Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften

Natorp, Paul

Leipzig [u.a.], 1910

§ 6. Dedekind und andere. Relativität der Eins und Möglichkeit verschiedener Zählungen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-35817

§ 6. (*Dedekind und andere. Relativität der Eins und Möglichkeit verschiedener Zählungen.*) Von Frege unterscheidet sich Dedekind [*33*] schon dadurch, daß er weit entschiedener die „freie Schöpfung“ oder „Erzeugung“ der Zahlbegriffe anerkennt. Ihr Ausdruck ist die „Abbildung eines Systems in sich selbst“, d. h. die immer gleichartige Wiederkehr derselben Beziehungsart, gemäß welcher allemal einem Element im System ein folgendes entspricht. Hierbei wird von aller besonderen Beschaffenheit der Elemente abgesehen, nur ihre Unterscheidbarkeit überhaupt festgehalten und ausschließlich die Beziehung ins Auge gefaßt, in welche die Elemente durch die „ordnende Abbildung“ (d. h. jene immer gleiche Beziehung von Element zu Element) zueinander gesetzt sind (§ 73). Allerdings wird das Grundelement Eins wieder einfach vorausgesetzt; es soll sich von den übrigen Elementen dadurch unterscheiden, daß es selbst zu keinem anderen (voraufgehenden) in jener Beziehung steht, durch welche von ihm an alle weiteren mit ihm selbst und untereinander zusammenhängen oder eine „Kette“ bilden (s. bes. 134 a. E., neben 44, 57, 58). Den Vorzug gegenüber Frege erkennen wir darin, daß die immer gleiche Beziehung von Glied zu Glied als das erzeugende Prinzip der Zahl bestimmt erkannt ist. Die Subsumption unter Begriffe wird ersetzt durch die Zugehörigkeit von „Dingen“ (die nicht mehr bedeuten als Setzungen des Denkens überhaupt) als Elemente zu einem „System“ (Inbegriff, Mannigfaltigkeit, Gesamtheit, d. h. der Sache nach: zu einer Ordnung), sofern sie „unter einem gemeinsamen Gesichtspunkt aufgefaßt, im Geiste zusammengestellt“ werden (2). So kann der Fehler den Worten nach derselbe zu sein scheinen wie bei Frege. Aber jener gemeinsame Gesichtspunkt ist eben nur der der Ordnung selbst. Hiermit ist die Quantität 1. rein abgelöst von der Qualität, während sie bei Frege ganz auf diese zurückgedeutet wurde, und es ist 2. der reine Relations-Charakter der Zahl, ungleich bestimmter als bei Frege, als entscheidend erkannt. Unbefriedigend bleibt, abgesehen davon, daß die Null, die negative Zahl, überhaupt die sogenannten Erweiterungen der Zahl nicht ausdrücklich erklärt werden, hauptsächlich, was ebenso bei Frege, bei Hilbert und allen anderen unbefriedigend ist: die Sonderstellung der Eins, die auch hier nicht begründet, sondern einfach definitorisch aufgestellt wird. Da sie nach Dedekind (97) die kleinste Zahl sein, nichts ihr voraufgehen soll, so muß wohl die Null keine Zahl sein, oder es muß der Begriff der Zahl sich, kaum aufgestellt, eine logisch nicht wohl verständliche Wandlung gefallen lassen. Die Eins als kleinste Zahl wäre ein Absolutes. Aber dann wäre auch die Zwei ein Absolutes und die Drei, überhaupt jede bestimmte Zahl. Es wäre die Zahl von der Zeit und dem Raum darin radikal verschieden, daß (wie übrigens Frege S. 19 f. geradezu ausspricht) die Zahlen nicht wie die Zeit- und Raumpunkte alle gleichartig sind, sondern „jede ihre Eigentümlichkeit hat". Zwar könnte man versuchen zu antworten, es bleibe selbst bei dem von der Eins ausgehenden Aufbau der Zahl die Gleichartigkeit in einem Sinne gewahrt; nämlich die Eins in der Bedeutung der Einer seien ebenso gleichartig wie die Punkte; wenn aber ihre Zusammenfassung zur Einheit, Zweiheit, Dreiheit usf. allerdings Verschiedenheiten begründe, so seien diese nicht größer als etwa die der Zusammenstellungen von Einzelpunkten zu Punktpaaren, Punkttripeln usf. im Raume oder auch in der Zeit. In der Tat aber wären nach jener Auffassung schon die Einer nicht durchaus begriffsgleich, da es einen Einer gäbe, dem kein anderer vorhergeht, einen weiteren, dem nur einer, einen, dem genau zwei vorhergehen usf. Wirklich vermieden wird also auch unter dieser Betrachtung die Ungleichartigkeit nicht; sie hat nur das Gute, zu zeigen, daß der Forderung der Gleichartigkeit eben doch nicht auszuweichen ist.

Dagegen besteht eine solche Ungleichheit bei unserem Aufbau von Anfang an nicht. Es fällt damit der absolute

Begriff der Eins ganz aus; jedes Glied der Reihe kann im bloßen Stellverhältnis nach Belieben als erstes gesetzt und dann das ihm folgende als zweites, das diesem folgende als drittes usf. gezählt werden. Damit aber ergibt sich die Möglichkeit unendlich vieler, immer nach demselben Gesetz sich aufbauender, nur dem Ausgangsglied nach verschiedener Zählungen und unerschöpflicher neuer Beziehungen unter diesen, welche, wie wir bald sehen werden, die erste Art der sogenannten Rechenoperationen begründen. Ihre Verschiedenheit ist, wie sich zeigen wird, schärfer zu bezeichnen als Verschiedenheit der Nullbeziehung. Andererseits begründet die Möglichkeit der Zusammenfassung irgendeiner Vielheit gegebener Einheiten zu einer neuen Einheit die Möglichkeit verschiedener Zählungen in einer zweiten Art: verschieden nach der Einheit, mit der gezählt wird. Diese begründet die andere Grundart von Operationen, welche wir die metrischen nennen werden: Multiplikation und Division, die sich dann weiter entwickeln zur Potenzierung, Radizierung und Logarithmierung.

Zwar kann gegen die Aufstellung des Begriffs verschiedener Zählungen sich leicht der Zweifel erheben: ob denn nicht die Zahlreihe als Ausdruck des in sich einzigen Verfahrens der Zählung überhaupt schlechthin einzig sei. Diese Einzigkeit wurde von Frege besonders betont; auch Lipps gab sie als eines der charakteristischen Merkmale der Zahlreihe an, und wir haben sie unsererseits ausdrücklich anerkannt. In der Tat wird die Einzigkeit in einem Sinne mit allem Recht behauptet. Die Funktion der Null, der Eins usf. ist in allen verschiedenen Zählungen eine und dieselbe. Aber sie kann von Stelle zu Stelle der Grundreihe, oder von Vielheit zu Vielheit, sich übertragen und gleichsam wandern, so wie (um eine gerade von Frege herangezogene historische Vergleichung zu benutzen) die Platonische Idee, unbeschadet ihrer Identität und numerischen Einheit, doch wandern, d.h. ihre Funktion von Stelle zu Stelle (des Raumes und der Zeit) übertragen kann. Oder man denke (um etwas Moderneres zur Analogie zu wählen) an das Wandern der Energie in der Mechanik, die dabei doch immer dieselbe, nur einmal existierende, unvermehrbare und unverminderbare Größe bleiben soll. Man sieht wohl schon hier ab, daß das Wandern der Zahlfunktion beruhen wird auf dem Unterschied und Verhältnis jener in der Zahl jederzeit eingeschlossenen drei Momente: der zunächst unterschiedslosen Setzung von Einem und wieder Einem usf.; der Gliederung nach Grund- und Gegenglied; und endlich der Zusammensetzung. Auf diese Weise behält die Einzigkeit der Zahl ihren strengen Sinn und besteht doch die Möglichkeit immer neuer Zählungen, nicht je nachdem zählbare Gegenstände gegeben oder denkbar sind, sondern an und für sich nach den eigenen Gesetzen der Zahl. Hierbei hat die „Möglichkeit" nicht bloß den Sinn der Zulässigkeit zufolge der Widerspruchslosigkeit; sondern es gibt (im mathematischen Sinn des Existierens) alle diese unendlichen Zählungen von immer neuen Nullpunkten aus und mit immer neuen Einheiten, und es gibt eben damit die immer neuen Relationen unter diesen verschiedenen Zählungen. Die Rechenoperationen sind nichts als die Entwicklungen dieser unendlichen, existierenden Zählungen und Relationen unter solchen. Also reden sie alle von seienden Relationen, aber indem sie diese von den einfachsten an Stufe um Stufe entwickeln. Also widerspricht jenes Sein nicht dem Werden, der Erzeugung neuer und neuer Zahlwerte; wie es sich besonders zu erkennen gibt in der Unendlichkeit ihrer Entwicklung, die eine Erschöpfung der existierenden Möglichkeiten geradezu ausschließt, während es zugleich ausgeschlossen ist, anders als durch bestimmte Zwischenglieder von den einfachsten zu höheren und höheren Relationsarten logisch überzugehen.

Zur Betrachtung dieser Entwicklungen der Zahlbeziehungen, d. h. zur Ableitung der sogenannten Rechenoperationen schreiten wir jetzt.

§ 7. (*Zahlgleichung und Zahloperation.*) Alle Rechnung vollzieht sich in Gleichungen. Es scheint daher, als müsse man zuerst den Begriff der Zahlgleichheit aufstellen. Aber da stößt man sofort auf eine ernste Schwierigkeit. Was kann es heißen: zwei Zahlen sind gleich? Da die Zahlreihe, als Ausdruck des Zählverfahrens, schlechthin einzig ist, so wären gleiche Zahlen dieselben Zahlen, es hätte keinen Sinn, sie erst gleich zu setzen. Die Zahl 1, die Zahl 2 usf. existiert überhaupt nur ein einziges Mal, also hat es keinen Sinn, als Satz der Arithmetik aufzustellen: $1 = 1$, $2 = 2$ usf. So sagt man in der Tat auch nicht, sondern etwa $1 + 1 = 2$, $3 - 1 = 2$, $2 \cdot 1 = 2$, $4 : 2 = 2$. Man gelangt, scheint es, auf verschiedenen Wegen zu demselben Ziel; und man setzt die Operationen, die in sich durchaus verschieden sind, einander „gleich", sofern sie dieselbe Zahl zum Ergebnis haben: $1 + 1 = 3 - 1 = 2 \cdot 1 = 4 : 2$. Die Operationen sind in der Tat nur darin einander gleich, daß sie auf dasselbe Resultat Zwei führen, sonst sind sie durchaus verschieden. Ihre Gleichheit ist vielmehr Äquivalenz, wie auch von Leibniz an vielfach bemerkt worden ist.

Aber wir wissen noch gar nicht, was Zahloperationen sind. Man spricht von „Ableitung" einer neuen Zahl aus gegebenen. Aber Zahlen sind nicht Dinge, die der Veränderung unterliegen, die aus etwas etwas anderes werden können. Sie sind schlechthin, aus ihnen läßt sich nichts machen, mit ihnen läßt sich nichts tun; man kann sie nicht rücken noch wandeln, zusammen- oder voneinandertun, vermehren oder vermindern, vervielfältigen oder teilen, noch können sie verschwinden und gar mehr als verschwinden; sie sind in unveränderlicher Bestimmtheit. Schon Plato hat die Behandlung der Zahlen nach Art veränderlicher und verrückbarer Dinge weidlich verspottet: Waren die