Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften

Natorp, Paul

Leipzig [u.a.], 1910

§ 8. Die Addition.

sondern Relationen unter Zahlen, die selbst nichts als Termini von Relationen bedeuten. Auch eine Zahlrelation einer für sich stehenden Zahl gleichzusetzen, hat keinen aus sich klaren Sinn, sondern kann allenfalls nur als abkürzender Ausdruck zugelassen werden; an sich, nach genauer Logik, kann nur eine Relation einer Relation gleichgesetzt werden.

Daraus ergibt sich freilich die zunächst vielleicht befremdende Folgerung, daß arithmetische Gleichungen ihrem Begriff nach notwendig viergliederig sind, also eigentlich stets Proportionen darstellen. Dies wird sich uns aber in der Durchführung wirklich bestätigen. Wir beginnen, schon um uns vom Herkommen nicht zu weit zu entfernen, mit der Untersuchung der Addition.

§ 8. (*Die Addition.*) Was heißt $1 + 1 = 2$? Man darf nicht Anstoß daran nehmen, daß eine solche anscheinende Kinderfrage hier gestellt wird. So paradox es ist, eine logisch voll befriedigende Antwort auf diese Frage ist bisher auch bei den gelehrtesten Arithmetikern nicht zu finden. Schon oft aber hat die gründliche Lösung der denkbar einfachsten Fragen sich fruchtbar erwiesen für die Lösung viel größerer Fragen. Das ist auch nicht zu verwundern. In den Fundamenten steckt alles; ist in den Grundlagen der Wissenschaft nur das geringste, vielleicht in weite Konsequenzen hinein unschädliche Versehen begangen, irgendwo wird es doch, wenn auch vielleicht erst in fernen Ableitungen, sich verhängnisvoll erweisen. Also darf man es nicht scheuen, eine solche scheinbar einfachste Frage einmal scharf ins Auge zu nehmen.

Und da zeigt sich sofort, daß in diesem schlichten $1 + 1$ ein seltsames Problem liegt. Vorausgesetzt sei die Reihe der ganzen Zahlen: 1, 2, . . ., wobei die gewöhnliche Erklärung eintweilen gelten möge, daß 1 die (willkürliche) Anfangssetzung, 2 das diesem Anfang zunächst, 3 das wieder diesem zunächst Gesetzte bedeutet usf. Diese Reihe ist (wie allgemein anerkannt wird) einzig, unabänderlich. Es darf also stets nur gezählt werden: 1, 2, 3, 4, 5, ...; in welcher Reihe jedes folgende Glied durch das vorhergehende und alle vorhergehenden bis zur 1 zurück bestimmt ist. Woher nehme ich nun die Berechtigung zu sagen: Eins und Eins; also gewissermaßen zu zählen: 1, 1, da doch nach der Voraussetzung auf 1 jedenfalls 2 folgen müßte, und nie nochmals 1? Oder wie darf ich sagen $3+2$, also gewissermaßen zählen: 1, 2, 3, 1, 2, statt, was bisher einzig zulässig war: 1, 2, 3, 4, 5?

Aber indem die Frage bestimmt so gestellt ist, ist die Antwort fast schon gegeben. Nicht in einer und derselben Zählung kann ich zählen: 1, 2, 3, 1, 2. Aber ich kann eine erste Zählung mit der 3 abbrechen und eine neue beginnen; bei der ich aber die erste (bis zur 3) im Sinne behalte. Diese neue Zählung (1, 2) ist also nicht, wie die erste, voraussetzungslos, sondern, als neue, auf jene als voraufgehende zurückbezüglich.

In der Zahlgleichung $3 + 2 = 5$ sind es somit drei verschiedene Zählungen, die untereinander in eine noch näher zu untersuchende Beziehung treten:

$$
\begin{array}{lll}
1,\ 2,\ 3 & | \ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\
 & \quad 1,\ 2 & | \ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 & & | \ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{array}
$$

Also ist es, um das Problem der Addition aufzulösen, vor allem nötig, sich klar darüber zu werden, inwiefern, und zwar in reiner Arithmetik, nicht etwa in Anwendung auf Dinge, von verschiedenen Zählungen mit Fug geredet werden kann, da doch an sich die Zählung als Verfahren einzig, die Reihe der ganzen Zahlen, 1, 2, 3 ... nur einmal vorhanden ist. Dies ist nun in der Tat und bleibt so lange logisch ungerechtfertigt, als man die Zahl 1, und so folgerecht 2, 3 und jede Zahl, als Absolute ansieht, also nicht zugeben will, daß Zahlsetzung in jedem Fall relative Setzung, Setzung von Relationen ist. Die Relationen *sind* unveränderlich; aber nicht Zahlen als absolute Dinge. Wir haben ursprünglich nicht eine absolute Erstsetzung, dann Folgesetzung, Folgesetzung dieser Folgesetzung usf., sondern die Setzung von Etwas überhaupt in Beziehung zu Etwas, dann die Wiederholbarkeit dieser relativen Setzung, und diese von Anfang an in der doppelten Weise, daß die vorherige Grundsetzung Gegensetzung (zu einer anderen Grundsetzung), und daß die Gegensetzung Grundsetzung (zu einer anderen Gegensetzung) wird. Hiermit ist sofort gegeben, daß jedes Glied der ursprünglichen Reihe

$$\ldots \frown | \frown | \frown | \frown | \frown | \frown \ldots$$

die Funktion der Null, der Eins, und so auch der Zwei, der Drei usf. übernehmen kann. Damit ist die Möglichkeit immer neuer Zählungen und immer neuer Relationen unter solchen begründet. Es gibt, mit anderen Worten, nicht einen absoluten Begriff, z. B. der Eins, der Zwei, sondern Eins ist von Anfang an Eins gegen Null, d. h. Erstgesetztes von einer bestimmten, in der ursprünglich indifferenten Reihe willkürlich wählbaren Ausgangsstelle der Zählung aus, als der gleichfalls nie absolut, sondern stets nur relativ zu verstehenden Null, der Null für *diese Zählung*.

Die gewöhnliche Erklärung der Null läßt diese auf wunderliche Weise entstehen aus der im Grunde widersinnigen Forderung, Gleiches von Gleichem abzuzählen. Abzählen läßt sich nur, was zuvor zugezählt war; durch Abzählen wiedererhalten kann man nur, was man vor der Zuzählung hatte; soll also durch Abzählung Null herauskommen, so muß von Anfang an zur Null zugezählt worden sein. So ist es nun in der Tat. Die Null zählt nicht, erst die Eins zählt; aber die Null bezeichnet den Punkt, von wo aus (mit 1, 2, 3 . . .) gezählt wird. In die Zahlreihe, die das Verfahren der Zählung allgemein ausdrücken soll, ist sie eben deshalb einzustellen, aber, ebenso wie die 1, die 2 usf., nicht in irgendeinem absoluten Sinne (des absoluten Nichts der Zahl nach), sondern von Anfang an in dem relativen der A u s g a n g s s t e l l e der jedesmaligen Zählung, welche Ausgangsstelle nämlich wechseln, d. h. auf jede Stelle der ursprünglichen, indifferenten Reihe

. . . ⌒|⌒|⌒|⌒ . . .

ihre Funktion übertragen kann.

Unter diesen Voraussetzungen ergibt sich die folgende Erklärung der Addition. $+ 1$ heiße, nach auch sonst geltender Auffassung: „Eins zugezählt". Der Allgemeinausdruck dessen aber, w o z u zugezählt wird, ist die Null; also würde der Ausdruck $+ 1$ vollständig lauten: $0 + 1$, d. h. „von Null aus Eins gezählt". Was heißt nun $1 + 1$? Der Analogie nach: von 1 aus 1 gezählt. Aber wie darf ich von 1, statt von 0 aus, 1 zählen? Darauf ist nun geantwortet: nicht in derselben, aber in einer neuen Zählung, in welcher die Eins der vorigen Zählung die Funktion der Null übernimmt; also:

0 1 . . .
  0 1 . . .

Hiernach ergibt sich dieser Sinn der Summation $1 + 1 = 2$: Von 0 aus 1 gezählt, und von dieser 1, als 0 einer neuen Zählung, wiederum 1 gezählt, ist „gleich", d. h. gilt gleichviel wie von der ursprünglichen 0 aus 2 gezählt.

Wir sagten nun: gleichgesetzt werden können ursprünglich nur Verhältnisse; eine Zahlgleichung müsse in Wahrheit eine Proportion darstellen. Wo ist hier die Proportion? Welches ist das vierte Glied? Die Antwort kann nach der eben gegebenen Erklärung nur lauten: Dies vierte Glied ist die Null der ursprünglichen Zählung. Von der Eins einer ersten Zählung als neuer relativer Null aus, in einer neuen Zählung also, Eins gezählt, ist in bestimmtem Sinne dasselbe oder gilt gleichviel wie in der ersten Zählung von der Null dieser Zählung aus Zwei gezählt. Also

$$1 + 1 = 0 + 2.$$

In welchem Sinne aber ist es dasselbe oder gilt es gleichviel? Der ganze Sinn des auf beiden Seiten der Gleichung Gesetzten ist verschieden; es kann gar nicht der Schein entstehen, als sei in diesem Urteil das Prädikat im Subjekt eingeschlossen und nach dem Satze des Widerspruchs daraus hervorzuholen. Die erste Stelle nach der ersten, sofern nach dieser die Zählung neu, also mit Eins, einsetzt, ist nicht 2, sondern 1; aber ihr entspricht die 2 der ursprünglichen Zählung, und diese Entsprechung ist es, welche die Gleichung aussagt. Allemal wenn in einer ursprünglichen Zählung 1, 2 gezählt wird, läßt sich auch in zwei verschiedenen Zählungen (nämlich der ursprünglichen, die bei 1 abbricht, und einer neuen, in welcher die Funktion der Null auf das vorher als Eins gezählte Glied übertragen wird) Eins und wiederum Eins zählen, und umgekehrt. Diese zwei Zählungen sind jener einen (und umgekehrt) substituierbar, sie sind einander gleichwertig, äquivalent, nicht aber gleich, sofern darunter verstanden wird: identisch.

Es mag diese Erklärung auf den ersten Anblick weniger einfach erscheinen als die sonst gebräuchlichen; daß sie aber in der Tat die gesamte Auffassung der arithmetischen Prinzipien vereinfacht, wird sich zeigen. Voraus schon sieht man den Gewinn ab, daß jetzt die Gleichheit unterschiedslos in allen Anwendungen, von den einfachsten bis zu den kompliziertesten, dasselbe bedeuten wird, nämlich Substituierbarkeit, Äquivalenz auf Grund einer bestimmten Korrespondenz (Korrelativität), und nicht bald dies, bald etwas ganz anderes: Identität.

§ 9. (*Die Subtraktion.*) Wenn aber bei dieser Erklärung der Addition irgend noch als störend empfunden werden