacheinander wie in ein Miteinander, die Zeit wie in den Raum projiziert. Darum müssen nicht etwa alle Bestimmungen des Miteinander auch für das Nacheinander gelten.

Leicht könnte man auf den Gedanken geführt werden, daß aus eben diesem Grunde wenigstens die Eigenschaft der Stetigkeit der Zeit nicht eigentlich oder nicht ursprünglich zukommen könne; wie sie auch der Ordnungszahl zunächst fremd scheint. Die Aufeinanderfolge, das Erstens, Zweitens usf. scheint eher Diskretion zu fordern, die auch durch immer fortgesetzte Zwischenschiebung dichter Aufeinanderfolgen sich nicht in Kontinuität verwandeln würde. Aber wir haben früher gesehen, daß gerade der die Ordnungsbeziehung fundamental begründende Begriff des Zwischen, in seiner notwendigen Überordnung über alle Maßbestimmung, das ist, was die Kontinuität der Zahlreihe zuletzt begründet. Ganz im gleichen Sinne und aus gleichem Grunde ist sie daher auch der Zeitreihe als ursprünglich eigenes, nicht von der Maßbeziehung erst erborgtes Merkmal zuzuerkennen. Daher hebt Newton mit Recht gerade das Merkmal der Stetigkeit, unter dem Namen des „Fließens“, an der Zeit hervor. Indessen ist dieser Ausdruck nicht ganz unbedenklich. Die Zeit selbst ist ja, wie gerade Newton stark betont, nicht veränderlich, so wie auch nicht

die Zahl. Sondern so wie das Gezählte, seiner Zahl nach, sich von Null oder irgendeinem bestimmten Werte an stetig ändern mag, so durchläuft das zeitlich zu Bestimmende, hinsichtlich seiner Zeitbestimmung, die Zeitlinie stetig. So wenig wie überhaupt dieser Verlauf oder Fortgang der Zeit selbst zufällt (die Zeit verläuft sich nicht, sagt Kant mit Recht, sondern in ihr verläuft sich alles), so wenig betrifft die Stetigkeit des Fortgangs unmittelbar die Zeit. Aber als allgemeine und ursprüngliche Bedingung der Möglichkeit solches Fortganges nimmt allerdings die Zeit, nicht anders als die Zahl für die Zählung, das Merkmal der Stetigkeit gleichsam auf sich; also nicht als selbst veränderlich, sondern vielmehr (nach Kant) „stehendes und bleibendes Korrelat“ der Veränderung. Aber doch ihr zufolge ist die Veränderung in der Natur stetig zu denken, nicht sie erst zufolge der Veränderung. Gerade in ihrer unwandelbaren Gleichheit begründet sie die Stetigkeit der Veränderung. „Stetigkeit“ kommt von „stets“; sie bedeutet gerade die stets gleiche, also immerfort, unveränderlich waltende Beziehung, die erst die diskrete Mannigfaltigkeit (hier das Außereinander der Zeitpunkte) in innerer, nämlich reiner Denkeinheit (als Punkte in dem einen und selbigen Zusammenhange der Zeit) zusammenschließt. Mathematisch drückt sich daher die Stetigkeit der Veränderung aus durch die Beziehung des Differential, z. B. des durchlaufenen Weges, auf das Differential der Zeit, die sich damit, wie überhaupt als Maß, so auch als stetiges und gleichförmiges Maß zu erkennen gibt.

Diese immer gleiche Beziehung des Vor und Nach und damit des Zwischen begründet zugleich den Charakter der Zeit als gerader Reihe. Die Zeit ist mathematisch nicht bloß überhaupt durch das eindimensionale (lineare) Kontinuum, sondern durch die Gerade zu repräsentieren: weil die Art der Beziehung jedes ihrer Elemente zu jedem, welches auch als Bezugspunkt gewählt werden mag, schlecht-

hin einzig und identisch ist. Denn die Zeit ist in sich nicht bloß einzig gerichtet, sondern streng gesprochen nur ein-sinnig; sie geht stets vorwärts, nie zurück oder irgendwie von ihrer Bahn seitab. Eine rückläufige Zeitbetrachtung ist im eigentlichen Sinne nicht möglich. Man kann die Zeit selbst nicht umkehren, das Voraufgehen zum Nachfolgen, das Nachfolgen zum Voraufgehen machen; man kann nur etwa den Zeitinhalt in umgekehrter Folge aufmarschieren lassen, wobei die Zeit selbst immer gleichmäßig vorwärts läuft. Man stellt die Vergangenheit nicht vor, indem man die Zeitlinie rückwärts, gleichsam bergan durchläuft, sondern man versetzt sich unvermittelt in den früheren Zeitpunkt, als wäre er jetzt, oder jetzt er; von da ab aber verfolgt man ihren Ablauf wiederum ihrem eigenen Sinne gemäß vorwärts. Wollte man gewaltsam den Zeitlauf selbst umwenden, so wäre es nicht anders, als ob man sich zwänge zu zählen: 10, 9, 8 . . .; d. h., man tauscht im Grunde doch bloß die Worte, nennt Nachfolgen Vorhergehen, Vorhergehen Nachfolgen; die Zeit selbst aber lacht uns aus und geht, in buch-stäblicher Bedeutung eigensinnig, ihren Weg vorwärts, nie zurück, so wie das Wasser nur zu Tal läuft. So kann die Zeit auch nicht im Vorwärtsgehen dennoch, wie in einem Kreislauf, in sich zurückkehrend, es kann nicht in Zukunft die Vergangenheit wiederkehrend gedacht werden, so wie man in der Zahlreihe immer weiter zählend auch durch noch so unendliche Sprünge nicht zum ursprünglichen Ausgang zurückkommt. Möchten alle Dinge wiederkehren, ihr Frühersein wird damit nicht ihr Spätersein, ihr Spätersein nicht ihr Frühersein, sondern es wiederholt sich nur im späteren Zeitpunkt, was schon im früheren war; die Zeiten selbst bleiben, was sie sind: Früher und Später, und nicht umgekehrt. Auch eine Frage, ob zwischen zwei Punkten der Zeit etwa mehr als eine Zeitlinie möglich sei, kann gar nicht auftreten; durch zwei beliebige Zeitpunkte ist die Zwischenzeit und ist die ganze Zeit vor- und rückwärts ins

Unendliche in absoluter Eindeutigkeit bestimmt, da zu ihrem Aufbau nichts weiter zu Gebote steht oder erforderlich ist als die einzige, immer identische Grundrelation des Vor und Nach. Und diese Eindeutigkeit ergibt sich nicht erst durch eine Wahl unter *a priori* gleich denkbaren Voraussetzungen, sondern es ist von Anfang an nur das Eine zulässig. Es gibt ja hier kein höheres Kontinuum, etwas wie eine Zeitebene, in die die Zeitlinie sich als Kurve einzeichnete. Denn eben weil die Zeit durchaus nur einsinnig ist, gibt es für sie keine Mehrheit von Richtungen, also auch nicht von Dimensionen. Sie hat eben damit auch keine Breite. Zwar hat gelegentlich Kant die Gleichzeitigkeit ihre zweite Dimension genannt. Das ist aber nichts als ein ungenauer Ausdruck. Nicht zwei Zeiten sind (im Zeitsinn) zugleich, sondern zwei Ereignisreihen können gleichzeitig, d. h. in derselben, stets einzigen und eindimensionalen Zeit ablaufen. Ihr Zugleichsein ist keine Bestimmung der Zeit; es besagt nur, daß beide dieselbe Folge von Ordnungszahlen 0, 1, 2 . . . gemein haben. Selbst die Bezeichnung der Zeit als eindimensional schließt noch eine kleine Ungenauigkeit ein; strenger wird man sagen: eine Dimensionsbetrachtung leide auf sie überhaupt keine Anwendung.

Diese absolute Einsinnigkeit der Zeit scheint ihren Grund zuletzt darin zu haben, daß die Zeitrelation als solche und ursprünglich Disposition, nicht Komposition, Auseinanderstellung, nicht Zusammenstellung ist. Nicht als ob sie die Verbindung, den Zusammenhang ganz zunichte machte (dann könnte sie nicht Ordnung sein); vielmehr macht die Sonderung den notwendigen Zusammenhang erst recht durchsichtig (wie besonders am Merkmal der Stetigkeit deutlich wird). Aber die zeitliche Anordnung als solche verbindet nicht, sondern legt auseinander; sie faßt das Mannigfaltige als Mannigfaltiges: Eines, ein Anderes, wieder ein Anderes usf. ins Auge. Am deutlichsten spricht sich dies in Hinsicht der Existentialbedeutung der Zeit darin

aus, daß, wenn ein Zeitpunkt „ist“, alle anderen „nicht sind“ (nicht mehr oder noch nicht). Diese Verneinung, die von der Zeitordnung untrennbar ist, weist bestimmt auf eine Sonderung hin, die im gleichen Sinne in der Raumordnung nicht liegt. Zwar ist auch das Hier nicht Dort, das Dort nicht Hier; aber beide sind zusammen, d. h., mit dem Einen ist notwendig das Andere zugleich gesetzt; „zugleich“ nicht bloß im Zeitsinn, sondern auch, wenn von der Zeitbeziehung ganz abgesehen wird, sozusagen zu gleichen Rechten: weil die Raumordnung als solche eben Zusammenordnung, Ordnung des Miteinander ist, also in ihr die Verbindung als Verbindung ebenso vorwaltet und ursprünglich bestimmend ist, wie in der Zeit die Sonderung als Sonderung. Dieser gründliche Unterschied liegt aber schon in der Zahl nach ihrer Doppelbedeutung als Ordnungs- und Maßzahl. Auch die Folge der Ordnungszahlen kann aus gleichem Grunde wie die der Zeit an sich nur einsinnig fortschreitend gedacht werden. Das schon Gezählte zählt nicht ferner; im Übergang zum Zweiten wird das Erste, im Übergang zum Dritten das Erste und Zweite usf. auf Seite gesetzt, zurückgelassen; während in den Zwei die Eins, in den Drei die Eins und die Zwei eingeschlossen bleiben. Die bloße Reihenordnung ist also gleichsam Auflösung in die Elemente, in der nicht die Verbindungsmöglichkeit aufgehoben, aber jedenfalls von irgendeiner bestimmten Art, einem besonderen Gesetz und also einem unterschiedlichen Wie der Verbindung abgesehen, nur die Elemente als überhaupt verbindbar zurückbehalten werden. Dies ist es, was wir als „Disposition, nicht Komposition“ auszudrücken suchten. Dies aber gilt von der Zählung, sofern sie bloß Akzentuierung und gleichsam Bezifferung und nur soweit Ordnung ist; es gilt ebenso und aus gleichem Grunde von der Zeit als der „Zahl der Existenz“; dagegen nicht vom Raum.

§ 4. (*Grundbeziehung zwischen Zeit- und Raumordnung.*) Dieser Unterschied selbst aber macht es nun erklärlich, weshalb fast alle die Bestimmungen, die wir der Zeit beizulegen hatten, nochmals gelten für das Grundgebilde des Raumes, die gerade Linie, ohne daß doch damit der Unterschied zeitlicher und räumlicher Anordnung sich verwischt, die Zeit zum Raume wird oder der Raum zur Zeit. Diese seltsame Identität und doch Nichtidentität der räumlichen Ordnung in ihrer Urgestalt mit der zeitlichen fordert zunächst noch einiges Verweilen.

Der Raum ist wie die Zeit eine bloße Stellenordnung, für sich ohne Inhalt, „leer“. Seine Stellen werden erst besetzt durch irgendwelche Momente des Existierenden. Deshalb gehören Zeit und Raum nicht nur unlöslich zusammen, sondern sie unterliegen einer und derselben Gesetzlichkeit, der der Stellenordnung überhaupt und damit der Zahl. Was für eine gesetzmäßige Stellenordnung überhaupt als ermöglichende Voraussetzung gilt, muß demnach gleichermaßen für die Zeit und für den Raum gelten. Um so notwendiger wird es, da überdies beide auch darin übereinstimmen, Stellenordnungen des Existierenden zu sein, den innersten Grund ihrer Verschiedenheit, ihrer unterschiedlichen Leistung eben für die Ordnung des Existierenden, so scharf wie möglich zu bestimmen.

Der fragliche Unterschied ist nun nicht zweifelhaft, gerade sofern er die direkt die Existenz angehenden Merkmale beider betrifft. Nämlich das Mannigfaltige im Raum ist zugleich mit-, oder wie man gern sagt, nebeneinander, das Mannigfaltige in der Zeit nur nacheinander; die Stellen in der Zeit lösen sich ab; wenn eine nächste eintritt, muß die vorige weichen; während im Raum alle Stellen zusammenstehen und sich gegenseitig nicht nur nicht verdrängen, sondern halten und tragen. Dies weist auf den vorhin festgesetzten Grundunterschied: daß Zeit ursprünglich Sonderung, Raum ursprünglich Verbindung bedeutet.

Aber dieser Doppelsinn der Ordnung besteht doch (wie sich ebenfalls schon ergab) nicht erst in der Beziehung auf die Existenz, sondern liegt uranfänglich im Sinn des Ordners selbst; er besteht daher auch schon in der Grundfunktion der Zahl. Schon das Zählen ist von Haus aus beides, Sonderung und Vereinigung; je nachdem aber das eine oder das andere Moment als das Grundmoment angesehen wird, ergibt sich ein sicherer Unterschied in der Funktion der Zahl, nämlich der von Ordnungs- und Maßzahl. Mag also die Beziehung auf die Existenz diesen Unterschied noch vertiefen, erkennbar muß er auch schon in den rein mathematischen Merkmalen der Zeit und des Raumes sein. Und zwar nicht bloß in Hinsicht des Umfangs, in dem die allgemeinen Gesetze des Ordners sich auf beide übertragen (nämlich darin, daß die Begriffe der Richtung und Dimension auf die Zeit keine Anwendung leiden, dagegen wohl auf den Raum); sondern auch in den gemeinsamen Bestimmungen muß zum wenigsten ein abstrakter Unterschied sich festhalten lassen, wenn nicht, wenigstens bei Beschränkung auf eine Dimension und einen einzigen Sinn der Ordnung, Zeit und Raum gänzlich ineinanderfließen, ihre begriffliche Zweiheit aufgehoben sein soll. Dieser Unterschied ist aber kein anderer als der besagte: daß in der Zeit die Sonderung, im Raume die Verbindung letztbestimmend bleibt. Eine Auseinanderhaltung gibt es auch im Raum, wird doch das Nebeneinander ebensowohl als Außereinander bezeichnet. Aber die Sonderung ist hier nur Voraussetzung der Verbindung; diese erst macht das Außereinander zum räumlichen. Soll Verbindung stattfinden, so muß eine Mehrheit gegeben, also Auseinanderhaltung möglich sein. Aber schon die Auseinanderhaltung im Raume ist nicht dieselbe wie in der Zeit. Diese nämlich ist streng nur einseitig gerichtet; sie vollzieht sich nur in einem Fortschritt vom Einen zum Anderen (in welchem Ausdruck schon Verneinung liegt); dagegen ist die räumliche Auseinander-

haltung von Anfang an streng gleichseitig; keins der verglichenen Glieder ist an sich das erste, keins das folgende, sondern jedes kann mit ganz gleichem Recht als erstes oder folgendes angesehen werden, vielmehr überhaupt liegt die Setzung als erstes und folgendes nicht an sich im Wesen des Raumes, sondern ist schon Anwendung zeitlicher Betrachtung auf das Mannigfaltige des Raumes; indem man im Raume ein Erstes und Folgendes setzt, überträgt sich unvermerkt das räumliche Auseinander in das zeitliche. Umgekehrt, sobald an der zeitlichen Mannigfaltigkeit diese ausschließende Stellung der verglichenen Glieder als vorhergehendes und nachfolgendes außer Acht gelassen und eine gleichsinnige Wechselbeziehung unter ihnen vorgestellt wird, verliert ihre Beziehung sofort den Charakter des Zeitlichen und wird zur räumlichen.

Gewiß merkwürdig ist diese vollständige gegenseitige Übertragbarkeit der Bestimmungen der Zeit- und Raumordnung ineinander, und stark beweisend für die Freiheit, mit der das Denken über beide verfügt, die Zeit, die ewig fließende, zum Stillstand zu zwingen, den Raum, den ewig ruhenden, in den Fluß der Bewegung gleichsam mithineinzuziehen die Macht hat. Es liegt darin eine nicht geringe psychologische Bestätigung des rein apriorischen Charakters beider. Aber nicht minder auffallend ist, daß dabei eine Gefahr des Ineinanderfließens der Begriffe doch nicht besteht; begreiflich freilich, wenn, wie sich zeigte, ihr ursprünglicher Unterschied in den zwar aufs engste zusammengehörigen, sich gegenseitig fordernden, aber der Richtung nacheinander ursprünglich entgegengesetzten Funktionen des Sonderns und Vereinigens beruht.

Wie nun überhaupt die Sonderung für die Vereinigung vorbedingend ist, nicht ebenso umgekehrt, so folgeweise die zeitliche Sonderung für die räumliche Vereinigung, aber nicht diese für jene. Die Vereinigung ist gar nicht bestimmt vollziehbar, wenn nicht die Sonderung zuvor voll-

zogen ist; in der Vereinigung müssen ja die verbundenen Glieder zugleich volle Selbständigkeit gegeneinander bewahren. Gerade jene Wechselbeziehung, die für die Raumordnung wesentlich unterscheidend ist, setzt deutlichste Scheidung voraus, die für sich allein zeitliche, nicht räumliche Ordnung begründen würde. Also ist Raumordnung durch Zeitordnung bedingt; nicht im gleichen Sinne diese durch jene. Daraus versteht sich, daß, wie Kant richtig beobachtet hat, die Zeitordnung sich der Raumordnung überordnet; daß in der Zeit sich ordnen muß, was nur überhaupt in unsere Vorstellung kommt, auch wenn es nicht oder noch nicht räumlich geordnet sein mag. So kann leicht das Gebiet der räumlichen Ordnung als ein engeres, nicht im gleichen Sinne allumfassendes erscheinen wie das der zeitlichen Ordnung. Ist doch — nicht eigentlich durch Kants Schuld — die Meinung bei Psychologen und Metaphysikern fast unausrottbar festgewurzelt, als ob die äußere, räumliche Welt eine innere, unräumliche, bloß zeitliche Welt des psychischen Seins übrig lasse; während jede tiefer dringende Untersuchung unabweislich ergibt, daß alles sogenannte Innere, Psychische, wenn nicht räumlich bezogen, doch beziehbar und, sofern es sich wenigstens um Erfahrung, d. h. Existenzsetzung und damit Kausalordnung des Geschehens handelt, notwendig so zu beziehen ist. Aber dieser tiefgewurzelte Irrtum wird immerhin erklärlicher aus der wirklichen Überordnung der Zeitordnung über die Raumordnung. Die Möglichkeit der Sonderung schließt die Möglichkeit der Vereinigung zwar ebenso ein wie umgekehrt; nicht aber der Vollzug der Sonderung ist darum gebunden an den vorausgegangenen Vollzug der Verbindung; während umgekehrt die Sonderung vollzogen sein muß, wenn eine Verbindung in bestimmter Gestalt soll stattfinden können. Wird aber die Zeit selbst (irgendein zeitlicher Verlauf) als Ganzes ins Auge gefaßt, namentlich der Messung unterworfen, so muß sich die Zeit in den Raum gleichsam pro-

jizieren; die Zeit ist darum (wie wiederum Kant hervorgehoben hat) durch sich selbst nicht meßbar, eben weil ihre Teile nicht zugleich sind, Messung aber eine Zusammenfassung erfordert, die nur als räumliche möglich ist. Hier besonders beweist sich, daß dies ganze eigenartige Wechselverhältnis des Zeit- und Raumvorstellens nicht etwa bloß psychologische Bedeutung hat (in welchem Falle es uns hier nicht zu interessieren brauchte), sondern auf den Aufbau der Wissenschaft seine weittragenden Konsequenzen erstreckt. Wir werden bald zu zeigen haben, wie die Gestalt des Koordinatensystems für die Darstellung der Naturvorgänge in den Gleichungen der Physik durch dies Verhältnis (die räumliche Bedingtheit der Zeitmessung selbst und andererseits die nur zeitliche Darstellbarkeit der Raumänderung) gänzlich bedingt ist.

§ 5. (*Die Gerade als Grundgebilde des Raumes.*) Zufolge eben dieser Wechselbeziehung also müssen dieselben Grundbestimmungen, die wir an der Zeit nachwiesen, soweit sie rein mathematische sind, sich, einzig mit dem besagten begrifflichen Unterschied, beim Raume nochmals ergeben, während nicht umgekehrt alle Bestimmungen des Raumes sich zugleich auf die Zeit übertragen müssen. Nämlich es werden alle die Merkmale der Reihenordnung, die aus der Sonderung des Mannigfaltigen fließen, für Zeit und Raum gemeinsam gelten, alle die dagegen, die aus der Verbindung als solcher hervorgehen, den Raum allein angehen, oder auf die Zeit wenigstens nur durch eine Übertragung anwendbar sein, die immer als Übertragung bewußt bleibt. Das erstere gilt von den Gesetzen der Zahl bloß als eindimensionaler, einzig gerichteter Stellenordnung, das letztere von allem, was darüber hinausliegt.

Daher treffen alle für die Zeit oben festgestellten Merkmale: Einzigkeit, Unverrückbarkeit, Unendlichkeit, Homogenität und Stetigkeit, ebenfalls zu auf das

Grundgebilde, auf dem alle Raumbeziehungen sich aufbauen: das eindimensionale räumliche Urgebilde, die gerade Linie.

Der Begriff des Geraden ist von uns im vorigen Kapitel festgelegt worden; als das radikal begründende Merkmal ergab sich die absolute Eindeutigkeit der Relation von Glied zu Glied in der Reihe. Diese Forderung wird von den Mathematikern im allgemeinen anerkannt. Besonders Veronese, der fast überall unter den lebenden Mathematikern das stärkste Gefühl für die Unerläßlichkeit rein logischer Grundlagen für die Aufstellung der Fundamentalgebilde der Mathematik beweist, stellt diese Forderung in bestimmter Fassung in seinem Begriff der „Grundform“; man möchte die Übersetzung „Grundgebilde“ vorziehen. Darunter versteht er: diejenige „Form“ (d. h. Einheit eines Mannigfaltigen, welche Ganzes und Teil, Ordnung und Art der Position enthält), welche zur Bestimmung aller anderen dient und eben darum als nur einzig angenommen werden muß. Als diese Grundform ergibt sich zunächst das „in der Lage seiner Teile identische System einer Dimension“¹⁾; dann, auf Grund der vollen Entwicklung der mathematischen Grundbegriffe, besonders der Einführung der Stetigkeit: das kontinuierliche, in der Lage seiner Teile identische System einer Dimension, welches durch die geringste Anzahl von Elementen bestimmt ist²⁾. Durch eben diese Merkmale wird dann³⁾ die Gerade definiert und als Axiom aufgestellt: es gibt diese Grundform.

Hiermit ist ihm indessen die Gerade wirklich nicht eindeutig bestimmt, wie es doch gefordert war. Das in der Lage seiner Teile identische System kann nämlich, wie man sich erinnert, offen oder geschlossen sein. Und so ist auch

1) Einl. § 71; vgl. oben S. 226 f.

2) § 122, Hyp. IX.

3) I. Teil, § 4, Def. I.

die Gerade jener Definition „einfach geschlossen oder offen“. Der Unterschied ist der, daß das einfach geschlossene homogene System zwar auch durch zwei Punkte, nicht aber, wie das einfach offene, durch beliebige zwei seiner Punkte bestimmt ist. Die erstere Bestimmung aber, meint Veronese, sei deshalb wissenschaftlich vorzüglicher, weil sie eine kleinere Zahl von Erfordernissen enthalte und — die sphärische Geometrie nicht ausschließe. Aber so bleibt doch die Bedingung der Einzigkeit der Grundform unerfüllt. Das zirkuläre System ist durch zwei seiner Punkte überhaupt nur dann bestimmt, wenn ein bestimmtes Gesetz der Anordnung schon vorausgesetzt ist, für dessen Aufstellung zwei Punkte nicht genügen; sonst sind mit der bloßen Forderung, zwei gegebene Punkte zu enthalten, unendlich viele stetige und homogene, in der Lage ihrer Teile identische zirkuläre Systeme vereinbar. Ein einziges System ergibt sich nur dann, wenn die zwei Punkte allein als ausreichend gelten, eine denkbare Art der Positionsbeziehung vor allen anderen und als grundlegend für alle anderen auszuzeichnen; das aber geschieht allein durch den Begriff des Geraden in unserem bestimmteren Sinne, der diese Einzigkeit der Beziehungsart nicht nur mitbedeutet, sondern wesentlich bedeutet. Daß dieser Begriff des Geraden bestimmter ist (mehr einschließt) als der Veroneses, kann nicht gegen ihn entscheiden. Denn nicht überhaupt nur auf die Mindestzahl von Voraussetzungen kann es in dieser Frage ankommen, sondern allein darauf, welche Voraussetzungen notwendig und hinreichend sind, eine eindeutige Bestimmung zu ermöglichen. Die zirkuläre Anordnung aber läßt eben einen unendlichen Spielraum von Bestimmungsmöglichkeiten, sie taugt also nicht zur letzten Voraussetzung eindeutiger Bestimmung, da sie vielmehr selbst, wofern dieser Spielraum überhaupt bestimmt sein soll, wieder einer anderen Voraussetzung, als letzter, bedarf. Diese kann nur die Gerade im absoluten Sinne sein,

welche die Identität der Richtung, als Richtungsverschiedenheit gleich Null, zugrunde legt aller Bestimmung irgendwelcher Richtungsverschiedenheit ungleich Null, und damit irgendwelcher möglichen, sei es homogenen oder nicht-homogenen Richtungsänderung, durch die erst die zirkuläre Anordnung zu sicherem Begriff gebracht wird.

Der eigentliche Grund, der nicht nur Veronese, sondern die große Mehrzahl der Mathematiker zu der Meinung verleitet hat, daß man sich an diesen, im Aufbau der mathematischen Begriffe wirklich fundamentalen Begriff des (absolut) Geraden nicht zu binden brauche und nicht binden dürfe, ist wohl der, der sich bei Veronese in der „empirischen Bemerkung I“ (S. 229 f.) ausspricht: „Wenn das System durch die Punktepaare, welche den Enden geradliniger in dem Bereich unserer Beobachtung gelegener Gegenstände entsprechen, bestimmt wird, so bedeutet dies nicht, daß es durch zwei beliebige seiner Punkte bestimmt wird. Denn mit Hilfe (auf Grund) der Anschauung oder Beobachtung kann man nicht behaupten, daß diese Eigenschaft auch für die Paare von Punkten des Systems gelte, von denen wenigstens einer einem nicht in dem Bereich unserer Beobachtung gelegenen Gegenstand entspricht.“ Die Frage sei also durch die Anschauung nicht zu entscheiden; abstrakt aber müsse man von Anfang an die Möglichkeit offen halten, daß zwei Punkte die Gerade nicht bestimmen. Das heißt: die Voraussetzung — und nicht etwa die Folge — jener Unbestimmtheit, die Veronese im Begriffe seiner „Grundform“ bestehen läßt, ist keine mathematische, sondern die metaphysische des Empirismus und Realismus in Hinsicht des Raumes. Nach unseren, nicht metaphysischen, sondern logischen, d. h. methodischen Voraussetzungen, ist die Raumordnung ganz so wenig wie die Zeitordnung oder die Ordnung der Zahl ein „Gegenstand“, der empirisch gegeben und durch Beobachtung festzustellen wäre, sondern es gelten für sie

mit Notwendigkeit die Bestimmungen, die aus dem reinen Denken eines einzigen Systems der Ordnungsbestimmung fließen. Ausschließlich auf Grund der Forderungen dieses reinen Denkens, wenn schon unter der „Führung“ der Anschauung, hat Veronese selbst sämtliche übrigen Grundvoraussetzungen seiner Geometrie aufgestellt; es erscheint daher vom logischen Standpunkt lediglich als Inkonsequenz, wenn er an diesem einzigen letzten Punkte die Entscheidung darin sucht, was durch Beobachtung feststellbar sei oder nicht. Beobachtung vermöchte wahrlich auch nicht die Veronesesche Stetigkeit zu begründen, und doch zögert er keinen Augenblick, sie seiner „Grundform“ zuzuschreiben und sie damit wie durch einen Machtspruch auf alle räumlichen Konstruktionen auszudehnen, ohne die geringste Sorge um die mögliche oder nicht mögliche Bestätigung durch Beobachtung. Und doch würde die Auslassung dieser so viel einschließenden Bedingung seine Voraussetzungen sehr vereinfachen, gewiß auch neue Möglichkeiten sogenannter „Geometrien“ eröffnen, die sicher auch irgendwelchen technischen Wert haben oder noch gewinnen könnten. Die Rücksicht auf die nichteuklidischen Geometrien dürfte übrigens in dieser Frage für Veronese um so weniger ausschlaggebend sein, da er selbst gar kein Bedenken trägt, durch seine Voraussetzungen über die Grundform das Lobatschefskijsche System von vornherein auszuschließen. Das Riemannsche System aber bleibt genau nur dann möglich, wenn die Gerade einfach geschlossen angenommen wird (285); und dieser Annahme gibt Veronese einzig darum den Vorzug, weil sie die beiden Fälle der euklidischen und der sphärischen Geometrie zusammenfaßt, die sphärische aber für das Studium der euklidischen gewisse Hilfen bietet; also nur aus einer technischen Rücksicht.

Eine solche kann für uns hier den Ausschlag nicht geben. Sondern uns müssen die Eigenschaften des Grundgebildes

des Raumes rein logisch aus den fundamentalen Voraussetzungen hervorgehen, die überhaupt nur eine streng einzige Gesetzesordnung des Miteinander möglich machen. Nun erwies sich schon bei der reinen Zahl und der Zeit die Positionsbeziehung als nicht minder reiner und eindeutiger Urbegriff einer gesetzlich bestimmten Ordnung wie die Maßbeziehung. Die große Mehrzahl der Mathematiker sieht die letztere als *a priori* bestimmbar an, weil die vollkommene Identität der Gesetze des Maßes mit denen der reinen Zahl nicht leicht übersehen werden konnte; das Messen ist geradezu ein Zählen. Die Positionsbeziehung dagegen hält man, wie es scheint, ebenso allgemein für abhängig von Beobachtung und Erfahrung, also *a priori* nicht eindeutig festgelegt, unter bloß logischem Gesichtspunkt also frei verfügbar. Wir behandeln beide streng auf gleicher Linie, nicht weil wir „Böotier“ sind, die es nicht über sich bringen, von der mehr als 2000jährigen Tradition des Euklid, oder von dem sinnlichen Bilde der beiderseits ins Unendliche fortlaufenden Geraden, sich zu befreien; sondern weil für Richtung und Abstand, Positions- und Maßbeziehung die logischen Bedingungen völlig gleich liegen. Die Bestimmbarkeit von Abständen fordert einen Grundabstand, der folglich als einziger bestimmt sein muß durch das bloße Gegebensein zweier Punkte als Anfangs- und Endpunkt; nicht anders als die Bestimmbarkeit der Zahl eine eindeutig bestimmte Grundzahl, die Eins, erfordert, deren Maßwert als unverrückbar fest bestimmt angenommen werden muß bloß damit, daß die Endpunkte der Zahldistanz, die sie vertritt (0 und 1 als Endpunkte der Zahlstrecke $\overline{01}$) bestimmt sind. Aber schon in dieser Grundrelation selbst, auf der alle Zahlbeziehung sich aufbaut, liegt zugleich und mit gleichem logischem Zwang die Einzigkeit der Positionsbeziehung zwischen denselben und überhaupt zwischen irgendwelchen zwei Punkten, deren Ausdruck im Zeichensystem der Mathematik das Plus und

Minus ist. Diese Einzigkeit der Positionsbeziehung also, behaupten wir, gilt eben damit notwendig auch für das Grundgebilde des Raumes, wie ebenfalls der Zeit. Denn alle Möglichkeit der Bestimmung von Position wird aufgehoben, wenn nicht eine Grundbeziehung der Position gesetzt wird, die als einzige bestimmt sei durch das bloße Gegebensein von zwei Bezugspunkten, ebenso wie alle Bestimmbarkeit der Distanz aufgehoben wird, wenn nicht eine Grunddistanz angenommen wird als einzig bestimmt durch das bloße Gegebensein zweier Endpunkte. Warum gerade zweier? Nicht weil zwei die wenigsten sind, wenn überhaupt eine Relation stattfinden soll, und diese Sparsamkeit in Voraussetzungen an sich ein unbedingter Vorzug wäre; allgemein nicht erst aus einem teleologischen Grunde; teleologische Erwägungen können keine Geltung beanspruchen vor den logischen; auch hat eine Minimaufgabe in Hinsicht der Voraussetzungen der Geometrie erst einen Sinn, wenn wenigstens die letzten Voraussetzungen, die eine Geometrie überhaupt nur möglich machen, schon feststehen, nicht aber, wenn selbst nach den letzten ihrer Voraussetzungen erst die Frage ist. Sondern das allein kann hier entscheiden, daß eine gesetzmäßige und zwar einzige Ordnung verlangt ist, die aber sich allein aufbauen kann auf dem Prinzip des Fortbestandes immer derselben letzten Grundrelation. Diese muß durch zwei Elemente bestimmt gedacht werden, weil jede größere Anzahl von Elementen, um selbst ihrer Relation nach bestimmt zu sein, die durch zwei Elemente bestimmte Grundrelation voraussetzen würde. Darum ist es in letzter, grundlegender Betrachtung nicht angängig, die zirkuläre Anordnung zugrunde zu legen und dann die lineare etwa als deren Grenzfall (so wie die Euklidische Geometrie als Grenzfall der sphärischen) hinterherkommen zu lassen. Das läßt sich übrigens auch direkt einsehen: die zirkuläre Anordnung stellt die Forderung, Relationen ab , ba zugleich als einander wie

Plus und Minus entgegengerichtet (weil in *b* zusammenstoßend) und auch gleichgerichtet anzusehen. Das muß wohl überhaupt möglich sein, da sonst die zirkuläre Änderung überhaupt wegfiel; aber es ist nur als abgeleiteter Fall, unter Voraussetzung einer Richtungsänderung verständlich, als Urfall dagegen unverständlich, denn für diesen muß unter denselben Elementen die Positionsbeziehung (der Plus- und Minussinn) auf einzige, ausschließende Weise feststehen, weil, ehe von einer Mehrheit oder Änderung der Positionsbeziehung die Rede sein kann, der Einheits-, der Identitätssinn der Position feststehen muß.

Es wäre für die Verständigung über diese Frage schon viel gewonnen, wenn man sich allgemein davon überzeugen würde, daß doch der Begriff der Richtung ebenso wie der aller sonstigen Merkmale der Zahl und Größe der Bestimmung des reinen Denkens unterliegt; daß man also, um ihn auf bestimmte Weise aufstellen zu können, ja zu müssen, nicht auf besondere Erfahrungen oder eine denkfremde „reine Anschauung“ zu warten hat, deren vermeinte Bezeugungen, um verstanden zu werden, doch die Grundbegriffe des reinen Denkens verlangen würden. Die Richtung ist so gut wie der Abstand ein reiner Denkbegriff; auch der Abstand könnte es nicht sein, ohne daß zugleich die Richtung es ist. Denn ein Abstand ist nur bestimmt, indem zugleich die Richtung bestimmt ist. Galt dies schon für die reine Zahl, so muß es erst recht für die Zeit und den Raum gelten. Setzt man, wie am auffälligsten Helmholtz [74, 75], an die Stelle des Begriffs des Geraden den des Kürzesten, so spricht man entweder nicht mehr vom Raume, sondern von Konstruktionen im Raum, wobei der Raum selbst schon vorausgesetzt werden müßte, oder man führt einen nicht bestimmten, ohne die Grundlage der Richtungsbestimmtheit überhaupt nicht bestimmbar Begriff räumlicher Entfernung ein. Es gibt kein logisch begründetes Urteil über Distanz ohne Voraussetzung der Rich-

tungsbestimmtheit. Man versucht dann, sich eine Zahl ohne Richtung zu denken. Der Versuch muß mißlingen; Zahl ohne Richtung ist nach unseren Begriffen überhaupt nichts, vor allem nicht Größe; der Abstand aber soll Größe sein.

Das ist, solange man sich, von metaphysischen Skrupeln unbeirrt, allein an die Begriffe selbst hält, so klar, daß es gar nicht zu verstehen wäre, wie es hat übersehen werden können, wenn man nicht die Macht eben jener metaphysischen Vorurteile kennte, durch die allein diese Frage hat verwirrt werden können: der alten, schier unausrottbaren Vorurteile des Empirismus und Realismus. Man kommt nicht davon los, daß doch die Dinge an sich existieren und unsere Begriffe auf dem Wege der Erfahrung von ihnen abgelernt sein müßten. Wo es zumal, wie beim Raume, um die „Dinge außer uns“ zu tun ist, erscheint es dem natürlichen Dogmatismus als etwas Ungeheuerliches, daß wir ihre Eigenschaften von uns aus voraus sollten festsetzen und gar die Gesetze unseres Denkens den Dingen selbst aufzwingen können. Aber ist es denn so schwer, sich klar zu machen, daß Existenz ein Begriff, das Existenzurteil ein Urteil ist wie jedes andere, daß folglich beide keinen anderen letzten Gesetzen unterstehen können als denen des Begriffs und des Urteils überhaupt, mit einem Worte, des Denkens? Hat denn schon jemand Existenz 'gesehen oder getastet? Ich weiß von ihr nur, daß sie ausgesagt wird; und wenn ich den Inhalt dieser Aussage nicht soll denken dürfen, so bleibt mir nichts als ein Schall ohne Sinn. Besonders irreführend mußte hier das Beispiel so großer, zweifellos philosophisch gerichteter mathematischer Denker wie Gauß, Riemann und Helmholtz wirken, welche alle den Raum der Geometrie ganz und gar als ein Objekt der Physik ins Auge fassen, dessen Eigenschaften durch Experiment festgestellt werden müßten; ohne auch nur zu fragen, ob dies Experiment denn anders als im Raum, somit unter Voraussetzung eben der Grundeigenschaften des Raumes, die das

Experiment feststellen soll, ausführbar wäre. Aber die Wissenschaft ist doch auch über jene Großen hinausgeschritten. Wenigstens heute müßte endlich volle Klarheit darüber gewonnen sein, daß auf dem Wege des Experiments hier eine Entscheidung schlechthin ausgeschlossen ist, nachdem über und über bewiesen ist¹⁾, daß nach geeigneter Wahl der physikalischen Voraussetzungen jede physikalische Empirie mit jeder Geometrie in Einklang gebracht werden kann. Also muß die Wahl der Voraussetzungen für die Geometrie jedenfalls unabhängig von physikalischer Empirie getroffen werden. Ist aber das einmal klar, so muß man auch begreifen, daß der Raum, dergleichen die Zeit, ganz so wenig wie die Zahl eine gegebene Existenz, sondern vielmehr eine grundlegende Bedingung der Existenzbestimmung bedeutet, über deren Eigenschaften allein nach den Gesetzen des Denkens von Existenz zu entscheiden ist. Existenz nun bedeutet Einzigkeit der Bestimmung; diese überhaupt zu ermöglichen, war die erste Voraussetzung die einzige, allbefassende Zeit; die zweite ist der aus gleicher Notwendigkeit nur einzig und allbefassend zu denkende Raum. Wie nun die Eigenschaften der Zeit sich rein aus der Forderung einer einzigen, gesetzmäßig bestimmten Ordnung des Nacheinander ergaben, so müssen mit gleicher Notwendigkeit die Eigenschaften des Raumes hervorgehen aus den logischen Erfordernissen einer einzigen, gesetzmäßig bestimmten Ordnung des Miteinander. Diese Gleichheit der letzten Begründung erklärt die völlige Gleichartigkeit der logischen Gestalt des Grundgebildes des Raumes, der geraden Linie, mit dem der Zeit und der Zahl. Es bleibt nur übrig, auf derselben Grundlage die Gesetze

1) Es ist ein großes Verdienst von H. Poincaré (147, S. 54 ff., 72, 82, 86 und durchweg), dies nachdrücklich ausgesprochen und hell beleuchtet zu haben. Nach ihm ist es „unmöglich, mit dem Empirismus in der Geometrie einen vernünftigen Sinn zu verbinden“ (81).

abzuleiten für das, was wir bisher bei Seite gelassen haben: die Richtungen und Dimensionen des Raumes.

§ 6. (*Der dreidimensionale Euklidische Raum.*) Aus den Untersuchungen des vorigen Kapitels ergab sich, daß die Mehrheit der Richtungen und Dimensionen kraft gedanklicher Notwendigkeit an sich besteht. Folglich ist sie auch für das Denken der Existenz, und zwar von dessen ersten Voraussetzungen an, zugrunde zu legen. Warum sie für die Zeit nicht, dagegen notwendig für den Raum besteht, dafür haben wir den logischen Grund bereits aufgewiesen: die Zeit entspricht, nach ihrer Urbedeutung der Auseinanderstellung, der nur einzig gerichteten Reihenordnung, also der bloßen Stellenzahl, der Raum, nach seiner Urbedeutung der Zusammenordnung, der Zahl in ihrer vollen Entfaltung, d. h. der komplexen Zahl. Also findet die Mehrheit der Richtungen und Dimensionen, es findet der Begriff der Richtungsverschiedenheit und Richtungsänderung (oder des Winkels) mit gleicher Notwendigkeit wie der der Größenverschiedenheit und Größenänderung auf den Raum Anwendung. Es handelt sich nur noch darum, das genaue Gesetz und die etwaige obere Grenze für die damit gegebene Erweiterung des Raumbegriffs festzusetzen.

Die Aufgabe ist, mit anderen Worten: zu zeigen, wie, nachdem durch irgendwelche zwei Elemente (0 und 1) eine einzige als Grundrichtung bestimmt ist, von dieser aus die Allheit der Richtungen im Raum und damit zugleich der räumlichen Dimensionen gegeben ist.

Nun scheint in abstrakter Erwägung der Fortgang ins Unendliche hier nicht ausgeschlossen werden zu dürfen. Die bloßen Begriffe der Richtung und Dimension setzen rein aus sich dem Fortgang eine obere Grenze nicht. Daher ist es verständlich, daß die Mathematik, sobald sie darüber hinauskam, an eine bestimmte Zahl von Dimensionen als die durch die Dinge allein gegebene und darum

allein interessierende sich prüfungslos zu binden, sobald sie lernte, die Begriffe Richtung und Dimension als reine Denkbegriffe in Freiheit zu handhaben, auch den Mut der Konsequenz bewies, ihre Betrachtung sogleich auf eine unbeschränkte Zahl von Richtungen und also Dimensionen auszudehnen, wie es in voller Allgemeinheit H. Graßmann vollbracht hat. Indessen ist eine Beschränkung unabweisklich gefordert, wenn es sich nicht um bloße abstrakte Denkbearkeiten, sondern um die Möglichkeit von Existenzbestimmung handelt, denn damit ist die neue Bedingung gestellt, daß die Richtungen und Dimensionen im Raume in einer geschlossenen, von vornherein nur als einzig denkbaren systematischen Verknüpfung miteinander stehen müssen. Daß die bloße Mathematik auf eine solche Beschränkung nicht verfiel, ist begreiflich; hat sie doch, als „reine“ oder „freie“ Mathematik, überhaupt nicht die Aufgabe, selbst Bestimmungen auch nur allgemeinsten Art über Existenz zu treffen, sondern die Methoden allseitig zu entwickeln, die dann einer anderen Wissenschaft, der Physik, zur Bestimmung der Existenz dienlich sein mögen. Und gerade je entschiedener wir die volle Unabhängigkeit der Mathematik von der Physik betonen, um so weniger werden wir uns weigern, anzuerkennen, daß reine Mathematik, bloß als solche, in der Behandlung der Begriffe Richtung und Dimension an keine Schranke, die lediglich aus dem Bedürfnis der Existenzbestimmung fließt, gebunden sei. Jetzt aber ist die Frage eben nach den Bedingungen einer möglichen Existenzbestimmung; es ist die Frage nicht nach abstrakten Mannigfaltigkeiten, nach einem bloßen Allgemeinbegriff „möglicher“, d. h. widerspruchsfrei denkbarer und gesetzlich darstellbarer „Räume“, sondern nach dem Raum, dem einzigen der Existenz, der als solcher auch nur auf einzige Weise bestimmt gedacht werden kann. Diese neue Bedingung der Einzigkeit fließt also nicht mehr aus den Begriffen reiner Mathematik; auch nicht einer abstrakten

Logik, die nach nichts als den Bedingungen der Denkbarkeit überhaupt fragt, also erst recht die äußerste Weite der Bestimmungen sich offenhalten muß; sondern der konkreten, der transzendentalen Logik Kants, mit anderen Worten: aus den Gesetzen des Existenzurteils. Diese bilden aber nicht nur ein, sondern das letzte, alles in sich zusammenfassende Problem der echten Logik, die eben Logik der Existenz sein muß. Denn das Denken will zuletzt Denken der Existenz sein; auf nichts als sie zielt es überhaupt; richtiger: Existenz ist nur der Ausdruck dessen, worauf als letztes alles Denken abzielt. Denn Denken heißt Bestimmen, und Existenz bedeutet die letzte Bestimmung, die, in der nichts unbestimmt bliebe. Darin liegt schon die Forderung des einzigen, mithin geschlossenen Zusammenhanges des Existierenden, der als Grundlage den einzigen, geschlossenen Zusammenhang der Stellenordnung des Existierenden, also des Raumes, wie andererseits der Zeit, fordert. Damit aber ergibt sich für die Aufstellung der Richtungen und Dimensionen des Raumes die unerläßliche Forderung einer Beschränkung der Dimensionenzahl. Denn Dimensionen sind nichts anderes als Bestimmungsstücke; aus unendlichen Bestimmungsstücken aber wäre überhaupt nichts bestimmbar.

Für diese geforderte Beschränkung aber vermag ich bisher nur eine Möglichkeit abzusehen, nämlich durch die Voraussetzung, daß keine größere Zahl von Dimensionen der Existenzbestimmung zugrunde zu legen sei, als notwendig und hinreichend ist, einen einzigen und damit geschlossenen, zugleich homogenen und stetigen Zusammenhang räumlicher Bestimmung herzustellen. Aus dieser Bedingung aber ergibt sich, sobald die Stetigkeit, wie es notwendig ist, auf den Zusammenhang der Richtungen miterstreckt wird, eine bestimmte, und zwar genau die Beschränkung, welche von der Geometrie Euklids und der Naturwissenschaft Newtons ohne Bewußtsein oder doch ohne Angabe des Grundes angenommen worden ist: die

Beschränkung auf drei Dimensionen, und zwar „Euklidischer“ Konstitution.

Der Beweis ist einfach. Durch zwei Elemente, 0 und 1, ist unseren Voraussetzungen zufolge der „Sinn“ von 0 nach 1 (Plussinn) und mit diesem der Gegensinn von 1 nach 0 oder von 0 nach 1' (Minussinn) auf einzige Weise bestimmt. Von der durch diese beiden Grundsinn definierten einzigen „Richtung“ verschiedene, von demselben Punkte ausgehende Richtungen existieren; aber sie können nicht um eine größere Richtungsdivergenz als die des Gegensinns vom Grundsinn verschieden sein; denn die Richtungsänderung ist (wie bereits festgestellt wurde) ihrer Natur nach zirkulär. Folglich sind alle Unterschiede der von 0 ausgehenden Richtungen beschlossen zwischen dem Richtungsunterschied 0 und einem Maximum des Richtungsunterschiedes, oder die mögliche Richtungsänderung hat ihre obere Grenze in einer Richtungsänderung 1, welche der reinen Umkehrung des Richtungssinnes entspricht. Definiert man nun die kontinuierliche Richtungsänderung zwischen Grund- und Gegensinn als Drehung, so kann die Drehung wieder verschiedenen Sinn und verschiedene Richtung haben, es ist aber wieder die Drehung von identischer Richtung, welche die Ebene definiert, zugrunde zu legen, und es haben die möglichen Änderungen der Drehungsrichtung wieder ein Maximum 1 der Änderung der Drehungsrichtung, nämlich an derjenigen Änderung derselben, welche den ursprünglichen Drehungssinn in den Gegensinn überführt. Indem nun diese Änderung, d. h. die Drehung der Ebene um die Gerade als Achse, wiederum homogen und stetig zu vollziehen ist, ergibt sich der homogene und stetige dreidimensionale, d. h. der Euklidische Raum. Auf mehr Dimensionen aber führt unser Ableitungsprinzip nicht. Denn nach demselben sind neue Dimensionen einzuführen, wenn und nur wenn solche erforderlich sind, um gegebene Richtungsgegensätze in stetigem Übergang zu vermitteln. Nun hat zwar die

Drehung der Ebene im Raum wiederum zwei entgegengesetzte Sinne, zwischen denen eine stetige Vermittlung gefordert ist. Aber diese verlangt nicht eine neue Dimension, denn die Ebene hat im dreidimensionalen Raum zwei fundamentale Drehungen, nämlich nach ihren zwei Dimensionen (in einfachster Darstellung: um zwei aufeinander senkrechte Achsen), von welchen, wie man sich leicht überzeugt, jede für die andere die erforderliche stetige Vermittlung herstellt; z. B. die Vorwärtsdrehung der Ebene um die Horizontalachse wird in die Rückwärtsdrehung stetig übergeführt durch die Drehung der Ebene um die Vertikalachse, die Rechtsdrehung um die Vertikalachse in die Linksdrehung durch die Drehung um die Horizontalachse.¹⁾

Mit dem absoluten Begriff der Geraden oder der Richtung, der dieser Konstruktion zugrunde gelegt wurde, ist die Euklidische Verfassung des so konstruierten Raumes gegeben zufolge der Bedingung der strengen Homogenität, nach welcher jede von einem Punkte aus mögliche Konstruktion ebenso von jedem Punkte aus möglich sein, oder anders ausgedrückt, an allen Stellen des Raumes dieselben Relationen obwalten müssen. Durch irgendwelche zwei Punkte des Raumes ist dann eine Gerade bestimmt; zwei Gerade haben nur einen oder alle Punkte gemein. Die Euklidische einzige Parallele ist unmittelbar damit gegeben, daß auch von jedem Punkte aus dieselben und nur dieselben Richtungen existieren wie vom Ausgangspunkte der Konstruktion, und jede von diesen nur einmal.

1) Vgl. die Abhandlungen 127, 128, 130 sowie 133. Diese Deduktion berührt sich, aber deckt sich nicht mit der von Pietzker [142], von der sie sich übrigens auch dadurch unterscheidet, daß sie nicht die logische Unmöglichkeit eines Raumes von mehr als drei Dimensionen bewiesen haben will; sondern nur: daß das Hinausgehen über drei Dimensionen (und zwar Euklidischer Konstitution) in unendliche Unbestimmtheit führt, also eine Existentialbestimmung unmöglich machen würde.

Zwei gleich gerichtete Gerade treffen sich nicht, denn sie bilden keinen Winkel. Es müssen von allen Punkten die gleichen Konstruktionen auch zu beliebigem Maßstab ausführbar sein, weil die Maßbestimmung auf die Richtungsbestimmung keine ändernde Wirkung üben kann. Im vollkommen homogenen Raum muß jede Distanz jede vertreten können; ein absoluter (kleinster oder größter) Abstand, eine Raumkonstante, ein Krümmungsmaß verschieden von 0 ist durch die streng verstandene Homogenität schon ausgeschlossen; wie auch eine Endlichkeit des Raumes.

Dies alles folgt aus der Grundbedingung unserer Konstruktion, nämlich der geforderten Einzigkeit und begrifflichen Geschlossenheit des räumlichen Zusammenhanges; freilich nicht aus den bloßen abstrakten Begriffen Abstand und Richtung. Diese würden von sich aus für die Zahl der Dimensionen keine Beschränkung ergeben; mit dem Raum von n Dimensionen aber sind auch die verschiedenen Fälle nichteuklidischer Räume von $n - 1$ Dimensionen, und ist unweigerlich auch die unbeschränkte Veränderlichkeit der sogenannten „Krümmung“ des Raumes gegeben. Nichts davon ist etwa logisch widersprechend; Räume von beliebiger Dimensionenzahl und damit ohne weiteres auch nichteuklidische Räume konstanter oder nicht konstanter Krümmung sind nicht nur ohne Widerspruch denkbar, sondern aufs genaueste begrifflich darstellbar und in allen ihren Grundeigenschaften und Konsequenzen mathematisch berechenbar. Das allerdings könnte heute nur ein Böötier leugnen wollen. Es ist also gegen die Mathematik der allgemeinen „Räume“ mit unseren obigen Aufstellungen durchaus nichts gesagt. Abgelehnt wird durch die Konsequenz unserer Voraussetzungen nur die Metaphysik der allgemeinen Räume, die sogenannte „Meta-geometrie“. Darüber aber tröstet man sich leichter, wenn man vor Augen sieht, daß diese Metaphysik nichts weniger als eine eindeutig klar entwickelte und sicher fortschreitende

Wissenschaft, daß sie vielmehr fast bei jedem ihrer Vertreter eine andere und nirgends in auch nur erträglicher Strenge begründet, sondern in der Regel bloß einfach behauptet ist. Gemeinsam ist diesen Behauptungen nur zweierlei: die im schlechten Sinne apriorische Voraussetzung des Empirismus und Realismus überhaupt, und, in seltsamem Kontrast dazu, die Behauptung von Möglichkeiten als realen, die aller empirischen Entscheidung ihrer Natur nach entzogen sind.

Einige kritische Bemerkungen über die Irrungen der Metaphysik der nichteuklidischen Räume mögen denn wohl hier am Platze sein.

§ 7. (*Die Metaphysik der nichteuklidischen Räume. „Metageometrie“.*) Es ist eine bei Mathematikern und Philosophen noch immer nicht selten begegnende Meinung, daß durch die nichteuklidische Geometrie Kants Apriorismus der Raumanschauung widerlegt, der Empirismus endgültig bewiesen sei. Ich habe zu Anfang gesagt, daß und weshalb ich in der apriorischen Raumanschauung Kants das letzte Wort in der Raumfrage nicht sehe. Aber durch das Faktum der nichteuklidischen Geometrie wäre sie nicht widerlegt. Wenn es des Beweises noch bedurfte, daß die Euklidische Vorstellung des Raumes eine absolute Denknötwendigkeit nicht ist, so ist dieser Beweis durch die Aufzeigung und den Ausbau widerspruchloser, also denkmöglicher nichteuklidischer Raumsysteme freilich erbracht. Aber so wichtig dieser Beweis sonst sein mag, für Kant bedurfte es seiner nicht, da eben der Satz, daß der Euklidische Raum eine absolute Denknötwendigkeit nicht sei, eine der wesentlichen Voraussetzungen seiner These ist, daß er eine dem Menschen eigentümliche, für andere denkende Wesen vielleicht nicht bestehende Anschauungsnotwendigkeit sei. Daß wir aber die nichteuklidischen Räume uns sogar zur Anschauung zu bringen vermöchten, hat zwar Helmholtz beweisen

wollen, aber dieser Beweis — der mit der Mathematik der nichteuklidischen Räume nichts zu tun hat, vielmehr eine rein psychologisch-physiologische Frage betrifft — ist heute wohl allgemein als mißglückt erkannt und dürfte kaum noch ernstliche Verteidigung finden. Die „Anschauung“ sphärischer und pseudosphärischer Räume, die uns Helmholtz hat verschaffen wollen, ist ganz ersichtlich nichts als eine „Abbildung“ oder Projektion derselben auf den Euklidischen Raum; und dasselbe gilt ausnahmslos von allen Veranschaulichungen nichteuklidischer Räume, die je versucht worden sind oder versucht werden konnten. Daß solche „Abbildungen“ möglich sind, hat die große Bedeutung, daß die Gesetze der nichteuklidischen Geometrien einen Wert und eine unzweifelhafte Anwendbarkeit besitzen für viele komplexere Probleme des Euklidischen Raumes; wie besonders schön und vielseitig Wellstein [181] gezeigt hat. Damit gewinnt die nichteuklidische Mathematik, rein als solche, ohne Zweifel eine hohe und sehr reelle Bedeutung. Nur sind ihre Grundgebilde dann etwas gänzlich anderes, als man sonst unter Punkten, Geraden, Ebenen verstanden hat; es können irgendwelche räumlichen Gebilde von beliebig hoher Komplexion sein, unter denen nur (vollständig oder teilweise) dieselben Beziehungen nochmals gelten wie unter den Punkten, Geraden, Ebenen, für die sie ursprünglich aufgestellt wurden. Es ist technisch zweifellos von sehr großer Bedeutung, daß auf solche Weise die ganze Geometrie auf höheren Stufen nochmals und noch unendlich vielmals gilt. Aber es sind durchaus nur komplexere Gebilde des Euklidischen Raumes, von denen sie gilt, nicht solche einer überhaupt anders gearteten Räumlichkeit. Als alleinige für uns anschauliche Raumordnung ließe sich darum nicht minder die Euklidische festhalten. Also mit dem Sachbestand der Geometrie, nicht bloß, wie er zu seiner Zeit vorlag, sondern auch, wie er heute bekannt ist, wäre Kants These an sich nicht unvereinbar.

Unhaltbar ist diese These, in der soeben ausgesprochenen, übrigens noch aus seiner vorkritischen Zeit (der Dissertation von 1770) stammenden Fassung, vielmehr gerade zufolge der berichtigten Grundsätze der von demselben Kant geschaffenen transzendentalen Methode. Daß der Raum nur die „subjektive Bedingung der Sinnlichkeit“ sei, „unter der allein uns äußere Anschauung möglich“ ist; daß er an der besonderen „Beschaffenheit unserer Sinnlichkeit“, an der „Rezeptivität des Subjekts, von Gegenständen affiziert zu werden“ hänge, somit „*a priori* im Gemüte gegeben“ sei; daß man daher „nur aus dem Standpunkte eines Menschen“ von diesem Raume reden könne, während wir „von den Anschauungen anderer denkender Wesen gar nicht urteilen können, ob sie an die nämlichen Bedingungen gebunden seien“¹⁾, sind Thesen, die auf dem Wege transzendentaler Begründung nicht nur nicht erwiesen oder je erweislich, sondern dem reinen Sinne der transzendentalen Methode geradezu widersprechend sind, indem die Bedingungen zur Möglichkeit wissenschaftlicher Erfahrung (Mathematik und mathematischer Naturwissenschaft) nicht in dieser selbst, als tatsächlich in ihr wirkend und zugrunde liegend aufgewiesen, in rein inhaltlichen Bestimmungen festgelegt und auf ihre letzten, nicht minder rein inhaltlichen Voraussetzungen reduziert, sondern gleichsam hinter der Erfahrung, in der eigenartigen Beschaffenheit eines erst wie außer der Welt stehend, dann in sie eintretend gedachten „Subjekts“ unserer Anschauungen gesucht werden. Auch als bloß psychologische Hypothese wäre eine solche Aufstellung nicht brauchbar; während die allgemeine Voraussetzung der Ursprünglichkeit der Raumvorstellung überhaupt sich allerdings auch psychologisch wohl bewährt.

Dagegen bleiben die begründenden Sätze nach unseren methodischen Voraussetzungen in voller Kraft: 1. Der

1) Kr. d. r. V. § 3. „Schlüsse aus den obigen Begriffen“, b.

Raum ist „kein empirischer Begriff, der von äußeren Erfahrungen abgezogen“, „aus den Verhältnissen der äußeren Erscheinungen durch Erfahrung erborgt“ wird, sondern „diese äußere Erfahrung ist selbst nur durch gedachte Vorstellung allererst möglich“; 2. er ist „kein diskursiver . . . Begriff von Verhältnissen der Dinge überhaupt“, sondern eine „wesentlich einige“ Vorstellung und in diesem, rein objektiv bestimmten Sinne ursprüngliche „Anschauung“; und 3. die Sätze von ihm haben nicht bloß „komparative Allgemeinheit“ durch Induktion, sondern besitzen eine strenge, obwohl nicht analytisch, nach dem Satze des Widerspruchs zu begründende, sondern synthetische Notwendigkeit — deren transzendenten Grund aufzuweisen aber nun erst die Aufgabe ist; eine Aufgabe, die durch alle diese wenn noch so richtigen tatsächlichen Festsetzungen erst gestellt, nicht gelöst ist.

Die Lösung, die wir fanden, bestätigt Kants Auffassung insoweit, als auch nach unserem Ergebnis der Euklidische Raum weder eine absolute Denknötwendigkeit noch eine reine Erfahrungstatsache, oder etwa eine Hypothese ist, deren Wahrheit oder Unwahrheit der Entscheidung der Erfahrung unterläge; sondern eine „notwendige“ Voraussetzung in dem bestimmten Sinne, daß er bedingend ist für „mögliche Erfahrung“, bestimmter: für die eindeutige gesetzmäßige Bestimmbarkeit von Existenz in der Erfahrung. Er beruht also nicht auf einer Notwendigkeit des Denkens überhaupt, wohl aber des Erfahrungsdenkens, des Denkens von Existenz. Das Unterscheidende liegt in dem Hinzutritt der Bedingung der Einzigkeit, nicht irgendwelcher besonderer räumlicher Bestimmungen, sondern des Zusammenhanges aller der Bestimmungen, die mitsammen die Koexistenz der Dinge gesetzmäßig darstellbar machen. Sofern in Kants Begriff der „Anschauung“ oder Gegebenheit diese Forderung der Einzigkeit der Bestimmung wesentlich zugrunde lag, bleibt auch richtig, daß der Euklidische

Raum eine notwendige Bedingung nicht des (allgemeinen, diskursiven) Denkens, sondern der „Anschauung“ sei. Aber die Forderung der Einzigkeit ist selbst eine Forderung des Denkens, nur eben nicht des Denkens überhaupt, sondern des bestimmtesten Denkens, des Denkens der Existenz, welches beruht auf dem Zusammentritt aller in besonderen Richtungen des Denkens waltenden Grundgesetzlichkeiten, die je für sich nur für einen besonderen Bereich von Denkgegenständen, nicht aber, ohne die anderen, für den Gesamtgegenstand des Denkens die zureichenden Voraussetzungen bieten. So bleiben wesentliche, man darf vielleicht sagen, die wesentlichen Züge der Kantischen Lehre bestehen; aber jene ursprüngliche — wie gesagt, noch aus der Zeit vor der Entdeckung der transzendentalen Methode stammende, nachher von Kant nicht genügend dieser gemäß nachgeprüfte und berichtigte — Formulierung derselben ist ohne künstliche Umdeutung nicht haltbar, wird also besser ganz aufgegeben.

Dagegen ist die dieser gegenüberstehende These des Empirismus und Realismus nicht etwa ein bewiesenes Ergebnis der nichteuklidischen Raumtheorien, sondern eine Voraussetzung — nicht dieser mathematischen Theorien, sondern einiger der Forscher, die diese Theorien begründet haben. Sie konnten es nicht wohl vermeiden, sich auch über die Metaphysik des Raumes Gedanken zu machen, und diese Gedanken bewegten sich zunächst in der Richtung des Empirismus. Nicht das ist sehr zu verwundern; eher das andere: daß man gerade mit den Argumenten den nur empirischen Charakter der Euklidischen Raumvorstellung hat begründen wollen, aus denen in Wahrheit das Gegenteil folgt. Sollten unsere Begriffe vom Raum nur empirisch sein, so müßten sie nicht bloß aus der Erfahrung uns erwachsen, sondern durch Erfahrung zu bestätigen oder zu widerlegen sein. Nun ist zwar „daran gar kein Zweifel“, daß diese, wie überhaupt alle unsere theoretischen Grund-

begriffe allein in der Erfahrung ihren Gebrauch haben und allein durch diesen Gebrauch sich in uns haben entwickeln und zu bestimmtem, gesichertem Bewußtsein erheben können. Aber das gilt ebenso von den letzten Voraussetzungen der Arithmetik und selbst der allgemeinen Logik, die man doch darum nicht für bloß empirisch ansehen kann. Ihre Gültigkeit kann offenbar nicht von der Erfahrung abhängen, weil die Erfahrung, die sie beweisen oder widerlegen sollte, selbst ohne sie nicht möglich wäre. Es fragt sich aber, ob nicht ebendies auch von der Gesetzlichkeit der Raumordnung gilt.

Wie sollte über die Euklidische oder nichteuklidische „Beschaffenheit“ des Raumes unserer Erfahrung — diese Erfahrung selbst entscheiden? Die Erfahrungen, welche diese Entscheidung erbringen sollten, könnten doch nur empirische Messungen im Raume sein. Solche aber fußen unvermeidlich auf Voraussetzungen physikalischer, also selbst empirischer Art, wie Starrheit der Körper, Geradheit der Trägheitsbahnen derselben sowie der Bahnen der Lichtfortpflanzung. Aber diese Voraussetzungen setzen schon ihrerseits eine bestimmte Geometrie, in ihrer gewöhnlichen Fassung die Euklidische voraus; wie sollten also solche Messungen entscheiden können über die Gültigkeit einer Geometrie, die ihre eigene Voraussetzung ist? — Man denkt sich, es sei dies in der Weise möglich, daß die Voraussetzungen der Euklidischen Geometrie, weil selbst aus unserer gewöhnlichen physikalischen Empirie geschöpft, im Bereiche der gewöhnlichen physikalischen Empirie zwar sich bewähren, über gewisse Grenzen hinaus aber, namentlich auf sehr große räumliche und zeitliche Entfernungen sich nicht mehr richtig erweisen könnten, indem, wenn wir sie auch da noch unserer Theorie der Erscheinungen zugrunde legen würden, Widersprüche oder wenigstens Unzuträglichkeiten zutage treten würden. In der Tat ist der Fall zwar bisher nicht eingetreten, aber an sich wohl denk-

bar, daß z. B. auf Fixsternweiten die Winkelsumme in Dreiecken, die unter den sonst geltenden Voraussetzungen gemessen würden, sich ungleich zwei Rechten fände. Aber es wären dann doch nicht die Eigenschaften des Raumes, welche die Messung festgestellt hätten, sondern die Eigenschaften physikalischer Körper oder ihre Bewegungen. Also wären nach den Ergebnissen solcher Messungen nicht die Voraussetzungen über die Raumesetze zu ändern, sondern es wäre das einzig richtige Vorgehen, vielmehr über die Bewegungen der physikalischen Körper andere Aufstellungen als die bisherigen zu machen. Und zwar würde man, da wiederum die Gesetze der Mechanik fundamentaler sind als die der Optik, am ehesten die optischen Voraussetzungen zu ändern, etwa die Lichtfortpflanzung als nur annähernd, nicht exakt geradlinig anzunehmen haben. In jedem Fall würde durch geeignete physikalische Annahmen das Ergebnis der Messung sich mit den Voraussetzungen der Euklidischen Geometrie in Einklang bringen lassen.

Allerdings ist auch der Fall denkbar, daß gewisse durchgängig nach bestimmtem Gesetz von den bisherigen Annahmen abweichende physikalische Beziehungen sich am bequemsten durch Modifikation der geometrischen Voraussetzungen repräsentieren ließen. In der Macht der Rechnung liegt das eine wie das andere, und wenn der letztere Weg irgendwelche technischen Vorteile bietet, so wäre es ja töricht, ihn nicht zu benutzen. Aber über eine „wirklich“ nichteuklidische Beschaffenheit des Raumes wäre dadurch dennoch nicht entschieden. Durch bloßes Umrechnen kann einmal über Wirklichkeiten nichts ausgemacht werden. Über Wirklichkeit entscheidet Beobachtung und Experiment; aber der reine Raum der Geometrie ist eben keine Wirklichkeit, an die Beobachtung und Experiment überhaupt herankönnten. Er selbst unterliegt nicht empirischer Messung; er ist für jede Art empirischer Bestimmung schlechterdings unfind-

bar¹⁾, ein echtes Demokritëisches $\mu\eta\ \delta\upsilon$. Aber er ist nur um so mehr eine reine Denkgrundlegung, welche selbst erst Beobachtung und Experiment an ihrem Teile möglich macht, Voraussetzungen dafür schafft, die eben darum selbst nicht der Bestätigung oder Widerlegung durch Beobachtung und Experiment unterliegen können. In eben dieser seiner Funktion muß der Raum selbst nicht bloß überhaupt gesetzmäßig, sondern in dieser Gesetzmäßigkeit auch schlechthin eindeutig konstruiert werden; dieser Forderung aber genügen, wie gezeigt, nicht die Bestimmungen nichteuklidischer Räume, die zuletzt alles in unendlicher Unbestimmtheit zurücklassen würden, sondern ihr genügt allein, eben kraft seines Einzigkeitscharakters, der Euklidische Raum.²⁾

Vermag man von dem selbständigen Gesetzescharakter des Raumes sich auch etwa nicht aus allgemeinen, erkenntniskritischen Gründen zu überzeugen, doch müßte man zugeben, daß eine Entscheidung über die Raumgesetze durch Erfahrung aus dem eben besagten allgemeinen Grunde von Haus aus unmöglich ist: weil an sich jede physikalische Empirie mit jeder Geometrie durch geeignete Voraussetzungen rechnerisch in Einklang gebracht werden kann. Ist dem aber so, so muß hier entweder für immer alles unentschieden bleiben (wobei vielleicht die Mathematik, nicht

1) Vgl. Poincaré, [147] 86: „Die Experimente beziehen sich nicht auf den Raum, sondern auf die Körper.“ Vgl. oben S. 302, Anm. 1.

2) Dies ist neuerlich wieder durch M. C. Mott-Smith ([121], S. 189 u. ö.) betont worden. (Einiges in gleicher Richtung auch bei Russell [153] 78, 88; vgl. [128] 374.) Ich stimme mit Mott-Smith in der Kritik der Metaphysik der nichteuklidischen Geometrien vielfach überein und finde auch in seiner positiven (auf Kroman gestützten) Deutung Richtiges. Nur bleibt daneben die unhaltbare Hypothese einer auf besonderer subjektiver Organisation beruhenden „Zwangsläufigkeit“ unserer Anschauung (nach einem Ausdruck Wellsteins, [181] 143) als müßige und störende Annahme stehen.

aber Physik und Philosophie sich beruhigen könnten), oder die Entscheidung muß irgendwie nach Gründen *a priori* getroffen werden.

Und hier greift nun die sehr alte Beobachtung ein, daß es empirische Daten, welche die geometrischen Grundgebilde: Punkt, Gerade, Ebene adäquat darstellten, ein für allemal nicht gibt noch geben könnte. Man braucht gar nicht dem zu widersprechen, daß diese Begriffe dennoch aus empirischen Gegebenheiten durch einen Prozeß idealisierender Abstraktion herausgearbeitet sind; wie namentlich Benno Erdmann zu zeigen versucht und unter den Mathematikern der nichteuklidischen Geometrie Felix Klein als seine Ansicht ausgesprochen hat. Aber idealisierende Abstraktion ist nicht Induktion; die Korrektur der Erfahrung, die sie einschließt, würde in induktiver Wissenschaft schlechterdings unzulässig sein.¹⁾ Bei den alten Ägyptern war die Geometrie eine induktive Wissenschaft; aber sie war in wesentlichen Stücken falsch. Den Grund zur Geometrie als Wissenschaft haben die Griechen gelegt, indem sie den induktiven Weg bewußt verließen und ihre Begründung in reiner Deduktion suchten. Daß sie dabei gerade die „Euklidischen“ Voraussetzungen zugrunde legten, war, so wenig sie einen Beweis für die alleinige Zulässigkeit dieser Voraussetzungen zu führen auch nur versucht haben und so wenig dieser Beweis überhaupt geführt werden kann, dennoch nicht bloße Willkür. Sondern sie haben in der Sicherheit ihres wissenschaftlichen Instinkts genau die Voraussetzungen getroffen, die eine eindeutige Raumbestimmung allein möglich machen. Sie wußten ganz wohl, daß die Gleichheit, Geradheit usw. ihrer Voraussetzungen durch Erfahrung nicht gegeben war noch je gegeben werden konnte, daß es sich dabei vielmehr um echte und rechte Platonische „Ideen“ handelte, nach denen vielmehr Erfahrung sich

1) Auch dies betont mit Recht Mott-Smith.

richten muß, als sie nach der Erfahrung. Man bezeichnet sie jetzt oft als „Grenzbegriffe“¹⁾; z. B. der Punkt ist die Grenze der ins Unendliche abnehmenden Distanz. Aber diese Grenzen sind ebensowenig in Erfahrung gegeben wie Cantors Überendliches oder Veroneses aktuell Unendlichkleines. Solche Begriffe an die Stelle der empirischen Daten setzen und diese vielmehr ihnen unterwerfen, ist das volle Gegenteil davon, diese Begriffe aus der Erfahrung zu entnehmen, sie nach Erfahrung zu richten. Kant war also ganz im Rechte, wenn er behauptete, daß die Geometrie auf Voraussetzungen faktisch fuße und zu fußen gar nicht umhin könne, die nicht durch Erfahrung gegeben sind, sondern ihr vielmehr zugrunde gelegt werden müssen, indem sie es sind, welche eine Erfahrung als Wissenschaft überhaupt nur möglich machen. Nur, wie und in welchem Sinne sie sie „allererst möglich machen“, bedurfte einer strengeren Bestimmung, als Kant sie gegeben hat; für welche strengere Bestimmung übrigens, wie wir gesehen haben, fast alle Voraussetzungen bei Kant selbst mehr oder weniger bestimmt vorliegen.

§ 8. (*Josef Wellstein über die Grundlagen der Geometrie.*) Wenn wir aussprachen, daß an sich jede physikalische Empirie mit jeder Geometrie durch geeignete Grundannahmen in Einklang gebracht werden könne, so ist damit anerkannt, daß, abstrakt logisch und rechnerisch angesehen, nicht die Euklidische Geometrie die einzige ist, mit der eine Naturwissenschaft sich widerspruchlos aufbauen läßt.

Im letzteren Sinne hatte Kants These Wellstein sich gedeutet, dessen anregungsreiche Darlegung (181, bes. S. 129 ff.) schon darum unsere Beachtung fordert, weil sie sich tiefer, als es von Mathematikern sonst zu geschehen pflegt, in die Untersuchung auch der philosophischen Seite

1) So Max Simon z. B. [162], S. 21, mit öfterer Berufung auf B. Kerry [92].

unseres Problems einläßt. Die Frage der richtigen Interpretation der Kantischen Sätze darf hierbei um so mehr auf Seite gestellt werden, da Wellstein sichtlich bemüht ist, diesen Sätzen den günstigsten möglichen Sinn abzugewinnen.

Gesetzt es wäre unsere These, daß eine Physik überhaupt unter keinen anderen als den Euklidischen Voraussetzungen logisch und rechnerisch möglich sei, so würde dagegen mit vollem Recht eingewandt, was Wellstein eben unter dieser Voraussetzung einwendet: daß zwar, wenn es sich so verhielte, damit „eine Erkenntnis von ungeheurer Tiefe und gewaltiger Tragweite“ erreicht wäre; eine Erkenntnis, die weder aus der Erfahrung noch aus bloßen Begriffen geschöpft sein könnte, also eines ganz eigenen Quells bedürfte, den Kant mit dem Namen einer „Anschauung *a priori*“ nur etwa nicht rein und klar genug bezeichnet hätte; daß indessen das Faktum der mathematischen Naturwissenschaft, welches doch als letztentscheidende Instanz in einer solchen Frage gerade von Kant anerkannt wird, jene Annahme nicht bestätige. Vor allem sei die mathematische Naturwissenschaft bisher nicht zu einer so gesicherten Festlegung ihrer letzten Voraussetzungen gelangt, daß eine Aussage darüber heute möglich wäre, ob bestimmte Voraussetzungen, mit denen sie gegenwärtig überwiegend noch arbeitet, die für alle Zeit allein möglichen und zum Ziele führenden seien. Besonders zwischen der Physik des Ponderabelen und des Imponderabelen sei ein eindeutiger Zusammenhang bis dahin nicht hergestellt. Voraussetzungen, die auf dem einen Gebiet sich brauchbar erweisen, könnten für das andere überhaupt unbrauchbar oder wenigstens nicht die förderlichsten sein. Wellstein nähert sich nun aber in bemerkenswertem Maße der Einsicht, daß von Seiten der Physik eine Entscheidung über die Gültigkeit oder Ungültigkeit einer bestimmten Geometrie grundsätzlich unmöglich ist. Die Anwendbarkeit gleich-

viel welcher Geometrie auf die Physik nämlich erfordert in jedem Fall bestimmte physikalische Voraussetzungen; dabei zeigen sich im besonderen große Schwierigkeiten. Zunächst gibt es keine absolut starren Körper, die doch für jede direkte Messung im Raume die Voraussetzung wären. Sodann setzt die physikalische Messung auf große Entfernungen die Lichtfortpflanzung als absolut geradlinig, überhaupt in sich streng identisch voraus; ob sie es aber im absoluten Sinne ist, ob die Lichtfortpflanzungsbahn mit der Trägheitsbahn, die nach Definition als Euklidische Gerade angenommen wird, absolut identisch ist, läßt sich empirisch nicht ausmachen. Noch besondere, fast hoffnungslose Schwierigkeit macht die Wechselbeziehung zwischen Raum- und Zeitmessung, da die letztere selbst wieder nur auf räumlicher Grundlage möglich ist. Man hat als entscheidend die Tatsache ansehen wollen, daß die Parallelverschiebung eines starren Systems nur im Euklidischen Raum möglich sei. Aber auch diese wie jede andere auf den Euklidischen Raum bezogene Voraussetzung würde sich ohne Schwierigkeit auf irgendwelche nichteuklidischen Räume so umrechnen lassen, daß den Tatsachen nicht widersprochen wird. Weder die Starrheit noch die Parallelität muß oder darf überhaupt absolut verstanden werden. Ganz allgemein können Messungen im Raume nur innerhalb bestimmter Fehlergrenzen genau sein; sie sind nach oben wie nach unten nur im endlichen Bereich ausführbar; daher wird es stets möglich sein, die Tatsachen mit irgendeiner Geometrie dadurch in Einklang zu halten, daß die möglichen Abweichungen jenseits der Beobachtungsgrenzen fallen.

Im Zusammenhang dieser Erwägungen aber bekennt sich Wellstein allgemein mit einer Bestimmtheit, die man bei Mathematikern und Physikern nicht allzu häufig findet, zu den schroff idealistischen Sätzen: daß physikalische Tatsachen überhaupt nie im strengen Sinne „gegeben“, sondern stets nur Annahmen sind, und stets solche Voraussetzungen

einschließen, die wir, wenn auch von Beobachtungen geleitet, unsererseits zugrunde legen, um physikalische Tatsachen überhaupt erst bestimmbar zu machen (142). Die „wahren“ Tatsachen sind nicht Data, sondern das unendlich ferne Ziel der Forschung. Die „reinen“ Phänomene, die „exakten“ Gesetze sind nur Ideen und „werden immer Ideen bleiben“. Er folgert aber daraus: da die nichteuklidischen Voraussetzungen als „Ideen“ nicht weniger rein und streng sind als die Euklidischen, so haben sie an sich den gleichen Anspruch wie diese, der Naturwissenschaft zugrunde gelegt zu werden; das Vorrecht der Euklidischen Geometrie sei nicht prinzipiell, sondern nur historisch und etwa physiologisch-psychologisch oder auch durch die „Ökonomie des Denkens“ begründet. Eine „Zwangsläufigkeit unseres Geistes“, wie die Apriorität der Euklidischen Raumanschauung in Kants Sinn sie bedeuten würde, finde nicht statt; ihre Annahme sei bei Kant im Grunde nur ein „Erdenrest von Sensualismus“, der seinen sonst reinen und strengen Idealismus trübe.

Es müßte gelingen, mit einem so idealistisch gerichteten mathematischen Denker von einem Standpunkt aus zur Verständigung zu kommen, der nichts als die reinste Durchführung eben dieses Idealismus in der Prinzipienlehre der mathematischen Wissenschaften im Auge hat.

Über das Faktum besteht zwischen uns, und wohl heute überhaupt, keine tiefgehende Meinungsverschiedenheit mehr: alle Geometrien sind gleich denkmöglich, und jeder auf eine bestimmte Geometrie gestützte Ausdruck physikalischer Tatsachen würde sich auf jede andere Geometrie umrechnen lassen. Den technischen Nutzen dieser Verfügungsfreiheit über geometrische wie physikalische Voraussetzungen wird keiner, der sich mit diesen Dingen auch nur rezeptiv vertraut gemacht hat, heute mehr bestreiten wollen. Als denkmöglich aber hätte (wie Wellstein selbst zu bemerken nicht unterläßt) auch Kant die nichteuklidischen Geometrien

ruhig gelten lassen können, ebenso wie er die Denkmöglichkeit der Räume von mehr als drei Dimensionen bei Gelegenheit ausdrücklich anerkennt. Eine Anschauung *a priori* dagegen im Sinne einer Euklidischen „Zwangsläufigkeit unseres Geistes“ wäre (wie wir im Einklang mit der großen Mehrzahl der heutigen Vertreter der kritischen Methode schon lange anerkannt haben) ein einfacher Rückfall in die von Kant selbst in Hinsicht der reinen Verstandesbegriffe derb zurückgewiesene¹⁾ subjektivistische Begründung der Erkenntnis auf eine besondere Organisation unseres Geistes. Eine physiologisch-psychologische Präformation für den Euklid aber — die keinesfalls besteht — wäre wohl das Letzte, was wir an die Stelle des Kantischen Apriori der reinen Anschauung setzen würden. Die Denkökonomie endlich hat zwar ihr gutes Recht in der gesetzmäßigen Darstellung der Naturtatsachen im besonderen, aber sie kann nicht da entscheiden sollen, wo es sich um die Voraussetzungen handelt, die allein *a priori* heißen dürfen, nämlich die, welche überhaupt nur eine Naturwissenschaft möglich machen. Daß zu diesen eine zeit-räumliche Anordnung der Erscheinungen überhaupt gehört, kann nicht wohl zweifelhaft sein und wird der Sache nach auch von denen festgehalten, die es mit Worten bestreiten. Wunderlich aber wäre es nun doch, wenn hierüber zwar das Daß bestimmt, das Wie dagegen unendlich unbestimmt sein und bleiben sollte. Es wäre (so habe ich es früher einmal ausgedrückt), wie wenn ein Gesetzgeber bestimmt hätte, daß eine jede Sache als irgendjemandes Eigentum anzusehen sei, aber eine Festsetzung darüber zu treffen vergessen hätte, wessen Eigentum sie im Zweifelsfalle sei. Nun haben wir hier nicht über irgendeinen unbekanntem Weltgesetzgeber zu Gericht zu sitzen; es handelt sich um keine andere Gesetzgebung,

1) Kr. § 27, Prol. § 36, Anm. gegen Crusius (man könne dabei „niemals wissen, was der Geist der Wahrheit oder der Vater der Lügen uns eingeflößt haben möge“)

als die unserer Erkenntnis. Also träfe der Einwurf niemand anders als unser eigenes Denken; welches dann hoffentlich in sich gehen und auf bessere Konsequenz bedacht sein wird.

Nun scheint Wellstein die Einzigkeit der Zeit als aus transzendentalen Grunde feststehend anzuerkennen. Sie ergibt sich ihm, wie uns, als Veränderliche t , d. h. als eindimensionale Reihe von Stellziffern, welche die stetige Zahlreihe schlechthin einsinnig von $-\infty$ zu $+\infty$ durchläuft. Nun, im gleichen Sinne behaupten wir, daß der Raum für den rein begrifflichen Aufbau einer Mechanik als auf einzige Weise bestimmt zugrunde zu legen sei, aus keinem anderen als demselben transzendentalen Grunde, der für die Eindeutigkeit der Zeit entscheidet: weil nur so eine eindeutige Bestimmung der Bewegung und damit überhaupt irgendwelcher Veränderung in der Natur möglich wird. Die Gerade als das Grundgebilde des Raumes war aus eben diesem Grunde wiederum der stetigen, nur jetzt nicht einsinnig, sondern beidsinnig verstandenen Zahlreihe entsprechend anzusetzen; auf dieser Grundlage aber ergab sich mit logischem Zwang der ganze weitere Aufbau einer Geometrie Euklidischen Charakters, zunächst mit unbeschränkter Dimensionenzahl, für deren Beschränkung sich dann aber auch eine wiederum analoge Begründung aufweisen ließ. Die so sich ergebende „Notwendigkeit“ ist also nicht absolute Denknötwendigkeit, auch nicht subjektive Anschauungsnotwendigkeit, sondern die rein objektive Notwendigkeit der einzigen Bedingung eindeutiger Bestimmbarkeit zeiträumlicher Veränderung, die sonst, vom Standpunkt abstrakten Denkens und Rechnens ebenso wie vom Standpunkt bloßer Erfahrung, in absoluter Unbestimmtheit verbleiben müßte.

Darstellbar müssen ja die Vorgänge der Natur auch nach Wellsteins Voraussetzung im Euklidischen Raume sein, wenn sie es überhaupt in irgendeinem sind. Da sie es aber, abstrakt genommen, in jedem von unendlichfach-un-

endlichen Räumen konstanter oder beweglicher Verfassung sind, so würde in der Tat alles in unendlichfach-unendlicher Unbestimmtheit verbleiben, wenn nicht solche letzte Bestimmungsgesetze existierten, die nicht willkürlich, so oder so wählbar, oder auf Festlegung durch denkfremde Faktoren (Erfahrung) angewiesen sind — eine Festlegung, die, wie gezeigt, wohl überhaupt nicht möglich wäre, in keinem denkbaren Falle aber eine mehr als provisorische Gültigkeit beanspruchen könnte —, sondern die in sich so bestimmt sind, daß es durch sie möglich wird, bestimmt zu machen, was ohne sie in haltloser Unbestimmtheit verbleiben müßte.

Führt man in die rein mathematischen Voraussetzungen auch nur ein „Minimum von Denkfremdheit“ ein, reicht man dem Empirismus auch nur diesen kleinen Finger, so darf man sich nicht wundern, daß er gleich die ganze Hand nimmt. So ist es z. B. Russell [153] ergangen, der, von ursprünglich idealistischer Voraussetzung ausgehend und mit besserem Verständnis des Sinnes der transzendenten Methode, als etwa Helmholtz und Erdmann es in dieser Frage bewiesen haben, dennoch bei einem Empirismus endete, der über die Gesetze des Raumes die Entscheidung in der Erfahrung sucht. Nachdem aber allseitig klargelegt ist, daß Erfahrung hier ein- für allemal keine Entscheidung geben kann, daß wir die gesetzmäßige Darstellung der Erscheinungen, insoweit sie rein mathematisch ist, vollständig in der Hand haben, ist der Empirismus überhaupt keine mögliche Lösung mehr.

Auf alle Fälle aber wäre die empiristische Lösung unvereinbar mit dem klaren Idealismus, den wir Wellstein bekennen hörten. Man kann nicht gleichzeitig Kant den Erdenrest von Sensualismus, der seinen Idealismus noch trübe, zum Vorwurf machen, und dem heutigen (Neu-)Kantianismus anraten, der Empirie (in Sachen der Grundlegung der Mathematik!) doch etwas mehr Spielraum zu gewähren (Wellstein S. 132, Anm. 2). Man kann nicht

auf der einen Seite gegenüber Kant die strengere Durchführung des Idealismus fordern, auf der anderen aber (122) Gauß nachsprechen, man müsse „in Demut zugeben, daß, wenn die Zahl bloß unseres Geistes Produkt ist, der Raum auch außer unserem Geiste eine Realität hat, der wir *a priori* ihre Gesetze nicht vollständig vorschreiben können“. Zwar macht Wellstein hierbei den Vorbehalt, daß er für „Raum“ „Raumordnung“ setzt. Die Raumordnung des Empirischen ist natürlich Sache der Empirie; sie ist nicht bloß nicht vollständig, sondern gar nicht *a priori* bestimmbar. Aber nach ihr war hier gar nicht die Frage, sondern nach den Grundbestimmungen des reinen, geometrischen Raumes. Für diese aber auf eine Realität außer unserem Geiste zu verweisen, ist unter idealistischen Voraussetzungen schlechterdings unverständlich. Es wäre dies, wenn ein wertendes Prädikat hier überhaupt am Platze wäre, eine Hoffart menschlicher Erkenntnis und nicht Demut zu nennen. Man könnte uns ebensogut an Gott oder den Vater der Lügen (s. o. S. 322, Anm. 1) verweisen. Es gilt dann auch gleichviel, ob man von einer Organisation unseres Geistes spricht oder von Urbeschaffenheiten der Dinge an sich. Vom einen und von anderen wissen wir genau gleichviel, nämlich nichts.