Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften

Natorp, Paul

Leipzig [u.a.], 1910

§ 10. Kritische Anmerkung.

urn:nbn:de:hbz:466:1-35817

schaftliche Vergleichsgrundlage des Mehr und Weniger, d. h. weil sie stets den einen Terminus des Stellverhältnisses bildet. Zugleich dient die Null zum Ausdruck der Gleichheit, des Weder-mehr-noch-weniger: $1 - 1 = 0$, d. h. 1 ist gegen 1 weder mehr noch weniger. Das Verhältnis irgendeiner Zahl n zu 0 wie das der 0 zu irgendeiner Zahl n hat, wenn n sich der 0 unbegrenzt nähert, gleicherweise zur Grenze das Verhältnis 0 zu 0 oder ± 0.

§ 10. (*Kritische Anmerkung.*) Einige kritische Bemerkungen über sonstige Ableitungen der Addition und Subtraktion scheinen nicht überflüssig zu sein. Den vollen Gegensatz zu unserer Ableitung zeigt wiederum die (ältere) Arithmetik von Stolz [*167*]. Da wird durch ausdrücklich willkürliche Festsetzung dekretiert: Für den Fall, daß $a < b$ in der Subtraktion, soll ein und nur ein Ding (dafür hernach: Größe) existieren, das mit $(a - b)$ bezeichnet wird und der Gleichung genügt $(a - b) + b = a$. Das heißt, wenn ich recht verstehe: für den Fall, daß es keine Lösung der Aufgabe, b von a abzuziehen, gibt, setze man, es gäbe doch eine, und bezeichne das diese Lösung darstellende Ding, das es nicht gibt, mit dem genannten Ausdruck. „So wie das System der rationalen Zahlen hier abgeleitet ist," hieß es in jenem Buche, „besteht es aus zwei verschiedenartigen Teilen, der eine (die natürlichen Zahlen) hat eine reale Bedeutung, der andere existiert nur auf dem Papier." Von der Bruchzahl hieß es geradezu — dasselbe würde aber nach dem Gesagten von der negativen Zahl gelten —: sie ist nichts als dieses Zeichen. Diese Ungleichheit lasse sich indessen leicht heben; nämlich wie? indem man — auch die natürlichen Zahlen nur als ein System gesetzmäßig gebildeter Zeichen ansieht! Das heißt dann „Erweiterung des Zahlbegriffs". Man kann ebenso gut den Begriff des Messers erweitern auf Gegenstände ohne Heft und Klinge.

Worin liegt der ursprüngliche Fehler? Darin, daß man verlangt, Zahlen sollten Begriffe oder vielmehr Abbilder von Dingen, von existierenden Gegenständen sein; das versteht man unter: „reale Bedeutung haben"; statt daß es sich um reine Funktionsbegriffe handelt. Finden sich dann sogenannte Zahlen, welche jene Forderung offenbar nicht erfüllen (während es vielleicht ganz richtig gebildete Funktionsbegriffe sind), so erklärt man sie für etwas, was bloß auf dem Papier existiere.

Zwar trat neben diese „analytische" Ableitung (die vielmehr nominalistisch heißen sollte) noch eine zweite, „synthetische", die offenbar realistischer sein wollte. „Manchmal (!) lassen sich aus den natürlichen Zahlen von einer Benennung durch Hinzufügung einer weiteren Bestimmung zwei Reihen von benannten Zahlen ableiten, entspringend aus zwei Einheiten, welchen selbst, sowie je zwei Zahlen der beiden Reihen vom nämlichen numerischen Wert, die Eigenschaft beigelegt wird, daß sie bei ihrer Vereinigung einander vernichten." Solche Zahlen heißen entgegengesetzte Zahlen. Beispiele eines solchen Gegensatzes bieten dar: Vermögen und Schulden, die geradlinigen Wege vor- und rückwärts usw. Man nennt die beiden entgegengesetzten Einheiten 1 und 1′, setzt durch Definition (dies ganz willkürlich!) die eine > 0, die andere < 0, so sind es dann die positiven und negativen Zahlen. Also man beobachtet an Dingen die Eigentümlichkeit, daß sie einander entgegengesetzt sein, d. h. „in der Vereinigung einander vernichten" können (schon bei Dingen eine schwierige Sache), und überträgt diese vermeinte Eigenschaft von Dingen auf Zahlen, ohne irgendwelche Rechenschaft davon zu geben, wie aus der Natur der Zahl eine solche Eigenschaft etwa folge; wie zwei Zahlen es anfangen sollen, erstens sich, nachdem sie getrennt waren, zu vereinigen, zweitens in dieser Vereinigung und kraft ihrer einander zu vernichten. Rein formalistisch übrigens, ohne jeden Versuch einer Begründung, wird hierbei das Verhältnis zur

Null eingeführt. Es ist schwer zu verstehen, wie bei einer solchen Erklärung sonst logisch interessierte Mathematiker sich auch nur vorübergehend[1]) haben beruhigen können.

Hingegen protestiert z. B. schon Durège [*42*] nachdrücklich dagegen, daß man die Existenz und die Bedeutung der negativen Größen etwa in einem Gegensatz wie zwischen rechts und links, vorwärts und rückwärts, Bejahung und Verneinung, Vermögen und Schulden, oder überhaupt in irgendeiner ihrer mannigfachen Anwendungen begründet sein lasse, und nicht lediglich in der Definition, durch die sie eingeführt werden. Allein für diese Definition genügt ihm als Begründung die einfache Forderung, daß den arithmetischen Grundoperationen allgemeine Anwendbarkeit zukomme; das von Hankel aufgestellte, neuerdings von den Arithmetikern mit Recht skeptisch angesehene Prinzip der „Permanenz der formalen Gesetze". Hankel selbst, ein feinsinniger, philosophisch und historisch gebildeter Mathematiker, betont wenigstens [*65*], daß doch eine Zahl heute nicht mehr, wie für die Pythagoreer, ein Ding, eine Substanz bedeute; die Frage nach der Existenz der Zahl könne nur auf das „denkende Subjekt" oder das „gedachte Objekt" (das Objekt als gedachtes!) bezogen werden. Er bringt in Erinnerung, daß nach Gauß die „Vernichtung in der Vereinigung", durch die allerdings auch er den Gegensatz des Plus und Minus erklärt, doch nicht Substanzen, sondern nur Relationen zwischen zwei Gegenständen betreffen sollte. Aber freilich Relationen von Gegenständen. Und Hankel selbst weiß sich schließlich nur zu helfen durch die Unterscheidung zwischen „formalen" (d. h. durch

1) S. Stolz und Gmeiner, Theoretische Arithmetik, 1892, z. B. S. 51. Durchweg ist diese jüngere Darstellung den neueren Anschauungen angepaßt. Es wurde dennoch auf das ältere Buch Bezug genommen, weil es typisch ist für eine Ansicht, die lange Zeit fast die allgemein herrschende war und auch heute wohl noch hier und da begegnet.

Willkürdefinition gesetzten) und „aktuellen" Zahlen, welche letzteren in „wirklichen Größen" (z. B. räumlichen) ihre Repräsentation finden; die Grenze zwischen beiden sei übrigens fließend. Solange es hierbei bleibt, wird man der Berufung auf Beispiele, wie rechts und links usw., offenbar nicht entgehen. Das einzig Förderliche liegt hier darin, daß doch wenigstens auf die Relation zurückgegangen wird. An dieser war der Gegensatz leicht aufzuzeigen; aber nicht als „Vernichtung in der Vereinigung", sondern als das einfache und klare Verhältnis der Reziprozität.

Lipps [*105*, *106*] kennt die Reziprozität des Verhältnisses, aber benutzt sie nicht zur Aufstellung der Subtraktion sogleich in voller Allgemeinheit. Er rügt, daß man zur Begründung des kommutativen und assoziativen Gesetzes der Addition nicht die homogene Beschaffenheit der Zahlreihe ausdrücklich herangezogen und zur Grundlage der Beweisführung gemacht habe. Dieser Vorwurf scheint mir namentlich Dedekind gegenüber nicht begründet, der die Homogeneïtät nicht bloß „unausgesprochen" zugrunde legt, sondern die Zahlreihe von Anfang an durch die immer gleiche Beziehung von Glied zu Glied in der Kette begründet und die Einzelglieder ausschließlich durch ihre Stelle in der Kette bestimmt, diese also von Anfang an als homogen vorausgesetzt hat.

Ausdrücklich auf die reine Verhältnisbetrachtung gründet dagegen die Addition wie die Subtraktion Simon [*161*], von dem ich die entscheidende Anregung zu meiner Auffassung empfangen zu haben mit Dank bekenne. Als Didaktiker und Methodiker des Mathematikunterrichts ist Simon davon durchdrungen, daß der mathematische Unterricht die eigentliche Denkschule sein müsse, und empfindet aus diesem pädagogischen Motiv stärker als die große Mehrheit der Mathematiker das Bedürfnis einer „erkenntniskritischen" Grundlage. Die reine Arithmetik ist ihm, wie Frege, nicht nur eine, sondern geradezu die reine Vernunftwissenschaft. Einheit und Vielheit, sagt er, sind „subjektive“ Begriffe, sie liegen nicht in den Dingen, sondern „in uns“. — Dieser Ausdruck ist vielleicht nur etwas zu sehr philosophisch. Aber es ist das Richtige gemeint: daß die mathematischen Begriffe Funktionsbegriffe, nicht Dingbegriffe sind. In der Begründung der Rechnungsarten nun geht Simon durchweg aus vom Gesichtspunkt der Vergleichung. Aus ihr entspringen die ersten allgemeinen Zahlbegriffe: mehr, gleichviel, weniger; diese zu präzisieren dient die Subtraktion, die also ebenso ursprünglich (er hätte sagen dürfen: ursprünglicher) ist wie die Addition. Nur sekundär kann die Vergleichung auch dargestellt werden als Trennung und als Verminderung; aber nicht nur bleibt die Vergleichung die Grundoperation, sondern der Gesichtspunkt der Trennung versagt schon bei der Subtraktion $a - a$, die Verminderung (die hier zur Not noch standhält) scheitert an der Subtraktion $a - b$ für den Fall, daß $b > a$. Unter dem Gesichtspunkt der Vergleichung dagegen ergibt sich unmittelbar: $8 - 5 = 3$ in der Bedeutung: 8 ist 3 mehr als 5; $5 - 8 = -3$: 5 ist 3 weniger als 8; beides ist miteinander gesetzt, denn die Relationen des Mehr und Weniger sind zueinander reziprok. Also bedeuten die positiven und negativen Zahlen einfach die „Abstufungen der Beziehungsbegriffe mehr und weniger“. Erst davon abgeleitet ist die Bedeutung der positiven und negativen als unter sich entgegengesetzter Zahlen. In voller Klarheit sagt Simon: die negativen Zahlen entspringen aus der Vergleichung, sind also Zahlen; ihr ursprünglicher Gegensatz (d. h. das Gegenseitigkeitsverhältnis der Begriffe mehr und weniger) hat den Gegensatz der Operationen erst zur Folge.

Das sind die wesentlichen Grundlagen der oben gegebenen Erklärung, welche denselben Grundgedanken nur mehr zu entwickeln bemüht war. Es bedurfte besonders noch der Erklärung, wie man zu den „Abstufungen“ des Mehr und

Weniger gelangt. Das kommt zur vollen Klarheit erst durch die Einführung des Begriffs verschiedener Zählungen oder den Begriff der „relativen" Zählung, d. h. einer solchen, die eine andere sich voraussetzt, im Unterschied von der absoluten, d. h. keine andere voraussetzenden. Dies führt dann weiter zur Einführung der Null in unserem Sinne, und schließlich zum Ausgang von der reinen, von Anfang an zweiseitigen Relation überhaupt.

Auch nach Russells und Couturats Erklärung sind die positiven und negativen Zahlen (ebenso die Brüche) nicht sowohl Zahlen als vielmehr Operationen „oder besser Beziehungen" zwischen den ganzen absoluten Zahlen, keineswegs mit diesen zu identifizieren. — Hieran ist nur mangelhaft, daß nicht erkannt ist, daß Zahlbegriffe überhaupt Beziehungsbegriffe, „absolute" Zahlen nicht außer und vor aller Beziehung gegebene, sondern nur auf eine einzige, fest gedachte Bezugsgrundlage zurückbezogene sind. Sie stellen die Zahl in der Unbeweglichkeit des reinen Funktionsgesetzes, die relativen Zahlen in der ganzen Beweglichkeit der Funktion selbst dar; ganz wie Plato in der späteren, tieferen Entwicklung seiner Lehre die Idee in starrer Ruhe und in ihrer Selbstbewegung unterscheidet.

§ 11. (*Multiplikation.*) Mit der gewöhnlichen Erklärung der Multiplikation verhält es sich ähnlich wie mit der der Addition: sie lautet einfach, enthüllt aber bei näherer Prüfung kaum überwindliche Schwierigkeiten, die sich anfangs nur versteckten, weil man mit Zahlen wie mit Dingen umgehen zu können meinte.

Multiplikation, so sagen die Arithmetiker fast ausnahmslos, ist nur Summierung gleicher Summen, also nur eine verkürzte Form der Addition, für den besonderen Fall, daß die Summanden gleich sind.

An dieser Erklärung ist nicht bloß das auszusetzen, daß sie sogleich auf die Eins als Multiplikanden nicht zutrifft,