Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften

Natorp, Paul

Leipzig [u.a.], 1910

§ 13. Kritische Anmerkung.

hinterher doch zu Hilfe zu nehmen. Dabei wird dann wohl ausdrücklich davor gewarnt, daß man nur ja nicht das Verhältnis mit dem Bruch verwechsle. Als ob es Sinn hätte, 6 in 2 Dreier zu teilen, wenn nicht 6 2 Dreier wären, d. h. 2 wären zur Einheit 3, oder zu 3 sich verhielten wie 2 zu 1. Mit dem Verhältnis 3 : 1 aber hat man ohne weiteres auch das Verhältnis 1 : 3, und dieses ist gleichbedeutend mit dem Bruch $^1/_3$; denn wie 3 : 1 das Verhältnis des Dreifachen zum Einfachen, so bedeutet 1 : 3 das Verhältnis des Einfachen zum Dreifachen, d. h. des Drittels zum Ganzen, da ja ein Dreifaches auch wieder Eines, dessen Einfaches also das Drittel dieser neuen, relativen Eins ist. Es ist dann ebenso leicht, zu den Verhältnissen 3 : 2, 2 : 3 zu gelangen, und so allgemein zum Verhältnis jeder rechtmäßig gesetzten Zahl zu jeder anderen. Auch daß Verhältnisse gezählt und alle Rechenoperationen auf sie angewandt werden, bietet jetzt keine Schwierigkeit mehr, da von Anfang an jede Zahl im metrischen Verhältnis zu 1 zu verstehen ist, also überhaupt in allen Rechnungen Verhältnisse mit Verhältnissen (metrischen wie Stellverhältnissen) wieder in (metrischen und Stell-)Verhältnissen betrachtet werden.

§ 13. (*Kritische Anmerkung.*) Man findet diese einfachste Auffassung der Multiplikation und Division am nächsten entsprechend bei Simon [*161*]. Er erklärt die Multiplikation (S. 73) dadurch, daß eine Mehrheit zur Einheit (Übereinheit) gemacht wird. $a \cdot b$ ist die Zahl, die so aus a „erzählt“ ist wie b aus 1. Und entsprechend (S. 79): der Bruch ist keine benannte und keine unbenannte, sondern eine relative Zahl. „Es kann auch eine Zahl (verstehe: Vielheit) wie etwa 8 in unserem Geiste als Einheit gesetzt werden;“ dann wird die frühere 1 zu $^1/_8$, der Bruch enthält also außer der reinen Anzahl (dem Zähler) noch eine Beziehung (Relation) seiner Einheit oder seines Nenners zur Haupteinheit. Bei der Regeldetri kann dann die Verhältnisauffassung keine Schwierigkeit mehr machen, da „den Schülern die Subjektivität der Begriffe Einheit und Vielheit in Fleisch und Blut übergegangen" ist. Wir würden hier nur wieder statt „Subjektivität" sagen: die Funktionsbedeutung der arithmetischen Begriffe.

Das Richtige liegt übrigens in diesem Fall so nahe, daß es nicht leicht ganz verfehlt werden konnte. Auch Stolz streift wenigstens daran. Er führt zwar den Bruch (wie schon erwähnt wurde) ganz formalistisch ein, als „Zeichen auf dem Papier", aber begründet ihn wenigstens hinterher „synthetisch" durch die Auffassung des Nenners als „Untereinheit"; die dann leider ihrerseits erst ihre Begründung finden soll durch die Voraussetzung, daß in der „Schar unter sich gleicher Dinge" (von deren Betrachtung er nun einmal nicht loskommt) ein jedes sich in eine beliebige Anzahl gleicher Teile zerlegen lasse. Schon Hankel hat gegen jede solche Auffassung mit vollem Recht eingewandt, daß doch diese Voraussetzung für Dinge nur in bestimmten Fällen zutreffe, so daß dem Begriff die für arithmetische Begriffe notwendige Allgemeinheit mangeln würde. Aber er wie Durège u. a. flüchtete deshalb wieder zur rein formalistischen Begründung aus dem Bedürfnis der Rechnung; er sprach von Zahlen als besonderen rein „mentalen" Objekten, die mit Dingen, also auch mit dem Zählen (das man eben für ein Operieren mit Dingen hält) nichts zu tun hätten. So langt man glücklich bei Zahlen an, die mit dem Zählen nichts zu tun haben; während man doch denken sollte, daß sie überhaupt nichts als die Zählung selbst, als gesetzmäßige Funktion des Erkennens, zu entwickeln hätten. Das Beiwort „mental" zu „Objekte" ist also leider kein Hinweis auf den echten Begriff des Denkens als gesetzmäßiges Vorstellen, Gesetzesbewußtsein im Vorstellen, sondern es bleibt dabei, daß Zahlen Dinge sein sollen, wenn nicht äußere, dann Dinge des Geistes, die er sich gleichsam zum

Zeitvertreib macht, und die nicht etwa der Erkenntnis der Gegenstände dienen. Bedeutet Eins die Funktion der Einssetzung, dann folgt alles einfach und leicht; dann lassen sich auch 8 als 1, 1 als 8 setzen, aus dem einfachen Grunde, weil eine Vielheit auch wieder Eins ist, also die Einheit, als Funktion, auch eine Vielheit, und zwar jede, vertreten kann, womit alles gegeben ist, was man braucht.

Die scharfsinnige Erklärung, welche Lipps für die unbegrenzt teilbare Größe gibt (*106*, S. 127ff.) darzulegen und im einzelnen zu prüfen, würde zu viel Raum in Anspruch nehmen. Lipps beweist mehr, als wir hier zu beweisen hatten; aber die Grundlage scheint mir von der unsrigen nicht wesentlich verschieden zu sein; alle seine Folgerungen würden sich aus unseren Voraussetzungen ebensowohl ableiten lassen. Er legt Gewicht darauf, daß die positiven reellen Zahlen nicht aus der Reihe der ganzen Zahlen ableitbar oder auf sie reduzierbar seien, vielmehr beruhen auf der „ständig sich wiederholenden Entfaltung der Einheit zu der in ihr hervortretenden und mit ihr äquivalenten Vielheit“ (S. 138). Dagegen ist nur zu sagen, daß schon der Aufbau der Reihe der ganzen Zahlen dieses selben Prinzips bedarf, daß also die positiven reellen Zahlen zwar nicht aus der Reihe der ganzen Zahlen, wohl aber aus demselben Prinzip ableitbar sind, welches mit diesen zugleich schon gesetzt war. In der „Darstellung der Urreihe“ bei Lipps (§ 3 und 4 desselben Kapitels) ist faktisch allemal einer Vielheit (*a*, *b*, *c*) eine Einheit (*a*) äquivalent gesetzt, also das angeblich neue Prinzip wirklich schon verwendet, nur in einer Einschränkung, für die von Anfang an keine Notwendigkeit vorlag. Eine sachliche Verschiedenheit prinzipieller Art gegenüber unserer Ableitung vermag ich nicht zu erkennen.

Nicht unbemerkt soll bleiben, daß Cantor (Zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, § 3, vgl. § 4, Math. Ann. 46, 1895) die Multiplikation, um ihr allgemeine Anwendbarkeit auf seine Kardinalzahlen oder Mächtigkeiten zu geben, auf die Kombination zurückführt. Nämlich jedes Element m einer Menge M läßt sich mit einem Element n einer Menge N verbinden zu einem neuen Element (m, n). Die Menge dieser Verbindungen (m, n) heißt die Verbindungsmenge von M und N (M, N), deren Mächtigkeit abhängt von den Mächtigkeiten von M $(\overline{\overline{M}} = a)$ und von N $(\overline{\overline{N}} = b)$; sie definiert das Produkt $a \cdot b = (M \cdot N)$. Einen ähnlichen Weg schlägt Whitehead (*183*) ein, dem Russell (*154*, § 115) und Couturat (*31*, S. 56) sich anschließen. In gewisser Weise liegt die Kombination auch in unserer Deutung der Multiplikation. Sollte dies aber so verstanden werden, daß überhaupt die Multiplikation auf die Kombination zurückzuführen sei, so würde darin, wie mir scheint, ein *Hysteron-proteron* liegen. Aus 3 Dingen m und 2 Dingen n sind 6 Kombinationen je eines m mit einem n möglich, weil dieser Kombinationen eben notwendig $3 \cdot 2$ oder $2 \cdot 3$ sind; nicht aber ist $3 \cdot 2$ oder $2 \cdot 3 = 6$ darum, weil aus 2 Gruppen von 3 und 2 Dingen 6 Kombinationen je eines Dinges der einen und eines der anderen Gruppe möglich sind. Man kann auf dies *Hysteron-proteron* freilich leicht kommen, wenn unter den Faktoren 3 und 2 Mengen von Dingen verstanden werden und das Produkt nun aus diesen Dingen, statt aus den reinen Zahlen, gebildet werden soll. Dann könnte das Produkt, da es doch einmal eine Zahl sein muß, nicht wohl etwas anderes sein als die Zahl der Kombinationen jener Dinge, die glücklicherweise sich deckt mit dem wahren Produkt der Zahlen. Daß das kommutative Gesetz bei dieser Ableitung keines Beweises bedürfe (wie Couturat meint), ist sicher irrig. Cantor wenigstens hat nicht unterlassen, den Beweis ausdrücklich zu führen. Es wird als Vorzug dieser Erklärung gerühmt, daß sie unterschiedslos auf endliche und unendliche Zahlen Anwendung finde, also schlechthin allgemein sei. Aber dieser Weite entzieht sich auch nicht die Erklärung der Multiplikation durch Zählung von Zahlen. Cantor verwendet in der Tat neben der soeben angegebenen auch diese in folgender Form: man ersetzt in einer Menge N jedes Element durch eine Menge äquivalent M; das Ganze der Elemente aller dieser Mengen ist dann das Produkt der Kardinalzahlen der Mengen N und M. Man darf wohl sagen, daß dies unsere Erklärung, nur in der Terminologie der Mengenlehre ausgedrückt, ist. Doch bedurfte es eben der Erklärung, warum und in welchem Sinne denn jene Substitution zulässig ist.

Zum Schluß sei nochmals betont, daß nach der hier entwickelten Auffassung die negative wie die gebrochene Zahl nicht eine künstliche Erweiterung der ursprünglichen als der „natürlichen“ Zahlreihe darstellt, sondern nur den methodischen Gehalt, der in der Zahl von Anfang an lag, zur Entfaltung bringt. Die wesentliche Grundlage für ihre Einführung ist die Relativität der Zählung hinsichtlich des Ausgangspunktes, der Null, wie hinsichtlich der Einheit, mit der gezählt wird. Diese Relativität aber ist der Grundcharakter des synthetischen Denkens überhaupt. Die absolute Null und die absolute Eins sind bloße Hilfsmittel, um in der Unendlichkeit der Relationen, in die sich unsere Erkenntnis hineingestellt findet, überhaupt erst Fuß zu fassen. Ist dies einmal erreicht und damit die Möglichkeit geschaffen, die Relationen als solche zu sicherem Ausdruck zu bringen und ihre Gesetzmäßigkeit zu beherrschen, so darf die absolute Betrachtung als entbehrlich gewordenes Gerüst fallen. Die absolute Zahl ist provisorisch, die relative endgültig. Nur insofern gibt es eine Wandlung in den arithmetischen Grundbegriffen. Es ist keine andere, als die der große Urheber der Auffassung der Mathematik als Wissenschaft des Unwandelbaren, Plato, selbst vorgesehen, von der er gesprochen hat als von einem Wandel (κίνησις) der Begriffe, nicht der Dinge. Es ist genau die Relativierung gemeint, die sich uns direkt ergibt aus dem Prozeßcharakter der synthetischen Einheit überhaupt und nach allen Richtungen, in dessen klarer Herausstellung wir das unermeßliche, jedenfalls bisher bei weitem nicht nach allen Seiten ermessene Verdienst des Königsberger Plato sehen.

Auf eben dieser Grundlage werden nun auch die Probleme des Unendlichen und Stetigen sich bewältigen lassen.