



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn

Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften

Natorp, Paul

Leipzig [u.a.], 1910

§ 1. Die Grundreihe.

urn:nbn:de:hbz:466:1-35817

Drittes Kapitel.

Zahl und Rechnung.

§ 1. (*Die Grundreihe.*) Die Zahl stellt sich schon historisch dar als zugleich das reinste und das einfachste Gebilde des Denkens, welches die Wissenschaft als exakte begründet hat. An ihr hat von den Pythagoreern an die Logik der Wissenschaft sich orientiert, an ihr den Begriff der „reinen“ Erkenntnis zuerst gewonnen und immer neu befestigt. Sie gibt zugleich das erstaunlichste Beispiel für die unbeschränkte Entwicklungsmöglichkeit, die den reinen Urbegriffen des Denkens innewohnt. Daher würde sie das tiefste Interesse des Logikers auch dann fordern, wenn sonst aller Gebrauch, der von den Zahlen und Zeichen der Arithmetik und Algebra gemacht wird, ihn gleichgültig lassen dürfte.

Die erste Vorbedingung für das logische Verständnis der Zahl ist aber die Einsicht, daß man es bei ihr nicht irgend mit gegebenen Dingen zu tun hat, sondern mit reinen Gesetzmäßigkeiten des Denkens, das heißt mit reinen Grundbeziehungen, die nicht von den Dingen, auf die sie hernach Anwendung finden mögen, abhängen und an ihnen erst Bestand gewinnen, sondern an sich Bestand haben müssen, um bestandhafte Dinge mitaufbauen zu können. Die Zahl von den Dingen abzuleiten ist, wenn unter Ableiten Begründen verstanden wird, ein offener Zirkel. Denn die Begriffe von Dingen sind komplexe Begriffe, in die als einer der unerläßlichsten Bestandteile die Zahl miteingeht. Einzahl oder Mehrzahl oder sonst irgendeine Bestimmung

der Zahl kann von Dingen, die in Einzahl oder Mehrzahl usw. vorhanden sind, hinterher zwar abstrahiert werden, aber nur weil sie in deren Begriff voraus mitgesetzt war; unmöglich kann ihr Begriff in dieser Abstraktion erst seinen Ursprung haben.

Was heißt es aber, daß die Zahl ihren Ursprung im reinen Denken hat? Vom Denken als Tun oder psychologischem Vorgang hat die Logik nichts zu sagen. Dem Inhalte nach aber ist Denken: Setzen von Beziehung, nichts anderes. Beziehung fordert Termini; aber auch nicht diese gehen der Beziehung voran, sondern die Beziehung setzt auch erst die Termini. Nichts also als dies: das Setzen von Beziehung, mit welchem zugleich die Termini der Beziehung gesetzt werden, legen wir zugrunde. In jedem Fall muß alles, was hieraus folgt, an der Zahl sich darstellen, da die Zahlsetzung Setzung von Beziehung ist. Zeigt sich nun aber, daß dies allein genügt, um die Zahl mit allen ihren Gesetzen aufzubauen, so ist nach keiner ferneren Grundlage zu suchen. Es kann ja für das Denken nichts geben, das ursprünglicher wäre als es selbst, das Denken, das heißt das Setzen von Beziehung. Was man auch sonst als Grund der Zahl in Anspruch nehmen möchte, würde eben dies, das Beziehungsetzen, einschließen und kann als Grund der Zahl nur darum erscheinen, weil es den wahren Grund, das Beziehungsetzen, als Voraussetzung enthält.

Eine Beziehung nun fordert, wie gesagt, Bezugspunkte, Termini, und im ursprünglichen Fall deren zwei. Etwas wird zu Etwas in Beziehung gesetzt. Und die Termini unterscheiden sich: das, worauf Beziehung stattfindet, wird eben damit als das Vorhergehende, Frühere (*πρότερον*, *prius*), als Grundlage der Beziehung gedacht; es muß gesetzt sein, damit in Bezug auf es das Andere, somit als das jenem Folgende, Spätere (*ὕστερον*, *posterius*) gesetzt werden könne. Beziehung schließt also notwendig ein: Grundsetzung und Gegensatzung; Setzung des Einen, nicht als Absolutes, von

der Beziehung „Abgelöstes“, für sich Stehendes, sondern eben Bezugsgrundlage für ein Anderes: das Andere dieses Einen.

Das Verhältnis der beiden Termini, durch das sie in Beziehung stehen, schließt somit zugleich dies beides ein: Sonderung, ja Ausschließung (das Eine ist nicht das Andere, das Andere nicht das Eine; beide werden, eben als das Eine und das Andere, in geschiedene Denkpunkte gesetzt), und wiederum Vereinigung in einem Denkinhalt, denn Beziehen heißt: in einem Denken vereinigen.

Diese Vereinigung ist noch nicht sofort das, was den Begriff eines Ganzen oder Vereins (*totale, unio*) ausmacht, aber sie ist die hinreichende Bedingung für die Möglichkeit dieser neuen, den vorigen eng verknüpften Setzung des Denkens. In der Relation des Zusammen liegt noch dies Neue: daß die Zwei, sofern in Beziehung und zwar in eine Beziehung gesetzt, wiederum Eins sind, das heißt wiederum in einer neuen Beziehung dieselbe Funktion übernehmen können wie ein Terminus der ursprünglichen Beziehung; also das durch diese Beziehung geschaffene Ganze, der Verein der bezogenen Termini, kann wiederum Bezugsglied werden für eine neue Beziehung, kann wieder auf andere bezogen oder für andere Bezugsgrundlage werden.

So ergibt sich der Begriff eines neuen „Einen“, den ursprünglichen darin gleichartig, daß es selbst Terminus von Beziehung sein kann, aber darin von ihnen unterschieden, daß es eine Einheit aus anderen Einheiten darstellt, diese also als Bestandteile (Elemente) in sich vereint. Es sind aber genau nicht bloß zwei, sondern bisher drei Bedeutungen des „Einen“ zu unterscheiden:

1. das Eine gegenüber dem Anderen, im Unterschied von ihm; das in der jedesmaligen Beziehung Erstgesetzte;
2. das Eine in der abstrakten Bedeutung, in der das Andere auch wieder Eines ist, also der Begriff des Einen

unterschiedslos dem Einen in erster Bedeutung und allemal seinem Anderen zukommt;

3. das Eine aus jenen beiden, der Verein beider.¹⁾

Die zweite Bedeutung mag als die leerste erscheinen. Doch fordert die anscheinende Gleichgültigkeit der Einheit dieser Bedeutung gegen die Stellung als Grund- oder Gegenglied in der Relation, und ebenso als Element oder Verein aus Elementen, besondere Aufmerksamkeit. Wären die Termini unabhängig von der Relation überhaupt, das heißt absolut, so wäre diese Indifferenz freilich auch gegeben. Aber diese Absolutheit wurde schon als trügerisch erkannt; die Termini bestehen für das Denken überhaupt nur in der Relation und durch sie. Aber um solche zu sein, brauchen sie nicht mehr zu sein als Inhalte oder Setzungen des Denkens überhaupt, und als solche können sie ebensowohl Grundglied wie Gegenglied, Element wie Verein von Elementen sein. Doch damit ist der Kern des Problems noch nicht getroffen. Sondern das Gegenglied einer Relation kann, nicht in derselben, aber in einer neuen Relation, die Funktion des Grundglieds, das Grundglied nicht in derselben, aber in einer neuen Relation die des Gegenglieds, das Totale die des Elements, das Element die des Totale übernehmen. Sei eine Relation Q zu P gegeben, wo P das Grundglied, Q das Gegenglied sei, so kann in einer neuen Relation Q Grundglied werden, welches dann ein ferneres Glied als Gegenglied fordert, etwa R ; es kann andererseits P in einer neuen Relation als Gegenglied auftreten, welches dann ein ferneres Glied als Grundglied fordert, etwa O ; und das nicht, indem die ganze Reihe dieser Glieder (wie in unserer Bezeichnung das Alphabet) schon als gegeben angenommen wird, sondern indem sämtliche Glieder durch die immer gleichartig sich wiederholende

1) Diese drei Begriffe des Einen unterscheidet schon Plato, Parm. 153—154; vgl. „Platos Ideenlehre“ S. 252.

Beziehung erst gesetzt werden. So ergibt sich eine beiderseits offene Gliederreihe, etwa darzustellen durch eine Reihe

$$\dots \wedge | \wedge | \wedge | \wedge | \wedge | \wedge \dots,$$

worin jedes Einzelglied zugleich doppelter Beziehung (in unserer Darstellung vor- und rückwärts), nämlich als Grundglied zu einem Gegenglied oder Gegenglied zu einem Grundglied, fähig ist. Es kann ebenso irgendein Verein von Terminis als Terminus eines neuen, übergeordneten Vereins dienen, und umgekehrt ein Terminus eines gegebenen Vereins als Verein neuer, untergeordneter Terminis, und so unbeschränkt weiter, so daß wiederum jeder Terminus diese doppelte Beziehung: als Teil eines Ganzen oder Ganzes aus Teilen, zuläßt.

Noch etwas Weiteres schließt sich gleich hier an, das sich in der Folge wichtig erweisen wird. Eine gegebene Beziehung ist als solche in Gedanken umkehrbar, das heißt mit jeder Beziehung unter zwei Terminis sind in Wahrheit zwei Beziehungen gesetzt; jeder Beziehung Q zu P entspricht eine Beziehung P zu Q . Es ist z. B. schon eine Beziehung von P auf Q , daß P Grundglied ist zum Q als Gegenglied. Man darf hierbei nur nicht in den Mißverstand verfallen, als ob dasselbe in einer und derselben Relation zugleich Grund- und Gegenglied sein könne; sondern die Beziehung ist allemal eine neue, in der das Gegenglied einer erstgesetzten Beziehung Grundglied, das Grundglied Gegenglied wird. Aber wo immer die eine Beziehung stattfindet, findet auch die andere statt, und wegen dieses ständigen Zusammengehens der zueinander reziproken Beziehungen bezeichnet man kürzshalber diese doppelte Beziehung als eine, gleichzeitig doppelt gerichtete, etwa so wie man in der Geometrie den Plus- und Minus-Sinn in den Begriff einer einzigen „Richtung“ zusammenfaßt.

Das Gemeinsame in beiden zuletzt betrachteten Fällen ist, daß dieselbe gedankliche Setzung als Ausgangs- und

als Bezugsglied, als Teil und als Ganzes fungieren kann; stets aber nicht in einer und derselben, sondern in verschiedener Relation. Dies erklärt den Schein einer absoluten Unabhängigkeit der Termini von der Relation. Die scheinbare Bezugslosigkeit ist in Wahrheit doppelte, überhaupt mehrfache Beziehbarkeit, die daher rührt, daß durch irgendeine Beziehung sofort weitere Beziehungen mitgesetzt werden und so das Gebiet des Denkens wie durch Selbsterzeugung sich ständig erweitert. Im ersten der eben betrachteten Fälle entstanden die verschiedenen Relationen durch Nacheinanderlegen der gleichen Beziehung auch in der gleichen Beziehungsrichtung, im zweiten Fall durch Umkehren der Beziehungsrichtung.

Auf diesen Grundlagen lassen sich nun schon einige einfachste Grundeigenschaften der Zahl ableiten.

§ 2. (*Ordnungszahl und Anzahl.*) Unsere Reihe enthält zunächst die Voraussetzungen für zwei Hauptfunktionen, die an der Zahl wohl zu unterscheiden sind, die Funktionen der Ordnungsbestimmung und der Bestimmung des Wieviel, oder Ordnungszahl und Anzahl.

Daß dies beides begrifflich verschieden, ist ebenso klar wie daß mit jeder dieser Arten der Zahlsetzung die Möglichkeit für die andere zugleich gegeben ist. Zunächst der Unterschied: das Erste, Zweite usw. existiert in einer und derselben von einem bestimmten Gliede an gerechneten Reihe nur je einmal; dagegen ist jedes von diesen der Anzahl nach Eines, ein beliebiges von ihnen mit einem beliebigen anderen zusammen sind zwei usw., also die Anzahlen 1, 2 usw. existieren in derselben Reihe unendlich vielmal. Ferner in den Zwei ist das Eins (der Anzahl nach), in den Drei sind die Zwei und ist das Eins eingeschlossen usw.; dagegen steht das Zweite dem Ersten, das Dritte dem Zweiten und Ersten usf. (sowie umgekehrt) ausschließend gegenüber. Indessen wo ein Erstes, da gibt es notwendig