Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften

Natorp, Paul

Leipzig [u.a.], 1910

§ 2. Ordnungszahl und Anzahl.

urn:nbn:de:hbz:466:1-35817

als Bezugsglied, als Teil und als Ganzes fungieren kann; stets aber nicht in einer und derselben, sondern in verschiedener Relation. Dies erklärt den Schein einer absoluten Unabhängigkeit der Termini von der Relation. Die scheinbare Bezugslosigkeit ist in Wahrheit doppelte, überhaupt mehrfache Beziehbarkeit, die daher rührt, daß durch irgendeine Beziehung sofort weitere Beziehungen mitgesetzt werden und so das Gebiet des Denkens wie durch Selbsterzeugung sich ständig erweitert. Im ersten der eben betrachteten Fälle entstanden die verschiedenen Relationen durch Nocheinmalsetzen der gleichen Beziehung auch in der gleichen Beziehungsrichtung, im zweiten Fall durch Umkehren der Beziehungsrichtung.

Auf diesen Grundlagen lassen sich nun schon einige einfachste Grundeigenschaften der Zahl ableiten.

§ 2. (*Ordnungszahl und Anzahl.*) Unsere Reihe enthält zunächst die Voraussetzungen für zwei Hauptfunktionen, die an der Zahl wohl zu unterscheiden sind, die Funktionen der Ordnungsbestimmung und der Bestimmung des Wieviel, oder O r d n u n g s z a h l und A n z a h l.

Daß dies beides begrifflich verschieden, ist ebenso klar wie daß mit jeder dieser Arten der Zahlsetzung die Möglichkeit für die andere zugleich gegeben ist. Zunächst der Unterschied: das Erste, Zweite usw. existiert in einer und derselben von einem bestimmten Gliede an gerechneten Reihe nur je einmal; dagegen ist jedes von diesen der Anzahl nach Eines, ein beliebiges von ihnen mit einem beliebigen anderen zusammen sind zwei usw., also die Anzahlen 1, 2 usw. existieren in derselben Reihe unendlich vielmal. Ferner in den Zwei ist das Eins (der Anzahl nach), in den Drei sind die Zwei und ist das Eins eingeschlossen usw.; dagegen steht das Zweite dem Ersten, das Dritte dem Zweiten und Ersten usf. (sowie umgekehrt) ausschließend gegenüber. Indessen wo ein Erstes, da gibt es notwendig auch der Zahl nach Eines; es ist ja eben ein Erstes, nur eines; und wo ein Zweites, da gibt es (weil jedenfalls auch ein Erstes) notwendig Zwei, wo ein Drittes, auch Drei, weil ja auch ein Erstes und Zweites; und umgekehrt: wo Eines, da ist dieses zugleich das Erste; wo Zwei, da gibt es, in jeder beliebigen Anordnung, ein Erstes und Zweites, wo Drei, ein Erstes, Zweites und Drittes usf.

Man sagt wohl: die Anzahl, zum Beispiel Drei, sei von der Reihenfolge unabhängig; drei bleiben drei, gleichviel was als erstes, zweites, drittes gesetzt wird. Das ist richtig, wenn man von zu zählenden Dingen ausgeht. Aber es ist hier gar nicht zu fragen nach Dingen, die als 1, 2 oder 3, oder als 1. 2. oder 3. gezählt würden, sondern rein nach diesen Setzungsweisen selbst, als 1, 2, 3 oder als 1. 2. 3., und deren Gesetz. Da aber ist notwendig, sobald die Sonderung und Gegenüberstellung der Einzelglieder ins Auge gefaßt wird, allemal Eines das Erste, Eines das diesem Folgende d. i. Zweite, Eines das wieder diesem Folgende d. i. Dritte usf.; also es besteht notwendig die Folge des 1. 2. 3. usf., wo immer 1, 2, 3 usf. gesetzt sind. Und ebenso gilt das Umgekehrte.

Man glaubt die Anzahl unabhängig von der Ordnungsbeziehung aufzustellen auf Grund der „ein-eindeutigen Entsprechung“ unter den Elementen je zweier Klassen (Inbegriffe, Mengen, Mannigfaltigkeiten). Die hohe Bedeutung, welche dem Begriff der Zuordnung innewohnt, daß nämlich dadurch endliche und unendliche Mengen von Anfang an unter einen Gesichtspunkt gebracht werden, ist unbestritten und unbestreitbar; es wird im nächsten Kapitel davon zu reden sein. Auch ist richtig, daß die ein-eindeutige Entsprechung nicht eine voraus feststehende Reihenordnung jeder der verglichenen Mengen verlangt. Aber diese Entsprechung ist gar nicht vollziehbar, ohne daß eben damit eine Reihenordnung hergestellt wird. Mit allem Grund spricht man von Zu-ordnung, worin schon die Unumgänglichkeit der Befolgung einer Ordnung, wofern die durchgängige, kein Glied auslassende Entsprechung vollzogen und gewiß werden soll, sich ausdrückt. Es sind also die Momente der Anzahl und Reihenfolge allerdings begrifflich scharf auseinanderzuhalten; aber ein Irrtum wäre es, daß die Erkenntnis der einen sich vollziehen ließe, ohne daß die Erkenntnis der anderen, wenigstens der Grundlage nach, zugleich damit vollzogen würde. Man setzt eben tatsächlich und unvermeidlich, indem man je Eines je Einem entsprechen läßt, die Einzelglieder auseinander, und zwar in einer Folge, ohne deren Innehaltung die Vergewisserung, daß kein Glied ausgelassen und keines mehrfach gesetzt ist, unmöglich wäre. Das auf jeder Stufe schon Gezählte ist eben damit das Voraufgehende, das noch nicht Gezählte das Nachfolgende, und ohne solchen stufenmäßigen Fortgang ist die ein-eindeutige Entsprechung nicht in Gedanken vollziehbar, also nicht erkennbar. Diese Betrachtung gilt natürlich auch für unendliche Mengen, z. B. für die Zuordnung zwischen den ganzen positiven und den geraden Zahlen. Man muß die ersteren, und damit auch die letzteren, indem jeder ganzen Zahl ihr Doppeltes entsprechend gesetzt wird, um sie in ihrer Allheit zu denken nach irgendeinem System, (dem Dezimalsystem oder einem anderen) der Reihe nach gesetzt denken.

Nach dem allen ist es ein unfruchtbarer Streit, welche von beiden Funktionen der Zahl die ursprüngliche, welche von der anderen abhängig und bloß folgeweise durch sie mitgesetzt sei. Die Wahrheit ist, daß beide zueinander streng korrelativ sind. Gewiß, wenn ich nicht Drei habe, habe ich auch kein Drittes. Aber auch mit dem Dritten werden die Drei erst fertig. Sobald man sich die Zahl im Entstehen denkt, tritt notwendig die Funktion der Aufeinanderfolge (das Aristotelische „Früher und Später“) voran; läßt man sie fertig sein, geht man vollends von Mengen vorhandener Dinge aus, so erscheint die Aufeinanderfolge gleichgültig und sekundär. Genau um diesen Unterschied des genetischen und ontischen Sinnes der Denksetzung handelt es sich. Wir erklären: beide sind berechtigt und beide sind notwendig. Die Denkbewegung aber, das Denkverfahren, das Procedere ordnet sich — dafür dürfen wir uns jetzt einfach auf das Ergebnis der beiden vorigen Kapitel berufen — in letztem Betracht notwendig über jeder Art des Denkens, die beim fertigen Sein zum Stillstand gekommen ist. Vor allem: der Prozeß allein begründet die Kontinuität; die Kontinuität des Denkens aber ist, wie wir uns überzeugten, das Letzte, worauf alles Fragen schließlich zurückgeht. Nur um sie selbst aufzuhellen und zu scharf bestimmtem Begriff zu bringen, ist allerdings der Denkstillstand ebenso notwendig, der in dem Kontinuum die Diskretion vollzieht.

In dem dreistufigen Gange des synthetischen Prozesses, wie wir im vorigen Kapitel ihn konstruiert haben, vertritt die erste und dritte Stufe vorzugweise die Diskretion, obgleich immer in Rückbeziehung auf die Kontinuität des Denkens; die zweite vorzugsweise den Denkfortschritt, obgleich immer als Fortschritt von Denkpunkt zu Denkpunkt. Nur für einen Augenblick kann es paradox erscheinen, daß in der Fortschreitung, die doch die Glieder auseinanderstellt, die Kontinuität, in dem Anhalt des Denkens dagegen, in dem das vorher Auseinandertretende sich erst zusammenschließt, die Diskretion sich darstelle. Denn es ist klar, daß in letztem Betracht Kontinuität nur der Bewegung des Denkens zukommen kann, Diskretion ein Anhalten beim jedesmal erreichten Punkt verlangt. Erst in sekundärer Betrachtung sind gerade im Fortschreiten die Einschnitte, gleichsam die Meilensteile zu beachten, an denen die Fortschreitung selbst zur Bestimmung kommt, und wird umgekehrt beim Anhalt, weil er den Sinn des Rückblicks auf den vollzogenen Denkfortschritt und der Bergung des dadurch Gewonnenen erhält, innerhalb der jedesmal gesetzten Grenzen der kontinuierliche Zusammenhang des Ganzen zu einem vorzüglich wichtigen Moment. Es soll ja allemal die dritte Stufe des Prozesses die erste und zweite in sich vereinigen; die erste Stufe aber vertritt am reinsten die Sonderung, die zweite den Übergang und damit die Kontinuität des Denkprozesses, die dritte also die Vereinigung von Sonderung und Kontinuität. Der Zusammenschluß soll ja nicht Abschluß sein im Sinne des *Ne plus ultra*, sondern gerade im Sinne des *Plus ultra*; es ist ein Anhalten, nur um weiterzuschreiten; der Endpunkt wird zugleich Punkt des Übergangs. Der Unterschied der zweiten und dritten Stufe des Prozesses aber ist das Fundament für den Unterschied der beiden Funktionen der Zahl als Ordnungszahl und Anzahl. Die Anzahl wird so zugleich Maßzahl, die Zahl das Bestimmungsmittel der Größe.

So wird es ganz klar, daß diese beiden Funktionen der Zahl, so eng sie, und in beiden die Momente der Diskretion und der Kontinuität, miteinander verflochten sind, doch dem Begriff nach immer deutlich geschieden bleiben. Der Unterschied ist kein geringerer als der zwischen Zeit und Raum, der, wie sich künftig zeigen wird, auf nichts als diesem letzten Unterschied der beiden Grundmomente des Denkens: Sonderung und Vereinigung (Sonderung des zugleich zu Vereinigenden, Vereinigung des zugleich zu Sondernden) beruht. Die Aufeinanderfolge in der Zahl, das Aristotelische πρότερον καὶ ὕστερον (Vor und Nach, oder Nacheinander) ist darum noch nicht die Zeitfolge; aber es ist an der reinen Zahl der Ausdruck desselben fundamentalen Merkmals jedes Denkprozesses, welches in anderer, hier uns noch nicht angehender Entwicklung des reinen Denkens (oder des Prozesses der synthetischen Einheit) die zeitliche Setzung begründet. Ebensowenig ist die Zahl als Inbegriff (Totale) schon räumliche Vereinigung; aber sie drückt an der reinen Zahl (die der räumlichen ebenso wie der zeitlichen Setzung logisch voraufgeht) dasselbe fundamentale Merkmal des Denkprozesses aus, das in jener anderen Entwicklung des Denkens die räumliche Setzung begründen wird. So behält der Widerspruch vieler Mathematiker gegen die Ansicht, daß die Zahl die „Anschauung" von Zeit oder Raum (oder beider) zur Voraussetzung habe, völlig recht, und wird doch auch das gesunde Motiv dieser Meinung klar, der nicht bloß Kant gehuldigt hat, sondern an der nicht wenige bedeutende Mathematiker bis heute, auch unabhängig von Kant, festhalten.

§ 3. (*Kritische Anmerkung*). Der regelmäßige Fehler der Grunddefinitionen der Zahl, wie man sie bei den Arithmetikern findet, besteht darin, daß man von gegebenen Mengen von Dingen ausgeht. Nur beispielsweise nenne ich die Arithmetik von Stolz (1885), die vielleicht als Ausdruck der herrschenden Meinung der Mathematiker über diesen Punkt — oder dessen, was bis vor nicht langer Zeit die herrschende Meinung war — angesehen werden darf. Er definiert: Zwei Vielheiten heißen einander gleich, wenn sich jedem Dinge der ersteren je eines der letzteren zuordnen läßt und keines von dieser unverbunden bleibt; wobei besonders bewiesen wird, daß die Reihenfolge, in der man die Glieder einer jeden der verglichenen Vielheiten je einem der anderen Vielheit zuordnet, für das Ergebnis (Gleichheit oder Ungleichheit) gleichgültig ist.

Aber indem man Vielheiten von „Dingen" vergleicht, fällt man aus der Betrachtung des reinen Denkverfahrens schon heraus. Es wären statt Vielheiten von Dingen vielmehr Folgen von Setzungen und zwar beziehentlichen Setzungen zu vergleichen. Dann sind aber die Einzelglieder durch nichts mehr unterscheidbar als durch die Reihenfolge, in der sie gesetzt werden. Zähle ich Dinge, z. B. die Fenster eines Saales, so sind diese noch durch irgendwelche sonstigen Merkmale unterschieden; z. B. eins liegt gegen Osten, eins gegen Westen, die anderen, in der und der