der Multiplikation überhaupt: zwei Einer einer Zählung können in einer neuen Zählung als neue Einheit (nämlich als ein Zweier) gesetzt werden. Sie können so gesetzt werden, weil sie in der Tat auch wiederum Eines sind; wir dürfen in Zurückbeziehung auf das vorige Kapitel einfach sagen: zufolge der dritten Stufe des quantitativen Verfahrens, die eben darin besteht, die vielen Einheiten als eine Vielheit zu setzen. Auf dieser gegebenen Grundlage läßt sich nun leicht das kommutative Gesetz in voller Allgemeinheit beweisen. Nämlich es können die einander entsprechenden Einheiten der a Vielheiten b zu Vielheiten a verbunden werden: die ersten Glieder der a Vielheiten b sind a Glieder, die zweiten sind a, und so fort bis zu den letzten, d. h. $b$ten Gliedern, denn b Einheiten hat jede Vielheit b; also erhält man b Vielheiten a. Dazu ist kein Untereinanderschreiben, keine räumliche Anordnung irgendeiner Art erforderlich. Man kann ebensogut an zwei Takten von je drei Zeiteinheiten sich klar machen, daß in jedem Takt ein erster, ein zweiter, ein dritter Taktteil ist, also zwei erste, zwei zweite, zwei dritte, mithin dreimal zwei. Aber die Zeitanschauung ist als solche für den Beweis ebenso gleichgültig wie die Raumanschauung.

§ 12. (*Division.*) Wie der Gewinn unserer Erklärung der Addition sich bei der der Subtraktion zeigte, so zeigt sich der Gewinn unserer Erklärung der Multiplikation, indem wir das gleiche Erklärungsprinzip auf die Division übertragen. Die gewöhnliche Begründung der Division durch die Teilung als Umkehrung der Vervielfältigung führt zu einem reinen Ergebnis einzig für den Fall, daß der Dividend ein ganzes Vielfaches des Divisors ist. Aber auch wenn man sich gestattet, wie in einem ungenauen Haushalt Reste stehen zu lassen, so bleibt wenigstens gefordert, daß der Dividend größer als der Divisor sei. Eine Teilung des Weniger durch Mehr hat keinen Sinn, da das Mehrere im Minderen nicht einmal, geschweige mehrmals, sondern gar nicht enthalten ist und, was nicht darin ist, auch nicht herausgeholt werden kann. So reicht diese Erklärungsart nur für eine äußerst enge Auffassung der Division zu, und man braucht dann erst künstliche Hilfen, um die zu enge Auffassung hinterher so zu erweitern, wie es die Bewegungsfreiheit der Rechnung gebieterisch fordert.

Statt dessen gestattet unsere Auffassung der Multiplikation ohne weiteres aufzustellen: da jede Vielheit einer gegebenen Einheit auch wieder als Einheit zu einer neuen Vielheit verstanden werden kann, also der Begriff der zählbaren Einheit gleichgültig dagegen ist, ob die Einheit als ursprüngliche oder aus anderen Einheiten abgeleitete angesehen wird, so kann „die" Einheit sofort als aus irgendwelchen, beliebig vielen Einheiten durch Multiplikation gebildet, also nach gewöhnlicher Bezeichnung beliebig teilbar angesehen werden. Dasselbe gilt dann folgeweise für jede aus der gedachten Einheit dargestellte Vielheit.

D. h., die Division ist gegeben mit eben jenem Verhältnis von Vielheit und Einheit, welches nur in anderer Wendung die Multiplikation zum Ausdruck brachte. Und zwar zeigt sich sofort die Division als der direktere Ausdruck dieses Verhältnisses. $2 \cdot 3 = 6 \cdot 1$ heißt: mit der 3 als neuer Einheit 2 gezählt, gilt gleichviel, wie mit der ursprünglichen Einheit 6 gezählt. Damit ist aber schon gesagt: 6 ist zur 3 (als relativer Einheit), was 2 zur ursprünglichen Einheit (nämlich das Doppelte); und eben dies spricht sich direkt aus in der Proportion (die in der Multiplikation also schlummerte) $6 : 3 = 2 : 1$. Nun gestattet jedes Verhältnis als solches eine Umkehrung; es gilt also ohne weiteres auch die Proportion $1 : 2 = 3 : 6$, womit die Division auch des Weniger durch Mehr, oder der Bruch in voller Allgemeinheit gegeben ist.

Also nicht: 3 verändert durch 2 wird 6, und 6 umgekehrt verändert durch 2 wird wieder 3. Das ließe sich ohne geometrische oder sonstige existentielle Voraussetzungen überhaupt nicht verständlich machen, da Zahlen keine Veränderung vertragen, sondern als solche nur sind. Sondern 6 hat zu 3 die unveränderliche Relation, welche ausdrückbar ist durch die allgemeine Relation 2 : 1; ja man kann sagen 6 ist 2, wenn nämlich als (neue, relative) Einheit 3 angenommen ist; sowie in der Addition 5 2 ist, sofern von 3 als (neuer, relativer) 0 aus gezählt wird. Und so die Division: 3 hat zu 6, indem beide immer und ewig, unveränderlich sind, auch immer und ewig dasselbe seiende Verhältnis, nämlich das von 1 zu 2; was natürlich nur zutrifft, wenn man die 2 als neue Einheit versteht; denn ursprünglich gibt es ein metrisches Verhältnis nur zur Einheit, wie ein Stellverhältnis nur zur Null. Aber nachdem der Begriff der Einheit, ebenso wie vorher der der Null, sich relativiert hat, indem jede Vielheit wieder als Einheit verstanden werden, also umgekehrt die Einheit jede Vielheit vertreten kann, so läßt sich in dem Verhältnis 1 : 2 die 2 als neue Einheit verstehen, im Verhältnis zu welcher dann die 1 einen unterscheidenden Ausdruck braucht, in diesem Fall $^1/_2$. Die Einführung der Bruchzahl bietet jetzt nicht die geringste Schwierigkeit mehr und behält nicht den mindesten Schein eines bloßen Kunstgriffs zur Erweiterung des Bereiches der Rechnungsoperationen. Ein Halbes ist ein genau so rechtmäßiger arithmetischer Begriff wie ein Doppeltes; beide beruhen genau auf derselben Grundlage: daß 2 Einer 1 Zweier, also 2 wiederum bezüglich 1, 1 bezüglich 2 ist, nicht in derselben, aber in einer neuen Zählung, die indessen zur vorigen in einer genau bestimmten Beziehung steht.

Wie im Stellverhältnis die Auffassung als Verbindung und Trennung oder Vermehrung und Verminderung sich leicht auf die reine Verhältnisbetrachtung zurückführt, so im metrischen Verhältnis die Auffassung als Vervielfältigung und Teilung. Dagegen ist das Umgekehrte nicht möglich, so daß man dann genötigt wird, den Begriff des Verhältnisses hinterher doch zu Hilfe zu nehmen. Dabei wird dann wohl ausdrücklich davor gewarnt, daß man nur ja nicht das Verhältnis mit dem Bruch verwechsle. Als ob es Sinn hätte, 6 in 2 Dreier zu teilen, wenn nicht 6 2 Dreier wären, d. h. 2 wären zur Einheit 3, oder zu 3 sich verhielten wie 2 zu 1. Mit dem Verhältnis 3 : 1 aber hat man ohne weiteres auch das Verhältnis 1 : 3, und dieses ist gleichbedeutend mit dem Bruch $^1/_3$; denn wie 3 : 1 das Verhältnis des Dreifachen zum Einfachen, so bedeutet 1 : 3 das Verhältnis des Einfachen zum Dreifachen, d. h. des Drittels zum Ganzen, da ja ein Dreifaches auch wieder Eines, dessen Einfaches also das Drittel dieser neuen, relativen Eins ist. Es ist dann ebenso leicht, zu den Verhältnissen 3 : 2, 2 : 3 zu gelangen, und so allgemein zum Verhältnis jeder rechtmäßig gesetzten Zahl zu jeder anderen. Auch daß Verhältnisse gezählt und alle Rechenoperationen auf sie angewandt werden, bietet jetzt keine Schwierigkeit mehr, da von Anfang an jede Zahl im metrischen Verhältnis zu 1 zu verstehen ist, also überhaupt in allen Rechnungen Verhältnisse mit Verhältnissen (metrischen wie Stellverhältnissen) wieder in (metrischen und Stell-)Verhältnissen betrachtet werden.

§ 13. (*Kritische Anmerkung.*) Man findet diese einfachste Auffassung der Multiplikation und Division am nächsten entsprechend bei Simon [*161*]. Er erklärt die Multiplikation (S. 73) dadurch, daß eine Mehrheit zur Einheit (Übereinheit) gemacht wird. $a \cdot b$ ist die Zahl, die so aus a „erzählt" ist wie b aus 1. Und entsprechend (S. 79): der Bruch ist keine benannte und keine unbenannte, sondern eine relative Zahl. „Es kann auch eine Zahl (verstehe: Vielheit) wie etwa 8 in unserem Geiste als Einheit gesetzt werden;" dann wird die frühere 1 zu $^1/_8$, der Bruch enthält also außer der reinen Anzahl (dem Zähler) noch eine Beziehung (Relation) seiner Einheit oder seines Nenners zur Haupteinheit. Bei