Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften

Natorp, Paul

Leipzig [u.a.], 1910

§ 3. Kritische Anmerkung.

urn:nbn:de:hbz:466:1-35817

mentale Merkmal des Denkprozesses aus, das in jener anderen Entwicklung des Denkens die räumliche Setzung begründen wird. So behält der Widerspruch vieler Mathematiker gegen die Ansicht, daß die Zahl die „Anschauung" von Zeit oder Raum (oder beider) zur Voraussetzung habe, völlig recht, und wird doch auch das gesunde Motiv dieser Meinung klar, der nicht bloß Kant gehuldigt hat, sondern an der nicht wenige bedeutende Mathematiker bis heute, auch unabhängig von Kant, festhalten.

§ 3. (*Kritische Anmerkung*). Der regelmäßige Fehler der Grunddefinitionen der Zahl, wie man sie bei den Arithmetikern findet, besteht darin, daß man von gegebenen Mengen von Dingen ausgeht. Nur beispielsweise nenne ich die Arithmetik von Stolz (1885), die vielleicht als Ausdruck der herrschenden Meinung der Mathematiker über diesen Punkt — oder dessen, was bis vor nicht langer Zeit die herrschende Meinung war — angesehen werden darf. Er definiert: Zwei Vielheiten heißen einander gleich, wenn sich jedem Dinge der ersteren je eines der letzteren zuordnen läßt und keines von dieser unverbunden bleibt; wobei besonders bewiesen wird, daß die Reihenfolge, in der man die Glieder einer jeden der verglichenen Vielheiten je einem der anderen Vielheit zuordnet, für das Ergebnis (Gleichheit oder Ungleichheit) gleichgültig ist.

Aber indem man Vielheiten von „Dingen" vergleicht, fällt man aus der Betrachtung des reinen Denkverfahrens schon heraus. Es wären statt Vielheiten von Dingen vielmehr Folgen von Setzungen und zwar beziehentlichen Setzungen zu vergleichen. Dann sind aber die Einzelglieder durch nichts mehr unterscheidbar als durch die Reihenfolge, in der sie gesetzt werden. Zähle ich Dinge, z. B. die Fenster eines Saales, so sind diese noch durch irgendwelche sonstigen Merkmale unterschieden; z. B. eins liegt gegen Osten, eins gegen Westen, die anderen, in der und der

Aufeinanderfolge, dazwischen. Aber das reine Verfahren der Zählung weiß von solchen Unterschieden nichts, darf nichts davon wissen, es kennt nur Eins, Eins, Eins usf. und kann unter diesen nicht anders unterscheiden als nach der Folge, in der sie gesetzt werden: Eines als Ausgangsglied, Eines diesem zunächst, Eines wiederum diesem usf. Es kann also in verschiedenen Zählungen — sofern solche überhaupt zulässig sind — immer nur das erste Glied dem ersten, das zweite dem zweiten usf. entsprechen. So bleibt für einen Beweis der Gleichgültigkeit der Reihenfolge für die Anzahl überhaupt kein Raum; die Identität der Anzahl der Glieder bis zum jedesmaligen Schlußglied (dieses eingeschlossen) ist ohne weiteres gegeben.

Vielleicht denkt man, auch wenn die Glieder verschiedener Reihen bloß durch die Stelle in der Reihe unterschieden werden, könne man doch etwa das erstgezählte einer Reihe z. B. von drei Gliedern dem drittgezählten der zweiten, das zweite der ersten dem ersten der zweiten zuordnen, wo dann zu beweisen bleibe, daß das drittgezählte der ersten Reihe nun notwendig dem zweitgezählten der zweiten zufällt und kein Glied der anderen Reihe mehr übrig bleibt. Aber das ist leerer Schein. Indem ich die Ordnung der Glieder der zweiten Reihe verändere, mache ich das vorher dritte Glied zum ersten, das vorher erste zum zweiten, und damit das vorher zweite zum dritten, und so entsprechen sich wieder richtig das erste und erste, zweite und zweite, dritte und dritte Glied eben dieser Zählungen. Das Glied, das ich zuerst in Vergleichung ziehe, ist eben damit das erste, da nur nach der Reihenfolge dieser meiner Setzungen hier die Frage ist.

So kann man gar nicht dazu kommen einen Satz aufzustellen: „Die Anzahl ist unabhängig von der Reihenfolge der Glieder", solange man rein mit dem Zählverfahren selbst, nicht mit abzuzählenden Dingen zu tun hat. Im Zählverfahren selbst und durch es ist die Folge der Glieder bestimmt und wird nur dadurch der Inbegriff oder Verein der Einzelglieder bestimmbar, daß die Reihenfolge es ist. Es ist nichts wesentlich anderes, was ich auf solche Art bestimme, nur daß ich das eine Mal das letzte Glied, stets aber im Verhältnis zu allen vorausgegangenen, das andere Mal die Gesamtheit der Glieder bis zu diesem letzten, dieses eingeschlossen, ins Auge fasse. Es bleibt immer ein Unterschied der Betrachtungsweise, aber beide Betrachtungsweisen entsprechen sich genau und gehen streng miteinander. Deshalb findet auch die Arithmetik wenigstens der endlichen Zahlen keine Veranlassung, Ordnungszahl und Anzahl gesondert zu behandeln.

Der Fehler ist aber bei den Arithmetikern fast durchgehend, daß man, statt von der Zahl, von zu zählenden Dingen spricht. Dieser Fehler wiederholt sich in der seltsamen Forderung der Gleichartigkeit oder Abstraktion von den qualitativen Verschiedenheiten der zu zählenden Dinge. Wie sind es überhaupt noch „Dinge", wenn von aller Verschiedenheit abgesehen wird? Man wird vielleicht sagen, es bleibe als unterscheidend die Stelle in Zeit oder Raum. Aber auch Zeit und Raum dürfen nicht vorausgesetzt werden, wenn nach den Gesetzen der reinen Zahl die Frage ist; denn umgekehrt sind Zeit und Raum nicht ohne die Voraussetzung der Zahl erklärbar. Nicht Gleichartigkeit ist zu fordern, sondern jede Nachfrage nach qualitativer Gleichheit oder Verschiedenheit des Gezählten, weil überhaupt nach dem Gezählten, ist bestimmt auf Seite zu stellen. Gleichartig sind die reinen Setzungen unserer Grundreihe, sofern sie nichts als die Setzung überhaupt vertreten, bei der von gar keiner anderen Verschiedenheit, als daß sie eben eine, eine andere und wieder eine andere sind, die Rede ist und sein darf. Diese Gleichartigkeit genügt, nach keiner anderen ist überhaupt zu fragen, wenn nach der Zahl die Frage ist und nicht nach dem Gezählten.

In dieser Grundvoraussetzung treffe ich besonders mit

G. F. Lipps [*105, 106*] zusammen. Er legt, ähnlich wie wir, eine Normalreihe zugrunde, d. h. eine Reihe fixierter Zeichen, deren Glieder lediglich „Träger von Merkmalen der Reihenform" sind; welche also rein das Verfahren der Zählung und was aus diesem folgt, nichts darüber, vor allem keinerlei Merkmale zählbarer Dinge darstellt. Dieser Reihe schreibt er die folgenden Eigenschaften zu:

1. Notwendigkeit und Allgemeingültigkeit. — Diese folgt für uns aus der rein logischen Begründung und also reinen Methodenbedeutung der Zahl.

2. Einzigkeit. — In der Tat, da unsere Reihe nur der Ausdruck des Zählverfahrens, das Verfahren als solches aber nur in der Einzahl vorhanden ist, so ist unsere Reihe selbst (vielmehr das, was sie bezeichnet) nur einfach existierend zu denken.

3. Sie geht aus von einem Anfangsglied, ist dagegen ins Unendliche fortsetzbar, weil Ausdruck des immer gleichen, stets wieder zur Verfügung stehenden Verfahrens der Setzung des Anderen zum Einen. — Für uns ergab sich sofort die beiderseitige Unendlichkeit. Es gibt kein absolutes Anfangsglied, sondern man kann von jedem Glied anfangen und dann vor- und rückwärts schreiten.

4. Alle Glieder sind gleichwertig (äquivalent), denn sie sind durch nichts als ihre Stelle verschieden. — Aber man wird sie nicht ohne weiteres „vertauschbar" nennen dürfen. Die Vertauschbarkeit hat wohl einen Sinn, der aber nicht primär ist. Zunächst ist es vielmehr die ganze Funktion jedes Einzelgliedes der Reihe, eine Stelle, unvertauschbar mit jeder anderen, zu bestimmen. Sie austauschen zu wollen, würde voraussetzen, daß sie noch etwas anderes als Stellzeichen wären. Aber etwas anderes sind sie für uns bis dahin nicht.

5. Die Reihe ist homogen, d. h. sie besitzt kein ausgezeichnetes Glied außer dem Anfangsglied. — Diese Ausnahmestellung wäre bedenklich; sie besteht für uns von

Anfang an nicht, da wir kein absolutes Anfangsglied anerkennen.

6. Jedes Glied involviert die ganze Reihe, denn das Verfahren ist, als gesetzmäßiges, von seinem Anfang an, und so von jedem beliebigen Glied rückwärts bis zum Anfangsglied und vorwärts ins Unendliche bestimmt. — Wir haben statt dessen zu sagen: rückwärts und vorwärts ins Unendliche, da das Verfahren nicht bloß von seinem (etwa absoluten) Anfang, sondern von jedem (willkürlich wählbaren, also relativen) Anfang an rückwärts und vorwärts bestimmt ist.

Die Sonderstellung der Eins ist es also, welche die Aufstellung von Lipps von der unsrigen unterscheidet. Dieser und im engen Zusammenhang damit der ganz eigenartige arithmetische Begriff der Null fordert aber überhaupt noch eine besondere Betrachtung, mit der zugleich der Aufbau der gebräuchlichen Zahlreihe und die Erklärung der gewöhnlichen Rechnungsarten sich füglich einleiten läßt.

§ 4. (*Die Null und die Eins. Der Ableitungsversuch Freges.*) Fast jeder bisherige Versuch eines logischen Aufbaues der Zahlgesetze ging von dem Fundamente der Zahleinheit aus. Überaus selten aber findet sich auch nur ein Ansatz dazu, für diesen Begriff selbst eine zwingende logische Begründung zu geben. Geradezu der einzige ernstere Versuch einer solchen Begründung ist der von G. Frege, den Russell und Couturat im wesentlichen reproduzieren. Mit und vor der Eins aber will Frege die Null begründen. Der Versuch ist scharfsinnig und auch, wenn er nicht geglückt sein sollte, der Prüfung wohl wert.

Die Schrift Freges: „Die Grundlagen der Arithmetik", ausdrücklich als logisch-mathematische Untersuchung bezeichnet, hat beträchtliche, von den Logikern der Mathematik nicht sogleich nach Gebühr gewürdigte Verdienste. Sehr treffend ist vor allem die Widerlegung der von J. Stuart Mill versuchten Begründung der Zahl auf In-