



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn

Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften

Natorp, Paul

Leipzig [u.a.], 1910

§ 4. Die Null und die Eins. Der Ableitungsversuch Freges.

urn:nbn:de:hbz:466:1-35817

Anfang an nicht, da wir kein absolutes Anfangsglied anerkennen.

6. Jedes Glied involviert die ganze Reihe, denn das Verfahren ist, als gesetzmäßiges, von seinem Anfang an, und so von jedem beliebigen Glied rückwärts bis zum Anfangsglied und vorwärts ins Unendliche bestimmt. — Wir haben statt dessen zu sagen: rückwärts und vorwärts ins Unendliche, da das Verfahren nicht bloß von seinem (etwa absoluten) Anfang, sondern von jedem (willkürlich wählbaren, also relativen) Anfang an rückwärts und vorwärts bestimmt ist.

Die Sonderstellung der Eins ist es also, welche die Aufstellung von Lipps von der unsrigen unterscheidet. Dieser und im engen Zusammenhang damit der ganz eigenartige arithmetische Begriff der Null fordert aber überhaupt noch eine besondere Betrachtung, mit der zugleich der Aufbau der gebräuchlichen Zahlreihe und die Erklärung der gewöhnlichen Rechnungsarten sich füglich einleiten läßt.

§ 4. (*Die Null und die Eins. Der Ableitungsversuch Freges.*) Fast jeder bisherige Versuch eines logischen Aufbaues der Zahlgesetze ging von dem Fundamente der Zahleinheit aus. Überaus selten aber findet sich auch nur ein Ansatz dazu, für diesen Begriff selbst eine zwingende logische Begründung zu geben. Geradezu der einzige ernstere Versuch einer solchen Begründung ist der von G. Frege, den Russell und Couturat im wesentlichen reproduzieren. Mit und vor der Eins aber will Frege die Null begründen. Der Versuch ist scharfsinnig und auch, wenn er nicht geglückt sein sollte, der Prüfung wohl wert.

Die Schrift Freges: „Die Grundlagen der Arithmetik“, ausdrücklich als logisch-mathematische Untersuchung bezeichnet, hat beträchtliche, von den Logikern der Mathematik nicht sogleich nach Gebühr gewürdigte Verdienste. Sehr treffend ist vor allem die Widerlegung der von J. Stuart Mill versuchten Begründung der Zahl auf In-

duktion, die Abwehr überhaupt jeder Herleitung der Zahl aus Eigenschaften zu zählender Dinge; nicht minder treffend die Ablehnung der unklaren Begründung auf „Anschauung“, der entschlossene Rückgang allein auf die eigenen Gesetze des Denkens, der „Idee“; die Zurückweisung aber auch eines Formalismus, der „so tut, als ob Forderung schon Erfüllung wäre“, indem er z. B. fordert, daß Subtraktion, Division, Radizierung immer ausführbar sei, und damit dann genug getan zu haben glaubt. „Warum fordert man nicht auch, daß durch beliebige drei Punkte eine Gerade gezogen werden kann?“ Daß Frege den Aufstellungen Kants nicht voll gerecht wird, ist dem Mathematiker nicht zu verargen, vielmehr anzuerkennen, daß er dabei teilweise im Recht ist oder Richtiges wenigstens im Sinne hat. So lehnt er das „synthetische Urteil a priori“ zwar ab, aber indem er, nach Kantischen Worterklärungen nicht ganz ohne Berechtigung, unter Synthesis Vereinigung eines sinnlich gegebenen Mannigfaltigen versteht. Aber nach Kants definitiver Festsetzung ist die Synthesis gerade die Urfunktion des Denkens; also ergibt sich die hier freilich notwendige Korrektur aus dem richtigeren und entscheidenden Ansatz bei Kant selbst. Frege seinerseits behauptet, daß das arithmetische Urteil „analytisch“ sei, will aber damit ersichtlich nur sagen, daß es reine Denkleistung sei; aber nicht bloß „erläuternd“, sondern „erweiternd“. Die Folgerungen, sagt er (S. 101), sind „in der Definition enthalten, aber wie die Pflanze im Samen, nicht wie der Balken im Hause“. Nun, diese Entwicklung wie der Pflanze aus dem Samen (der doch nicht die Pflanze ist), genau dies ist es, was in Kants Sprache Synthesis heißt. Und daß Frege wirklich (in Kants Sinn) synthetische Urteile meint, bestätigt im besonderen vieles, so die Bemerkung gegen Mill (S. 31): Zwei und ein Paar seien keineswegs dasselbe, wie Mill sonderbarerweise zu glauben scheine. Das heißt in Kants Sprache: das Additionsurteil ist synthetisch. Zwei Einer „sind“ ein Zweier, nicht

als ob die Begriffe identisch oder der zweite aus dem ersten analytisch herauszuholen wäre, sondern sie sind äquivalent: Was immer als zwei Einer, dasselbe kann als ein Zweier gedacht werden, aber in einer anderen, neuen logischen Auffassung, die zur vorigen korrelativ, also stets mit ihr, nicht aber in ihr selbst gesetzt ist.

Den Grundfehler in Freges Begründung der Zahl aber sehe ich nicht in diesen Allgemeinheiten, über die es bei der Gleichheit der Grundlage unserer Anschauungen leicht sein sollte sich zu verständigen, sondern in folgendem. Indem er die Zahl, richtig, auf reine Grundgesetze des Denkens zurückführen will, glaubt er diese, wenigstens die fundamentalen und für seinen Zweck ausreichenden, aus der überlieferten Logik einfach entnehmen zu können. Ob deren Aufstellungen aber, ihre Richtigkeit übrigens vorausgesetzt, nicht die Zahl, vor allem die Zahleinheit, offen oder versteckt schon einschließen, hat er nicht untersucht. Ohne Zweifel ist dies der Fall. Frege stützt sich nämlich auf die überkommenen Begriffe von Essenz und Existenz; diese sieht er an als mit jedem Akte des Denkens unvermeidlich gesetzt und darum selbst nicht weiter reduzierbar. Aber zum wenigsten was damit vorausgesetzt wird, müßte genauer angegeben werden. Ich finde darüber bei ihm nur eine Andeutung (S. 77, Anm. **): „Begriff ist für mich ein mögliches Prädikat eines singulären, beurteilbaren Inhalts, Gegenstand ein mögliches Subjekt eines solchen.“ Hier ist im singulären Urteils-, also Erkenntnisinhalt die Einzahl ersichtlich vorausgesetzt. Allgemeiner: es wird als bekannt und gegeben vorausgesetzt, was es heißt: „ X fällt unter den Begriff A “. Vorausgesetzt wird dies aber durchaus im Sinne der traditionellen Logik, d. h. im Sinne des Aristoteles, nach welchem das Enthaltensein unter einem Begriff zweifellos das Verhältnis des (gegebenen!) Einzelnen zum Allgemeinen bedeutet. Also vorausgesetzt wird auf jede Weise das Einzelne, d. h. in der Einzahl Gedachte, aus dem es

dann freilich leicht ist den Begriff der Einzahl selbst analytisch herauszuholen. Diesen Fehler, der in einer einfachen *petitio principii* besteht, teilen alle Ableitungen der Zahl aus dem Begriff der Zugehörigkeit von Gegenständen zu Klassen (Mengen, Gesamtheiten). Unvermeidlich werden dabei die Gegenstände von Anfang an als (in letztem Betracht) einzelne, d. h. je einer der Zahl nach, gedacht.

Das ist nun nicht bloß überhaupt eine Erklärung desselben durch dasselbe, sondern Frege tut damit im Grunde eben das, was er vermeiden wollte: er setzt die fertigen Dinge voraus, um an diesen, als ihnen anhängende Eigenschaften, die Zahlbeziehungen aufzuweisen. Gewiß nicht im rohen empiristischen Sinne; nicht die vorhandenen Dinge setzt er voraus; aber doch im Begriff ist ihm das Ding, unter dem Namen des Gegenstandes, voraus fertig. Darin aber ist unvermeidlich die Zahl, jedenfalls die Einzahl, schon mitgesetzt. D. h. er ist der reinen Denkfunktion, welche die Zahl ausdrückt, wohl auf der Spur, aber weiß sie von den übrigen reinen Denkfunktionen, mit denen zusammen sie das Ding oder den Gegenstand erst aufzubauen hat, nicht rein abzulösen und in die wahre logische Beziehung zu setzen, jene Beziehung, die wir ihrem allgemeinen Charakter nach als Korrelation, nicht Identität, bereits erkannten. Es drückt sich dies bei Frege auch darin aus, daß er die Zahl — nach wieder sehr treffender Zurückweisung jeder subjektiven Begründung auf psychologische Vorgänge — auf etwas wie Platonische Ideen, nämlich objektive Denkinhalte stützt. D. h., er sucht die Denkinhalte zwar, wie Plato, rein, aber, wie Plato in seiner Frühzeit, einseitig ontisch, nicht genetisch zu erfassen. Die reinen Denkgebilde sind ihm ein- für allemal fertig, er kennt keine Erzeugung reiner Denkinhalte und keine sich entwickelnden Beziehungen, sondern nur stehende unter stehenden Denkpunkten. Damit mußte der synthetische Sinn des Denkens, den er in der Auffassung des arithmetischen Urteils als er-

weiternd, nicht bloß erläuternd, doch im letzten Grunde anerkennt, wo nicht gänzlich wieder verloren gehen, doch seine volle Entfaltung nicht erreichen.

Was nun ist nach Frege die Zahl, zunächst die Einheit? Nicht eine Eigenschaft von Dingen; eine seltsame Eigenschaft in der Tat, die unterschiedslos allem zukäme, eine Unbegrenztheit des Umfangs also besäße, die jede Bestimmtheit des Inhalts ausschlosse. Sie ist also auch nicht als Gemeinsames aus vielen oder allen möglichen gegebenen Dingen herauszuholen, also im herkömmlichen Sinn durch „Abstraktion“ des Gemeinsamen aus vielem Gegebenen zu „definieren“. Leibniz zwar habe eine solche Definition versucht: „Eins ist, was wir durch einen Akt des Denkens zusammenfassen.“ Aber diese Definition sei ein Zirkel, weil in dem „einen“ Akt des Denkens der Begriff „Eins“ schon vorausgesetzt sei. Allerdings sei es Sache unserer Auffassung, welchen Gegenstand wir als einen ansehen wollen; aber gerade darum könne der Begriff des Einen nicht eben hiervon abhängen. — In der Sache ist das gewiß richtig. Aber vielleicht darf man annehmen, daß Leibniz gerade dies hat sagen wollen: die Einheit liege allein in der Art der Setzung, nicht im Gegenstande unabhängig von der Art seiner Setzung; was abgesehen von der psychologischen Wendung des Ausdrucks (der von Akten spricht) genau richtig ist. — Auch nicht die Abstraktion von den Verschiedenheiten der Dinge oder die Fiktion ihrer völligen Gleichheit könne den Begriff des Einen ursprünglich geben; denn mit Verschiedenheiten existierender Dinge habe die Zahl überhaupt nichts zu tun. Übrigens setze Mehrheit Verschiedenheit voraus; wie namentlich Jevons die Einheit auf die Identität, die Mehrheit auf die Verschiedenheit habe zurückführen, in der Mehrheit nichts als die „leere Form der Verschiedenheit“ sehen wollen. — Dies alles ist richtig und vorzüglich klar entwickelt; doch kündigt sich in der letzten Wendung der Hauptfehler bereits an, dem

Frege dann verfällt. Es sind gewisse Beziehungen (Korrelationen!) der Zahl zu anderen Kategorien, besonders denen der Qualität, von ihm erkannt; aber diese Erkenntnis hat ihn dazu verleitet, jene auf diese zurückführen zu wollen. Neben der Qualität ist es die Existenz, mit der Frege die Zahl zusammenbringt. Einheit wird Existenz in der Einzahl; diese nähere Bestimmung der Existenz soll dann in der Identität liegen: Einheit sei Existenz als Identisches. Der sehr sichtbare Fehler dieser Ableitung soll sogleich aufgedeckt werden; das positiv Bedeutsame aber sei voraus anerkannt: Frege empfindet, daß die Zahl etwas Gleichartiges hat mit den reinen Begriffen der Qualität (Identität und Verschiedenheit) und ferner mit dem Begriff der Existenz; überhaupt also mit Kantischen „Kategorien“, d. h. solchen Begriffen, die in ihrem Zusammenwirken den Gegenstand vielmehr erst ursprünglich aufbauen, als aus den fertigen Gegenständen hinterher zu schöpfen sind. Er empfindet auch einen notwendigen Zusammenhang unter den Begriffen dieser Art oder einigen derselben, und gerade den hier wichtigen. Aber er versucht dann, eine bestimmte Gruppe dieser Begriffe, eben die, welche die Zahl direkt begründen, die der Quantität, auf gewisse andere, anscheinend fundamentalere, nämlich die der Qualität und der Existenz, zurückzuführen. So ist das Ergebnis zwar falsch, aber es werden auf dem Wege zu ihm wichtige Dinge, wenn auch nicht bis aufs letzte ergründet, doch in Sicht gebracht und nach wichtigen Seiten beleuchtet.

§ 5. (Fortsetzung.) Wir sind nun vorbereitet, Freges Erklärungen der Null, der Eins, und dann der übrigen Zahlen in direkte Prüfung zu nehmen. Seine Erklärungen der Null und Eins lauten:

A) „Einem Begriff kommt die Zahl Null zu, wenn allgemein, was auch a sei, der Satz gilt, daß a nicht unter diesen Begriff fällt.“ D. h. der Begriff Null (= Keines) wird