Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften

Natorp, Paul

Leipzig [u.a.], 1910

§ 7. Zahlgleichung und Zahloperation.

gen, d. h. zur Ableitung der sogenannten Rechenoperationen schreiten wir jetzt.

§ 7. (*Zahlgleichung und Zahloperation.*) Alle Rechnung vollzieht sich in Gleichungen. Es scheint daher, als müsse man zuerst den Begriff der Zahlgleichheit aufstellen. Aber da stößt man sofort auf eine ernste Schwierigkeit. Was kann es heißen: zwei Zahlen sind gleich? Da die Zahlreihe, als Ausdruck des Zählverfahrens, schlechthin einzig ist, so wären gleiche Zahlen dieselben Zahlen, es hätte keinen Sinn, sie erst gleich zu setzen. Die Zahl 1, die Zahl 2 usf. existiert überhaupt nur ein einziges Mal, also hat es keinen Sinn, als Satz der Arithmetik aufzustellen: $1 = 1$, $2 = 2$ usf. So sagt man in der Tat auch nicht, sondern etwa $1 + 1 = 2$, $3 - 1 = 2$, $2 \cdot 1 = 2$, $4 : 2 = 2$. Man gelangt, scheint es, auf verschiedenen Wegen zu demselben Ziel; und man setzt die Operationen, die in sich durchaus verschieden sind, einander „gleich", sofern sie dieselbe Zahl zum Ergebnis haben: $1 + 1 = 3 - 1 = 2 \cdot 1 = 4 : 2$. Die Operationen sind in der Tat nur darin einander gleich, daß sie auf dasselbe Resultat Zwei führen, sonst sind sie durchaus verschieden. Ihre Gleichheit ist vielmehr Äquivalenz, wie auch von Leibniz an vielfach bemerkt worden ist.

Aber wir wissen noch gar nicht, was Zahloperationen sind. Man spricht von „Ableitung" einer neuen Zahl aus gegebenen. Aber Zahlen sind nicht Dinge, die der Veränderung unterliegen, die aus etwas etwas anderes werden können. Sie sind schlechthin, aus ihnen läßt sich nichts machen, mit ihnen läßt sich nichts tun; man kann sie nicht rücken noch wandeln, zusammen- oder voneinandertun, vermehren oder vermindern, vervielfältigen oder teilen, noch können sie verschwinden und gar mehr als verschwinden; sie sind in unveränderlicher Bestimmtheit. Schon Plato hat die Behandlung der Zahlen nach Art veränderlicher und verrückbarer Dinge weidlich verspottet: Waren die

Zwei etwa nicht Zwei, bevor man sie zusammentat? Soll aus Eins Zwei werden bald durch Zusammentun, bald im Gegenteil durch Trennen? Dergleichen mag von Dingen gesagt werden, die dem Werden und Vergehen und der Veränderung und Verrückung unterliegen, nicht aber von Zahlen, die doch Begriffe sein wollen.

Man hat, wie es scheint, die „Synthesis" psychologisch mißverstanden, als Zusammentun zwar nicht äußerer Dinge, aber wenigstens ihrer stellvertretenden Abbilder in der Vorstellung. Psychologisch hat es auch wohl Sinn, davon zu reden, wie Denkfunktionen sich verflechten, aus gegebenen, d. h. bereits eingeübten Verbindungen neue hervorwachsen oder schon gebildete wieder zergehen. So mag der Psychologe die Zahlgebilde (Summen, Produkte usf.) wachsen und sich entwickeln lassen. Aber mit dem allen hat die Logik der Zahl nichts zu schaffen. Für sie existieren auf der jetzt erreichten Stufe der Betrachtung nur Bestimmtheiten, welche sind, nicht werden. Es hat für sie keinen Sinn zu sagen, daß aus zwei Zahlen eine neue wird. Wieso wird sie, wenn sie doch zuvor schon ist? Denn wenn man von Rechnung spricht, setzt man die Zahlen doch schon voraus.

Auch scheitert man bei jedem Versuch der Durchführung sehr bald. Wenn es einen Sinn zu haben wenigstens scheinen kann: aus der Zwei und der Eins erzeuge sich die Drei, was soll es dagegen heißen, durch Wegnahme des Einen vom Einen erzeuge sich die Null; und gar durch Wegnahme der Drei von der Zwei die negative Eins? Was ist die Null, die negative Zahl, und ebenso der Bruch, die irrationale Wurzel, das Irrationale überhaupt, das Imaginäre? Man spricht von „Erweiterungen des Zahlbegriffs". Man will sagen: Erweiterung des Bereiches der Rechnungsoperationen. Aber worauf erweitert man sie? Auf Zahlen doch nicht? Wenigstens hatte man voraus keinen Begriff der Zahl gegeben, nach welchem dies alles Zahlen wären. Man verständigt sich, das Wort Zahl zu gebrauchen über den anfänglich definierten Sinn hinaus — ohne doch einen neuen Sinn dieses Wortes aufzustellen. Also sind es leere Symbole, mit denen man rechnet. Merkwürdig nur, daß dabei (oft, nicht immer) Ergebnisse herauskommen, die wieder einen den Anfangsdefinitionen entsprechenden Sinn geben und in der Anwendung sich als richtig erproben. Damit sind die Mathematiker lange zufrieden gewesen; sie vermißten gar nicht einen Sinn der Operation, wenn sie nur Resultate sahen. Aber gerade die großen Mathematiker haben sich dabei nie beruhigt, und allgemein darf gesagt werden, daß die heutige Mathematik gegen die Forderung einer logischen Durchdringung des Sinnes der arithmetischen Operationen nicht mehr taub ist. Nur finde ich nicht, daß eine befriedigende logische Erklärung der Rechenoperationen bis jetzt gegeben sei.

Man darf nicht hoffen, zu einer solchen anders zu gelangen, als indem man als erste Voraussetzung zugrunde legt, daß Zahlen schlechthin s i n d und, einmal ihren Begriff gesetzt, als eben das, als was sie gesetzt sind, gesetzt bleiben, unentstanden, unvergänglich, unveränderlich. Aber indem sie sind, v e r h a l t e n sie sich irgendwie gegeneinander, und die vollständige Entwicklung dieser in und mit den Zahlen selbst gesetzten Verhältnisse, das und nichts anderes ist der Sinn der Rechnung. Das allein ist das Tun der Mathematik, daß sie diese Verhältnisse, die an sich in und mit den Zahlen selbst und gleich ihnen sind, nicht werden, in methodischem Fortschritt sich entwickelt. Was so keine überzeugende Erklärung fände, entzöge sich überhaupt klarem Begriff, dürfte also in einer Wissenschaft von der Zahl überhaupt nicht zugelassen werden. Doch wird sich zeigen, daß alle bisher mit Erfolg entwickelten Zahlgebilde auf diesem Wege ihre Erklärung wirklich finden.

Zunächst wird der Sinn der Gleichung, der so problematisch erschien, aus dieser Grundvoraussetzung sofort klar. Was gleichzusetzen, sind nicht Zahlen, als eine Art Dinge, sondern Relationen unter Zahlen, die selbst nichts als Termini von Relationen bedeuten. Auch eine Zahlrelation einer für sich stehenden Zahl gleichzusetzen, hat keinen aus sich klaren Sinn, sondern kann allenfalls nur als abkürzender Ausdruck zugelassen werden; an sich, nach genauer Logik, kann nur eine Relation einer Relation gleichgesetzt werden.

Daraus ergibt sich freilich die zunächst vielleicht befremdende Folgerung, daß arithmetische Gleichungen ihrem Begriff nach notwendig viergliederig sind, also eigentlich stets Proportionen darstellen. Dies wird sich uns aber in der Durchführung wirklich bestätigen. Wir beginnen, schon um uns vom Herkommen nicht zu weit zu entfernen, mit der Untersuchung der Addition.

§ 8. (*Die Addition.*) Was heißt $1 + 1 = 2$? Man darf nicht Anstoß daran nehmen, daß eine solche anscheinende Kinderfrage hier gestellt wird. So paradox es ist, eine logisch voll befriedigende Antwort auf diese Frage ist bisher auch bei den gelehrtesten Arithmetikern nicht zu finden. Schon oft aber hat die gründliche Lösung der denkbar einfachsten Fragen sich fruchtbar erwiesen für die Lösung viel größerer Fragen. Das ist auch nicht zu verwundern. In den Fundamenten steckt alles; ist in den Grundlagen der Wissenschaft nur das geringste, vielleicht in weite Konsequenzen hinein unschädliche Versehen begangen, irgendwo wird es doch, wenn auch vielleicht erst in fernen Ableitungen, sich verhängnisvoll erweisen. Also darf man es nicht scheuen, eine solche scheinbar einfachste Frage einmal scharf ins Auge zu nehmen.

Und da zeigt sich sofort, daß in diesem schlichten $1 + 1$ ein seltsames Problem liegt. Vorausgesetzt sei die Reihe der ganzen Zahlen: 1, 2, . . ., wobei die gewöhnliche Erklärung einstweilen gelten möge, daß 1 die (willkürliche) Anfangssetzung, 2 das diesem Anfang zunächst, 3 das wieder diesem zunächst Gesetzte bedeutet usf. Diese Reihe