Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften

Natorp, Paul

Leipzig [u.a.], 1910

§ 9. Die Subtraktion.

urn:nbn:de:hbz:466:1-35817

selbe oder gilt gleichviel wie in der ersten Zählung von der Null dieser Zählung aus Zwei gezählt. Also

$$1 + 1 = 0 + 2.$$

In welchem Sinne aber ist es dasselbe oder gilt es gleichviel? Der ganze Sinn des auf beiden Seiten der Gleichung Gesetzten ist verschieden; es kann gar nicht der Schein entstehen, als sei in diesem Urteil das Prädikat im Subjekt eingeschlossen und nach dem Satze des Widerspruchs daraus hervorzuholen. Die erste Stelle nach der ersten, sofern nach dieser die Zählung neu, also mit Eins, einsetzt, ist nicht 2, sondern 1; aber ihr entspricht die 2 der ursprünglichen Zählung, und diese Entsprechung ist es, welche die Gleichung aussagt. Allemal wenn in einer ursprünglichen Zählung 1, 2 gezählt wird, läßt sich auch in zwei verschiedenen Zählungen (nämlich der ursprünglichen, die bei 1 abbricht, und einer neuen, in welcher die Funktion der Null auf das vorher als Eins gezählte Glied übertragen wird) Eins und wiederum Eins zählen, und umgekehrt. Diese zwei Zählungen sind jener einen (und umgekehrt) substituierbar, sie sind einander gleichwertig, äquivalent, nicht aber gleich, sofern darunter verstanden wird: identisch.

Es mag diese Erklärung auf den ersten Anblick weniger einfach erscheinen als die sonst gebräuchlichen; daß sie aber in der Tat die gesamte Auffassung der arithmetischen Prinzipien vereinfacht, wird sich zeigen. Voraus schon sieht man den Gewinn ab, daß jetzt die Gleichheit unterschiedslos in allen Anwendungen, von den einfachsten bis zu den kompliziertesten, dasselbe bedeuten wird, nämlich Substituierbarkeit, Äquivalenz auf Grund einer bestimmten Korrespondenz (Korrelativität), und nicht bald dies, bald etwas ganz anderes: Identität.

§ 9. (*Die Subtraktion.*) Wenn aber bei dieser Erklärung der Addition irgend noch als störend empfunden werden möchte, daß sie nicht einfach sei, so schwindet dies Bedenken ganz, wenn wir nun zur Subtraktion übergehen. Die Einfachheit einer Voraussetzung ist nicht danach zu bemessen, wie vieler Worte man bedarf, um sie selbst zumal dem, dessen ganzer Gedankenrichtung sie fern lag, verständlich zu machen, sondern die Einfachheit muß sich erweisen in der Ableitung der Konsequenzen. Die Einfachheit unserer Voraussetzung wäre unmittelbar zutage getreten, wenn wir statt von der Addition von der Subtraktion ausgegangen wären.

Wir erklärten die Addition als Ausdruck eines Verhältnisses, genauer des Verhältnisses zweier Verhältnisse, und zwar Stellverhältnisse: die erste Stelle der neuen Zählung, die nach der 1 einer ersten Zählung einsetzt (d. h. diese zur Null macht), entspricht der zweiten der ursprünglichen (von der ursprünglichen Null ausgehenden) Zählung. Man gewinnt nun leicht einen anderen Ausdruck derselben Entsprechung, wenn man bloß die Frage anders richtet. In der Addition war die Frage: Der ersten Stelle nach der ersten entspricht welche Stelle der ursprünglichen Zählung? Antwort: die zweite. Lautet dagegen die Frage: Die zweite Stelle ist, von der ersten aus gezählt, die wievielte? (worauf zu antworten: die erste), so erhält man, als nur anderen Ausdruck desselben Sachverhalts, die Subtraktionsgleichung $2 - 1 = 1$.

Schon so erscheint die Subtraktion mit der Addition mindestens gleich ursprünglich; es ist kein Grund, sie dieser, als die indirekte oder inverse Operation der direkten, entgegenzusetzen; sondern jeder der beiden Ausdrücke verhält sich zum anderen als inverser, oder beide sind gegeneinander reziprok. Sobald man aber die Proportion vollständig ausschreibt, ergibt sich die Subtraktion als der unmittelbarere und durchsichtigere Ausdruck des ihr und der Addition gleichermaßen zugrunde liegenden Sachverhalts:

2 ist, vom Ausgangspunkt 1 gerechnet, 1, d. h. 2 verhält sich zu 1, als neuem Ausgangspunkt, wie 1 zum ursprünglichen Ausgangspunkt, also zur 0 der ursprünglichen Zählung: $2 - 1 = 1 - 0$. Das aber ist der ganz direkte Ausdruck der Gleichheit des Stellverhältnisses: die 2 hat zur 1 die gleiche Stellung wie die 1 zur 0. So ist das Verhältnis irgendwelcher zwei Zahlen, nämlich der Stelle nach (wobei vorerst stets von der in der Reihe späteren Zahl ausgegangen werde), ausdrückbar durch das Verhältnis irgendeiner bestimmten Zahl zu Null, auf Grund der Gleichheit, d. h. Äquivalenz des Stellverhältnisses.

Diese Erklärung konnte von unseren Voraussetzungen aus natürlich auch unmittelbar, ohne den Umweg über die Addition aufgestellt werden. Doch hat der Umweg den Nutzen, es ungleich deutlicher zu machen, daß es sich notwendig um verschiedene Zählungen handelt. In der Tat, nur indem ich die Stellen z. B. nach der 3 bis zur 5 zähle, kann ich den Satz aussprechen: 5 hat zu 3 die gleiche Stellung wie 2 zu 0. Also um die Subtraktionsgleichung $5 - 3 = 2 - 0$ einzusehen, muß ich eben das Verhältnis, welches die Additionsgleichung $3 + 2 = 0 + 5$ ausspricht, mir zum Bewußtsein bringen. Es bleibt also dabei, daß beide Gleichungen denselben zugrunde liegenden Sachverhalt aussprechen, also logisch reziprok sind. Aber sofern dieser zugrunde liegende Sachverhalt, nämlich das Stellverhältnis, sich direkt in der Subtraktion ausspricht (das Minuszeichen kann geradezu als Ausdruck des Stellverhältnisses gedeutet werden), ist die Subtraktion der direkte, die Addition der inverse Ausdruck des zugrunde liegenden Sachverhalts. Für die Übertragung aus der einen Ausdrucksform in die andere gilt die Regel: daß der Stellproportion die Additionsgleichung aus den Summen der äußeren und inneren Glieder entspricht und umgekehrt; z. B. der Subtraktionsgleichung $5 - 3 = 2 - 0$ entspricht die Additionsgleichung $3 + 2 = 0 + 5$.

Diese Erklärung der Subtraktion ist nun nicht bloß in sich äußerst einfach, da mit der Reihenfolge der Zahlen die Stellverhältnisse unter diesen, welche die Subtraktion unmittelbar begründen, ohne weiteres gegeben sind, sondern namentlich bietet sie die denkbar einfachste Lösung von Problemen, welche den Arithmetikern eine schier unglaubliche Mühe gekostet haben: den Problemen der Null und der negativen Zahl. Das hat uns als Schuljungen schon gequält, daß man in der Arithmetik nicht bloß, was schon schwer genug fällt, mit dem Nichts, sondern mit dem Weniger-als-nichts arbeiten und es in seinen Kopf bringen soll; daß es möglich sein soll, nicht bloß gleichviel von gleichviel, sondern mehr von weniger „abzuziehen". Hier versagt sofort jede Auffassung, die irgend noch Zahlen wie Dinge behandelt. Aber auch als inverse Operation zu der des Zusammentuns läßt sich die Subtraktion hier nicht mehr verstehen. Dagegen wenn es sich um eine Verhältnisgleichung handelt, so ist nichts einfacher, als daß ein Verhältnis als solches im Ausdruck umkehrbar ist. Keinem Schuljungen macht das Schwierigkeit, daß mit einem Mehr zugleich ein Weniger, mit dem So-viel-mehr das So-viel-weniger gegeben ist. Dem entspricht in unserer Deutung die doppelseitige Auffaßbarkeit des Stellverhältnisses. Ist die Stellung von 2 gegen 1 bestimmt, so ist es damit auch die Stellung von 1 gegen 2; ist jene auszudrücken durch die Stellung von 1 gegen 0, so diese folgerecht durch die von 0 gegen 1; diese beiden Ausdrücke sind zueinander einfach reziprok; wenn immer der eine, ist auch der andere möglich und begründet. In unserer Symbolik drückt sich dies einfach aus durch die Umkehrung der Proportion:

$$2 - 1 = 1 - 0,$$
$$0 - 1 = 1 - 2;$$

d. h. also nicht: 2 weniger als 1 ist 1 weniger als **keins**, sondern: 1 hat zu 2 dasselbe Stellverhältnis wie 0 zu 1.

Es ist dies sogar der denkbar direkteste Ausdruck dafür, daß man von 1 auf 2 in derselben Weise gelangt wie von 0 auf 1.

Hierdurch ist ohne weiteres auch die Bedeutung der Addition und Subtraktion für die Anzahl: eben der Begriff von 1 mehr, 1 weniger gegeben. Unsere Gleichungen können ebensowohl gelesen werden: 2 ist, gegen 1, 1 mehr, wie nach der Ordnungsfunktion der Zahl: eine Stelle weiter; 1 ist, gegen 2, 1 weniger, wie nach der Ordnungsfunktion: eine Stelle zurück. $1 - 0$ („wie sich der Stelle nach 1 zu 0 verhält"), heißt nach der Anzahl: eins mehr; $0 - 1$ (wie sich 0 zu 1 verhält): eins weniger. Man braucht dann nur noch durch Definition zu setzen: $1 - 0 = +1$ (was der oben gegebenen Erklärung des $+$ entspricht), $0 - 1 = -1$ (indem der ursprüngliche Ausgang der Zählung, sofern nichts anderes bestimmt ist, vorausgesetzt bleibt, also nicht hingeschrieben zu werden braucht, analog der Weglassung der 1 als Faktors), so hat man ohne weiteres die Begriffe der positiven und negativen Zahlen, im Unterschied von den absoluten, d. h. außer bestimmter Vergleichung (dem Stellverhältnis nach) gedachten. Der Unterschied liegt, wie man sieht, darin, daß bei den absoluten Zahlen oder „numerischen Werten" überhaupt nur an eine Zählung gedacht, bei den relativen verschiedene (dem Ausgangspunkt nach verschiedene) Zählungen in Betracht gezogen werden. Da aber die Zahlreihe Allgemeinausdruck des Zählverfahrens sein soll, so ist es gerechtfertigt, die Zulässigkeit relativer Zählungen in ihr von Anfang an mit zum Ausdruck zu bringen; dann treten an die Stelle der absoluten die positiven Zahlen, und die Null und die negativen Zahlen sind hinzuzufügen, so daß die Minusreihe über die Null hinaus in der von irgendeiner positiven Zahl zur Null beschriebenen Richtung weitergeht, wie es in der Arithmetik dargestellt zu werden pflegt. Die Null bildet den gemeinsamen Ausgangspunkt der Plus- und Minusreihe, weil sie die gemeinschaftliche Vergleichsgrundlage des Mehr und Weniger, d. h. weil sie stets den einen Terminus des Stellverhältnisses bildet. Zugleich dient die Null zum Ausdruck der Gleichheit, des Weder-mehr-noch-weniger: $1 - 1 = 0$, d. h. 1 ist gegen 1 weder mehr noch weniger. Das Verhältnis irgendeiner Zahl n zu 0 wie das der 0 zu irgendeiner Zahl n hat, wenn n sich der 0 unbegrenzt nähert, gleicherweise zur Grenze das Verhältnis 0 zu 0 oder ± 0.

§ 10. (*Kritische Anmerkung.*) Einige kritische Bemerkungen über sonstige Ableitungen der Addition und Subtraktion scheinen nicht überflüssig zu sein. Den vollen Gegensatz zu unserer Ableitung zeigt wiederum die (ältere) Arithmetik von Stolz [*167*]. Da wird durch ausdrücklich willkürliche Festsetzung dekretiert: Für den Fall, daß $a < b$ in der Subtraktion, soll ein und nur ein Ding (dafür hernach: Größe) existieren, das mit $(a - b)$ bezeichnet wird und der Gleichung genügt $(a - b) + b = a$. Das heißt, wenn ich recht verstehe: für den Fall, daß es keine Lösung der Aufgabe, b von a abzuziehen, gibt, setze man, es gäbe doch eine, und bezeichne das diese Lösung darstellende Ding, das es nicht gibt, mit dem genannten Ausdruck. „So wie das System der rationalen Zahlen hier abgeleitet ist," hieß es in jenem Buche, „besteht es aus zwei verschiedenartigen Teilen, der eine (die natürlichen Zahlen) hat eine reale Bedeutung, der andere existiert nur auf dem Papier." Von der Bruchzahl hieß es geradezu — dasselbe würde aber nach dem Gesagten von der negativen Zahl gelten —: sie ist nichts als dieses Zeichen. Diese Ungleichheit lasse sich indessen leicht heben; nämlich wie? indem man — auch die natürlichen Zahlen nur als ein System gesetzmäßig gebildeter Zeichen ansieht! Das heißt dann „Erweiterung des Zahlbegriffs". Man kann ebenso gut den Begriff des Messers erweitern auf Gegenstände ohne Heft und Klinge.

Worin liegt der ursprüngliche Fehler? Darin, daß man