Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften

Natorp, Paul

Leipzig [u.a.], 1910

§ 11. Multiplikation.

urn:nbn:de:hbz:466:1-35817

Weniger gelangt. Das kommt zur vollen Klarheit erst durch die Einführung des Begriffs verschiedener Zählungen oder den Begriff der „relativen“ Zählung, d. h. einer solchen, die eine andere sich voraussetzt, im Unterschied von der absoluten, d. h. keine andere voraussetzenden. Dies führt dann weiter zur Einführung der Null in unserem Sinne, und schließlich zum Ausgang von der reinen, von Anfang an zweiseitigen Relation überhaupt.

Auch nach Russells und Couturats Erklärung sind die positiven und negativen Zahlen (ebenso die Brüche) nicht sowohl Zahlen als vielmehr Operationen „oder besser Beziehungen“ zwischen den ganzen absoluten Zahlen, keineswegs mit diesen zu identifizieren. — Hieran ist nur mangelhaft, daß nicht erkannt ist, daß Zahlbegriffe überhaupt Beziehungsbegriffe, „absolute“ Zahlen nicht außer und vor aller Beziehung gegebene, sondern nur auf eine einzige, fest gedachte Bezugsgrundlage zurückbezogene sind. Sie stellen die Zahl in der Unbeweglichkeit des reinen Funktionsgesetzes, die relativen Zahlen in der ganzen Beweglichkeit der Funktion selbst dar; ganz wie Plato in der späteren, tieferen Entwicklung seiner Lehre die Idee in starrer Ruhe und in ihrer Selbstbewegung unterscheidet.

§ 11. (*Multiplikation.*) Mit der gewöhnlichen Erklärung der Multiplikation verhält es sich ähnlich wie mit der der Addition: sie lautet einfach, enthüllt aber bei näherer Prüfung kaum überwindliche Schwierigkeiten, die sich anfangs nur versteckten, weil man mit Zahlen wie mit Dingen umgehen zu können meinte.

Multiplikation, so sagen die Arithmetiker fast ausnahmslos, ist nur Summierung gleicher Summen, also nur eine verkürzte Form der Addition, für den besonderen Fall, daß die Summanden gleich sind.

An dieser Erklärung ist nicht bloß das auszusetzen, daß sie sogleich auf die Eins als Multiplikanden nicht zutrifft, denn Eins ist keine Summe; sondern wenn man auch den Weg fände, sie auf diesen Fall künstlich auszudehnen, jedenfalls rückt sie die Hauptsache aus den Augen: daß die Zahl hier, gegenüber der Addition und Subtraktion, in einer neuen Funktion auftritt, also, da die ursprüngliche Funktion der Zählung ohne Zweifel auch darin liegt, gleichzeitig in zwei verschiedenen Funktionen. Summen werden summiert, d. h. Zählungen werden gezählt. Bisher aber wußten wir nur, daß die Zahl zählt, nicht daß sie gezählt wird. Wir hatten es nur mit verschiedenen Zählungen, d. h. Weisen des Zählens zu tun; was gezählt wird, danach zu fragen war bis dahin überhaupt keine Veranlassung. Soll die Frage nachträglich beantwortet werden, so läßt sich nur sagen: Einheiten werden gezählt. Denn eine Vielheit entsteht durch wiederholte Setzung der Einheit, und das Wieviel dieser Einheiten bestimmen heißt Zählen. Kann man überhaupt etwas anderes zählen als Einheiten?

Nein: also, wenn man statt Einheiten, nämlich der ursprünglichen Einheiten, Vielheiten dieser ursprünglichen Einheiten zählt, so setzt man damit diese Vielheiten als neue Einheiten. Damit relativiert sich der Sinn der zu zählenden Einheit selbst, so wie bei der Addition und Subtraktion die Null sich relativierte. Diese Relativierung der zu zählenden Einheit ist die Grundlage der Multiplikation und Division.

Schon Aristoteles unterscheidet die zählende und die gezählte Zahl. Die Zahl als Zähler ist es, mit der wir im Stellverhältnis, daher in der Addition und Subtraktion, allein zu tun hatten. Sie tritt in ihrer Eigenheit besonders deutlich hervor in der Funktion der Ordnungszahl; obgleich es nicht richtig wäre, die Addition und Subtraktion ausschließlich auf die Ordnungsbedeutung der Zahl zu gründen; $+1$, -1 bedeutet, wie wir gesehen haben, ebensogut nach der Anzahl eins mehr, eins weniger, wie nach der Ordnungszahl eine Stelle weiter, eine Stelle zurück. Aber man zählt eben mit 1, 2 . . ., welche zunächst der Stelle nach, als voraufgehend und nachfolgend, sich unterscheiden, und erst dann auch die Vielheiten 1, 2, 3 . . . zu bezeichnen dienen. Aber eben Vielheiten von Einheiten, im Sinne der Einer; diese sind hier das Gezählte. Man sollte im Ausdruck bestimmt unterscheiden: die Eins als zählend, den Einer als das, was gezählt wird. Dies letztere ist zunächst und unmittelbar die Anzahl Eins, und nur sofern auch die Anzahlen sich selbst wiederum ordnen (nämlich in der Erzeugung der Vielheiten der Einer dem Zweier, dieser dem Dreier usf., als Teil dem Ganzen, vorhergeht), also die Ordnungszahlen sich den Anzahlen eindeutig zuordnen, dient der Ausdruck der Vielheiten 1, 2, . . . zugleich für die Ordnungszahlen.

Wie nun aber die Null, die Eins, und so jede Zahl im Stellverhältnis sich relativierte, d. h. in verschiedenen, aber aufeinander bezogenen Zählungen dasselbe bald als Stelle Null, bald als Stelle Eins, Zwei usf. fungierte, so relativiert sich ebenfalls die Einheit in der anderen Bedeutung, der des Gezählten, indem irgendeine Vielheit aus den ursprünglichen Einheiten wieder die Funktion jener Einheit übernimmt, aus der andere Vielheiten sich bilden lassen; damit ist dann die Möglichkeit der „Vervielfältigung" (Multiplikation) gegeben.

Zunächst, wie im Stellverhältnis jede Stelle (1, 2, . . .) auszudrücken war durch ihr Verhältnis zur Ausgangsstelle Null, so ist in dem neuen Verhältnis, das wir jetzt zu betrachten haben, eine jede Vielheit auszudrücken im Verhältnis zu der Einheit, deren Vielheit sie ist:

$$1 = 1 \cdot 1 \text{ (1 Einer)},$$
$$2 = 2 \cdot 1 \text{ (2 Einer) usf.}$$

Und wie nach dem Stellverhältnis eine Gleichung von Verhältnissen (Stellproportion) sich ergab durch Vergleichung verschiedener, nämlich dem Ausgangspunkt nach verschiedener Zählungen, indem eine von 0 verschiedene Stelle einer ersten Zählung in einer neuen zur 0 gemacht und von ihr aus mit 1, 2, . . . gezählt, dann diese neue Zählung, unter Festhaltung und auf Grund ihrer Beziehung zur ursprünglichen, mit dieser verglichen wurde, so entsteht eine neue Gleichung von Verhältnissen (also Proportion) in jener anderen, noch unbenannten Funktion der Zahl durch Vergleichung verschiedener, nämlich der Einheit nach verschiedener Zählungen, indem eine von 1 verschiedene Zahl (d. h. Vielheit) der ersten Zählung, z. B. 2, in einer neuen Zählung als Einheit genommen und mit ihr weiter gezählt wird: ein Zweier, zwei Zweier usf., und dann solche verschiedene Zählungen, auf Grund der Beziehung, gemäß welcher jede folgende aus der vorigen abgeleitet (d. h. von ihr aus bestimmt) wurde, miteinander verglichen werden, z. B. 2 Einer sind 1 Zweier, 4 Einer sind 2 Zweier, d. h. den Vielheiten 2, 4, 6 . . . der Zählung mit der ursprünglichen Einheit entsprechen die Vielheiten 1, 2, 3 . . . der neuen Zählung, die mit der Zweiheit der ersten Zählung als neuer, abgeleiteter Einheit vollführt wird. Als neuer Einheit, denn anders als mit einer Einheit läßt sich nicht zählen; aber als Einheit fungiert jetzt die Zweiheit der ursprünglichen Zählung, genauer: die Einheit der neuen Zählung entspricht der Zweiheit der ursprünglichen.

Auch hier ist, wie bei der Addition, der Begriff einer neuen Zählung, also überhaupt verschiedener (hier: der Einheit nach verschiedener) Zählungen nicht zu entbehren. Es ist nicht anders als in verschiedenen Zählungen möglich, daß etwas „Ein Zweier“, also zugleich Eins und Zwei sei. Die Zwei einer Zählung zur Eins machen kann man nicht, indem man in dieser selben Zählung verbleibt, sondern nur indem man eine neue Zählung aufstellt, die der ersten so entspricht, daß ihre Einheit der Zweiheit der ursprünglichen Zählung korrespondiert; in symbolischer Darstellung:

‖ ‖ ‖ . . .

| | | . . .

Wir nennen diese neue Funktion der Zahl die **m e t r i s c h e**, weil die Einheit die ihr entsprechenden Vielheiten mißt. Zwei sind zwei Einer, d. h. 2 gemessen durch 1, oder es sind 2, wenn das Maß 1 ist. Dieser Begriff des Maßes schließt nichts von Raum- oder Zeitbeziehung ein (während die Bezeichnung: geometrisches Verhältnis, geometrische Proportion, unnötiger und ungehöriger Weise Raumverhältnisse herbeizieht). Auch eine Strecke oder sonst ein räumliches oder auch zeitliches Gebilde ist Maß nur, sofern es zählt, d. h. als Einheit zu jeder Vielheit diese selbst mißt, und nicht, sofern es räumlich oder zeitlich ist.

Soll es aber ein Verhältnis (eben das metrische) sein, welches die Multiplikation ausdrückt, so muß die Multiplikationsgleichung eine versteckte Proportion sein, deren viertes Glied denn auch nicht schwer zu finden ist. Liest man $2 \cdot 3 = 6$: „2 Dreier sind 6“, so fragt sich natürlich: was denn? und die Antwort lautet dann notwendig: 6 Einer. Umständlicher: mit der 3, als abgeleiteter Einheit, 2 gezählt, ist dasselbe, wie mit der ursprünglichen Einheit 6 gezählt. Es ist dasselbe, d. h. keineswegs, es sei logisch damit identisch, sondern es sind gleichwertige, sich entsprechende, durcheinander ersetzbare Zählungsweisen; allemal wo die eine Art der Zählung möglich ist, ist es auch die andere.

Ich habe bei der Addition unterlassen, die besonderen Gesetze, welche die Arithmetik für diese Operationen aufstellt: das kommutative, assoziative und distributive Gesetz ausdrücklich abzuleiten, weil die Ableitung keine besonderen Schwierigkeiten bietet; hier bei der Multiplikation mag es dagegen am Platze sein, wenigstens das kommutative Gesetz, dessen Begründung den Arithmetikern oft unnötige Mühe gemacht hat, in aller Kürze abzuleiten. Völlig unbrauchbar ist für uns irgendeine Ableitung, die, statt in den Begriffen der Arithmetik zu verbleiben, auf räumliche Anschauung zurückgreift. Setzt man zwei Reihen von je drei Punkten untereinander

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

so sieht man freilich auf einen Blick, daß man hier ebensowohl, wenn man die horizontale Folge ins Auge faßt, drei Reihen von je zwei, wie, wenn die vertikale, zwei Reihen von je drei Gliedern, und dabei doch beide Male dieselben Punkte hat. So mag der Satz $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$ manchem wohl gar als identischer erscheinen. Aber das ist eine handgreifliche *petitio principii*, daß man nach Belieben den Multiplikator zum Multiplikanden machen dürfe und umgekehrt; gerade dafür wird vielmehr der Beweis verlangt. Woher überhaupt die zweidimensionale Betrachtung, da man doch immer gesagt hat, daß die Zahlreihe nur eine Dimension habe? Stellt man die 6 Punkte vielmehr, wie es sich gebührt, in eine Reihe, so schwindet jeder Schein der Identität; man hat zwar noch dieselben 6 Punkte, aber es kann auch nicht einmal so scheinen, als ob mit der Auffassung derselben als $3 \cdot 2$ die andere Auffassung als $2 \cdot 3$ von selbst gegeben sei.

In den zwei Dimensionen bergen sich die zwei grundverschiedenen Funktionen der Zahl als zählende und als gezählte. Diese sind an sich schlechthin unvertauschbar; nicht sie werden vertauscht, wenn ich aus $2 \cdot 3$ $3 \cdot 2$ mache, oder, um den einfachsten Fall zu wählen, 2 Einer als 1 Zweier auffasse. Sondern die Glieder werden vertauscht. Das also steht zu beweisen, daß die Glieder gegeneinander ausgetauscht, das Gezählte zum Zählenden, das Zählende zum Gezählten gemacht werden darf.

Dies ist nun schon bewiesen für den Fall, daß der eine der beiden Faktoren 1 ist. Denn wir fanden als Grundlage der Multiplikation überhaupt: zwei Einer einer Zählung können in einer neuen Zählung als neue Einheit (nämlich als ein Zweier) gesetzt werden. Sie können so gesetzt werden, weil sie in der Tat auch wiederum Eines sind; wir dürfen in Zurückbeziehung auf das vorige Kapitel einfach sagen: zufolge der dritten Stufe des quantitativen Verfahrens, die eben darin besteht, die vielen Einheiten als eine Vielheit zu setzen. Auf dieser gegebenen Grundlage läßt sich nun leicht das kommutative Gesetz in voller Allgemeinheit beweisen. Nämlich es können die einander entsprechenden Einheiten der a Vielheiten b zu Vielheiten a verbunden werden: die ersten Glieder der a Vielheiten b sind a Glieder, die zweiten sind a, und so fort bis zu den letzten, d. h. $b$ten Gliedern, denn b Einheiten hat jede Vielheit b; also erhält man b Vielheiten a. Dazu ist kein Untereinanderschreiben, keine räumliche Anordnung irgendeiner Art erforderlich. Man kann ebensogut an zwei Takten von je drei Zeiteinheiten sich klar machen, daß in jedem Takt ein erster, ein zweiter, ein dritter Taktteil ist, also zwei erste, zwei zweite, zwei dritte, mithin dreimal zwei. Aber die Zeitanschauung ist als solche für den Beweis ebenso gleichgültig wie die Raumanschauung.

§ 12. (*Division.*) Wie der Gewinn unserer Erklärung der Addition sich bei der der Subtraktion zeigte, so zeigt sich der Gewinn unserer Erklärung der Multiplikation, indem wir das gleiche Erklärungsprinzip auf die Division übertragen. Die gewöhnliche Begründung der Division durch die Teilung als Umkehrung der Vervielfältigung führt zu einem reinen Ergebnis einzig für den Fall, daß der Dividend ein ganzes Vielfaches des Divisors ist. Aber auch wenn man sich gestattet, wie in einem ungenauen Haushalt Reste stehen zu lassen, so bleibt wenigstens gefordert, daß der Dividend größer als der Divisor sei. Eine Teilung des Weniger durch Mehr hat keinen Sinn, da das Mehrere