



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn

Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften

Natorp, Paul

Leipzig [u.a.], 1910

§ 5. Fortsetzung.

urn:nbn:de:hbz:466:1-35817

Frege dann verfällt. Es sind gewisse Beziehungen (Korrelationen!) der Zahl zu anderen Kategorien, besonders denen der Qualität, von ihm erkannt; aber diese Erkenntnis hat ihn dazu verleitet, jene auf diese zurückführen zu wollen. Neben der Qualität ist es die Existenz, mit der Frege die Zahl zusammenbringt. Einheit wird Existenz in der Einzahl; diese nähere Bestimmung der Existenz soll dann in der Identität liegen: Einheit sei Existenz als Identisches. Der sehr sichtbare Fehler dieser Ableitung soll sogleich aufgedeckt werden; das positiv Bedeutsame aber sei voraus anerkannt: Frege empfindet, daß die Zahl etwas Gleichartiges hat mit den reinen Begriffen der Qualität (Identität und Verschiedenheit) und ferner mit dem Begriff der Existenz; überhaupt also mit Kantischen „Kategorien“, d. h. solchen Begriffen, die in ihrem Zusammenwirken den Gegenstand vielmehr erst ursprünglich aufbauen, als aus den fertigen Gegenständen hinterher zu schöpfen sind. Er empfindet auch einen notwendigen Zusammenhang unter den Begriffen dieser Art oder einigen derselben, und gerade den hier wichtigen. Aber er versucht dann, eine bestimmte Gruppe dieser Begriffe, eben die, welche die Zahl direkt begründen, die der Quantität, auf gewisse andere, anscheinend fundamentalere, nämlich die der Qualität und der Existenz, zurückzuführen. So ist das Ergebnis zwar falsch, aber es werden auf dem Wege zu ihm wichtige Dinge, wenn auch nicht bis aufs letzte ergründet, doch in Sicht gebracht und nach wichtigen Seiten beleuchtet.

§ 5. (Fortsetzung.) Wir sind nun vorbereitet, Freges Erklärungen der Null, der Eins, und dann der übrigen Zahlen in direkte Prüfung zu nehmen. Seine Erklärungen der Null und Eins lauten:

A) „Einem Begriff kommt die Zahl Null zu, wenn allgemein, was auch a sei, der Satz gilt, daß a nicht unter diesen Begriff fällt.“ D. h. der Begriff Null (= Keines) wird

reduziert auf die logische Kategorie des „allgemein verneinenden Urteils“.

B) „Wenn 1. dies nicht der Fall, und wenn 2. aus den Sätzen: ‘ a fällt unter B ’ und ‘ b fällt unter B ’ allgemein folgt, daß a und b dasselbe sind, so kommt dem Begriff B die Zahl Eins zu.“ — Also der Begriff der Einheit wird reduziert auf den der Identität.

Nun sind wirklich (um bei dem letzten zu beginnen) die Begriffe des Einen und des Identischen zueinander streng korrelativ: was immer als identisch, läßt sich in gleicher Hinsicht als Eines auffassen, und was als Eines, in gleicher Hinsicht als identisch; aber doch ist keiner von beiden Begriffen auf den anderen reduzierbar. Der Versuch der Reduktion ist denn auch offenbar mißglückt. Identität soll Einzahl besagen. Welche Identität? Man hat mit Grund mehrere Begriffe von Identität unterschieden; einer von diesen und der einzige hier brauchbare ist — die numerische Identität. In dieser aber ist eben die Zahl, nämlich Einzahl, als unterscheidendes Merkmal von Anfang an mitgesetzt; also ist es leerer Schein, wenn man sie aus ihr herleitet. Nicht Identität eines Denkinhaltes schlechtweg, sondern numerische Identität, oder Identität des Exemplars, d. i. des Einzelnen, schließt die Zahleinheit ein; aber sie begründet sie nicht, sondern wird vielmehr, als numerische, durch sie erst begründet. Oder in anderer Wendung: Frege versteht von Anfang an unter Identität: Identität in der Existenz, nicht in der Essenz. Nun ist das in der Existenz Identische gewiß als solches notwendig in der Einzahl zu denken, aber eben indem die Einzahl als begriffliches Moment darin eingeht. Überhaupt ist die Existenz nichts weniger als der ursprünglichste unter den reinen Begriffen, sondern vielmehr der komplexeste von allen. Die Existenz, der Gegenstand als existierend ist es genau, der durch die Gesamtheit der Kategorien erst aufgebaut wird.

Bei dem allen bleibt hoch verdienstlich, daß die Einheit

aufgewiesen werden soll in den Urbeziehungen, die das Denken eines Gegenstandes überhaupt ausmachen; also in dem, was Kant die synthetische Einheit nennt. Nur wird der Rückgang auf diese, hauptsächlich infolge der Isolierung, in der das Problem ins Auge gefaßt wird, nicht richtig vollzogen. Unmittelbar in der Funktion der synthetischen Einheit selbst, in der Grundkorrelation des Einen und Mannigfaltigen, der Sonderung und Vereinigung (Sonderung des zu Vereinigenden, Vereinigung des zu Sondernden) liegt beides: die Einheit und Mehrheit der Quantität und der Qualität, die sich untereinander aufs engste verflechten, aber zugleich doch in aller Bestimmtheit begrifflich auseinandertreten.

Frege kennt die Kantische „synthetische Einheit“ nur in der viel zu engen Form der Subsumption: „ X fällt unter den Begriff A “. Diese setzt er als Letztes voraus, wohinter nicht weiter zurückzugehen möglich sei, da bei allem Denkgebrauch, d. h. bei allem Gebrauch von Begriffen und Urteilen, dies schon vorausgesetzt werde. Gewiß ist die Subsumption sehr fundamental; aber doch nicht fundamentaler als alle anderen Urausdrücke der synthetischen Einheit, von denen sie nur einen darstellt. Und zwar ist sie einer ihrer Ausdrücke nach Seite der Qualität. Diese ist korrelativ zur Quantität; aber nicht sind darum die Bestimmungen der Quantität aus denen der Qualität herauszuholen. Auch die traditionelle Logik unterscheidet doch Inhalt und Umfang des Begriffs; und wenngleich der Umfang in bestimmtem Sinne vom Inhalt abhängt, so bleiben beide immer begrifflich verschieden als die einander korrespondierenden Grundrichtungen der im Begriff sich darstellenden synthetischen Einheit. Die Zahl aber gehört ohne Zweifel unmittelbar der Umfangsbestimmung an, ihr Begriff kann daher aus Inhaltsbestimmungen als solchen nicht geschöpft werden; vielmehr fordert es die Reinheit der logischen Darstellung, daß, sofern es um Umfangsbestimmungen sich

handelt, von allen Inhaltsbestimmungen vorerst abgesehen wird.

Man könnte etwa sagen: die Zahleinheit sei die Umfangsbestimmung, welche der Inhaltsbestimmung der Identität entspricht. In der bei den Schullogikern beliebten graphischen Darstellung begrifflicher Verhältnisse wird der Fall der Identität zweier (!) Begriffe veranschaulicht durch das Zusammenfallen zweier (!) Kreise, durch das sie in der Tat — vielmehr einer werden. Interessant ist hierbei, daß von der Zweiheit ausgegangen, die (der Identität entsprechende) Einheit also als Grenzfall der verschwindenden Zweiheit (die eben mit der Verschiedenheit verschwindet) aufgestellt wird. Im Grunde ist es bei Frege dasselbe: die zwei Dinge a und b werden der Zahl nach eines im Falle ihrer Identität. Frege merkt gar nicht, daß er also die Zweiheit voraussetzt und die Einheit zu einem besonderen Fall, einem Grenzfall der Zweiheit macht; während er sich sonst gewiß darüber klar ist, daß vielmehr die Zweiheit nur unter Voraussetzung der Einheit aufgestellt werden kann.

Wie durchweg die Umfangsbeziehungen der Begriffe, die den Inhaltsbeziehungen zwar entsprechen, aber doch dem ganzen Begriff nach von ihnen verschieden sind, als richtiger Kern seiner Begründung zugrunde liegen, bei der mangelnden Unterscheidung der Umfangs- und Inhaltsbeziehungen aber alles Abzuleitende versteckt schon vorausgesetzt wird, das wird noch deutlicher an seiner Ableitung der Nullzahl. Diese ließe sich füglich in folgende Fassung bringen: „ x fällt unter A in der Nullzahl, wenn von allen x richtig ist, daß sie nicht A sind,“ das heißt, wenn ich recht verstehe: die Null wird erklärt als der Umfang der Begriffe, die keinen Umfang haben. Denn ohne Zweifel soll Null nicht eine Inhalts-, sondern Umfangsbestimmung sein, aber den Umfang solcher Begriffe bezeichnen, unter die — nichts fällt, d. h. die keinen Umfang haben.

Gibt es Begriffe ohne Umfang? Frege bemüht sich, es

glaubhaft zu machen. Es müsse den Begriff des Widersprechenden, z. B. des kleinsten Bruchs, doch geben, damit von ihm ausgesagt werden könne, er sei widersprechend, nur entspreche ihm eben kein Gegenstand; er sei also zwar ein Begriff, aber ohne Umfang. — Schließlich ist die logische wie jede Terminologie bis zu gewissem Grade der Willkür anheimgegeben; aber zweckmäßig ist es wohl nicht, Begriff zu nennen, wodurch nicht etwas begriffen wird. Ich verstehe unter Begriff eine vollziehbare Denkeinheit; der Widerspruch aber ist im Denken unvollziehbar. Die Aussage, daß etwas ein Widerspruch sei, setzt nicht den Begriff dieses Widersprechenden voraus, sondern nur die Frage, ob aus gegebenen begrifflichen Elementen (z. B. Bruch und Kleinstes) eine Denkeinheit (die dann dargestellt sein würde durch einen Begriff „kleinster Bruch“) vollziehbar sei oder nicht.

Aber gäbe man auch die Existenz des Begriffs des logisch Nichtexistierenden zu, so gibt es jedenfalls nicht einen Umfang solcher Begriffe, da das Nichtexistierende eben keinen Umfang hat. Will man darauf antworten: eben dies, keinen Umfang haben, bedeute den Umfang Null haben? Ich fürchte, daß man damit auf leeres Wortgefecht hinauskäme. Der Streit erledigt sich dadurch: der arithmetische Begriff der Null kann nicht der des logischen Nichts, des im logischen Sinne Nichtexistierenden sein; denn der Null kommt ohne Zweifel Existenz (im logischen Sinne) zu. Nicht erst die physikalischen Anwendungen (der Wärme-grad Null, die Geschwindigkeit Null) oder auch die geometrischen (Punkt als Nullwert der Strecke usw.) lassen die Null als sicher existierenden Begriff erkennen, sondern ganz ebenso ihr Gebrauch in der reinen Arithmetik. Die Differenz $1 - 1 = 0$ ist sicher nicht „null und nichtig“ im Sinne logischer Nichtexistenz, sondern sie existiert so sicher wie die Differenz ≥ 0 , deren Grenze sie darstellt.

Nur weil der Begriff Null existiert, läßt sich der Umfang

von Begriffen, denen kein Gegenstand entspricht, als Umfang Null symbolisch bezeichnen; nämlich es läßt sich ein Umfang Null als Grenze setzen, bei der der Umfang von Begriffen verschwindet. Mit anderen Worten, es kann das logische Feld frei gelassen werden für mögliche Besetzung mit existierendem Inhalt, während noch keine bestimmte Besetzung mit solchem angenommen wird. So wird der logische leere Raum zum „seienden Nichtsein“, ganz wie der leere Raum, in den Demokrit seine Atome setzte. Dies Nichtsein ist aber vielmehr ein sehr bestandhaftes Sein; nicht „null und nichtig“, nicht logische Nichtexistenz, die, wenn sonst ein zulässiger und brauchbarer Begriff, jedenfalls nicht einen Umfang, auch nicht einen „Umfang Null“ begründen könnte, sondern rein in der Qualität verbliebe.

Diese kritische Erwägung führt nun auf ein Ergebnis, zu dem wir auf Grund unserer eigenen Ansätze allerdings ganz direkt gelangen konnten: die Null bedeutet nicht Nichtsetzung, sondern die Setzung der Bezugsgrundlage zu jeder Zahlrelation¹⁾. Eins, Zwei usf. sind von Anfang an zu verstehen in Relation zur Bezugsgrundlage Null. Die Null bedeutet den Denkpunkt, von dem aus irgend ein Denkschritt oder eine Folge von solchen (mit 1, 2 . . .) gezählt wird. Daher „zählt“ sie selbst freilich nicht als Schritt; sie ist aber darum nicht überhaupt nichts, sondern eine unerläßliche Vorbedingung oder Grundlage aller Zahlsetzung, im eigentlichen Sinne der Setzung von Denkschritten. Auch wenn man die Null als verschwindende Zahl denkt, so verschwindet sie nicht ins logische Nichts, sondern sie bleibt beim Verschwinden jedes von Null verschiedenen Zahlwertes stehen als Bedingung, als Ausgang, von dem jeder mögliche, von Null verschiedene Wert zu rechnen ist. Unter dem Begriff des Stetigen wird in der

1) Diesen Sinn der Null kennen auch Arithmetiker wie Gergonne, nach Simon [161], S. 109 und 71, [162], S. 25.

Tat jeder endliche Wert von Null an sich erzeugend gedacht. Was dies in logischer Strenge besagt, ist hier noch nicht zu erörtern; jedenfalls aber setzt es, wenn es in irgendeinem Sinne gelten soll, voraus, daß der Nullwert als Grenze so sicher existieren muß, wie der von ihr an stetig wachsende oder bis zu ihr stetig abnehmende (positive oder negative, endliche oder unendliche) Zahlwert, der nicht Null ist.

Nachdem wir Freges Ableitung der Null und der Eins nicht zugeben konnten, ist natürlich auch seine Ableitung der übrigen Zahlen für uns nicht annehmbar. Er sagt weiter:

C) Die x sind Zwei, wenn sie 1. nicht Null sind (nach der ersten Definition), 2. nicht Eins (nach der zweiten), sondern Verschiedenes, z. B. a, b, \dots , und wenn 3., gesetzt daß eines der Verschiedenen a ist, das Übrige, d. h. das von diesem Verschiedene, identisch (also nach der zweiten Definition Eins) ist. — Man könnte dafür offenbar das ganz Gewöhnliche sagen: Zwei sind Eins und Eins. Im Begriff des von a Verschiedenen, als des Übrigbleibenden, ist dieses im Grunde schon als Eines, und als das Andere d. i. Zweite zum a (als dem Einen im Sinne des Ersten) gedacht. Es ist also auch hier nur Schein, daß die Zahlbestimmung (hier die Zweiheit) auf etwas anderes (Verschiedenheit und Identität) zurückgeführt wäre; die Verschiedenen mußten schon zwei sein, um verschieden sein zu können. In gleicher Weise erfolgt dann die Definition der Drei, Vier usw., die allgemeine Definition des Folgenden und damit der Folge der endlichen Zahlen überhaupt. Die Verwendung der Negation in allen diesen Definitionen hat nur den begründeten Sinn, daß in der Vereinigung allerdings auch Auseinanderstellung, also der Begriff des Anderen gegenüber dem Einen liegt. Aber der quantitative und der qualitative Sinn des Einen und Anderen sind und bleiben einer auf den anderen unreduzierbar, obgleich zueinander streng korrelativ.