Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften

Natorp, Paul

Leipzig [u.a.], 1910

§ 1. Der methodische Sinn des Unendlichen.

Viertes Kapitel.

Unendlichkeit und Stetigkeit.

§ 1. (*Der methodische Sinn des Unendlichen.*) Das Merkmal der Unendlichkeit ist mit der Zahl, so wie wir sie konstruiert haben, in einem bestimmten Sinne schon gegeben. Die Zahl ist unendlich, sofern 1. die Setzung von Einem zu Einem usf. sich unbeschränkt wiederholt; 2. das Verfahren, durch Abschluß der in sich unbestimmten Reihe von Einheiten je auf erreichter Stufe die bestimmte Vielheit zu setzen, unbeschränkt fortbesteht. Diese Unendlichkeit erstreckt sich gleicherweise auf die Ordnungszahl und auf die Anzahl. Und sie gilt für alle bis dahin beschriebenen besonderen Weisen der Zahlsetzung: die Zahl ist unendlich in positiver wie negativer Richtung, in der Richtung der Vervielfältigung wie der Teilung. Denn jede Stelle der Zahlreihe ins Unendliche fungiert auch wieder als relative Null, jede bestimmte Vielheit ins Unendliche als relative Einheit, jede Einheit umgekehrt als irgendwie bestimmte Vielheit.

Diese Unendlichkeit der Zahl ist unangreifbar, weil sie nur der einfache Ausdruck des Funktionscharakters der Zahl ist. Es ist damit nichts anderes gesagt, als daß das Verfahren der Zahl mit allem, was es einschließt, eben als Verfahren ein für allemal, folglich immer wieder, an sich ohne Schranken gilt und Anwendung fordert; oder daß die Relationen der Zahl unbeschränkt fortbestehen. Es kann keine rechtmäßige Bedeutung oder Anwendung des Unendlichkeitsbegriffs in der Mathematik oder mathematischen Naturwissenschaft geben, die nicht auf dieser allgemeinen Grundlage ihre Erklärung fände. Denn der ganze Sinn der Zahl ist nur der eines Verfahrens gedanklicher Setzung, oder der Entwicklung von Relationen und Relationen von Relationen ohne Ende; es dürfen daher auf die Zahl keine anderen Prädikate angewandt werden, als die in der Gesetzmäßigkeit des Zählverfahrens begründet sind.

Eine Erschöpfbarkeit des Unendlichen in quantitativer Bedeutung zu behaupten oder zu verlangen, hat hiernach keinen Sinn, da das Merkmal der Unendlichkeit vielmehr die nie erschöpfliche Anwendbarkeit des Verfahrens und jedes Verfahrens der quantitativen Setzung bedeutet. Es ist daher mit dem Begriff des mathematisch Unendlichen nicht ein dinglich existierendes „Unendliches" gesetzt, das dem Verfahren der Zählung nur nicht erreichbar wäre. Wohl haben wir oft gesagt, das Verfahren der Zahl entwickle nur bestehende Relationen. Aber diese Relationen bestehen eben ins Unendliche fort; der Fortgang ins Unendliche selbst besteht. Aber es besteht darum nicht ein Ding „Unendlich" jenseits dieses Ganges. Wenigstens müßte eine solche Aufstellung, wenn sich für sie irgendein haltbarer Sinn und Grund ausfinden ließe, einer anderen Wissenschaft als der von der Zahl überwiesen werden.

Wir nennen diese Ansicht vom mathematisch Unendlichen kurz die „methodische". Sie möchte nicht verwechselt sein mit der alten Aristotelischen Unterscheidung, die sehr vielen bis heute als maßgebend gilt: der des potentiell und aktuell Unendlichen: ein Unendliches der Möglichkeit nach sei zulässig, in der Verwirklichung dagegen nicht. Es kann keinem Zweifel unterliegen, daß Aristoteles durch diese Unterscheidung sich sogar mit seiner eigenen sonstigen Fassung der Begriffe Potenz und Aktus in Widerspruch setzt. Möglich sollte allgemein nur heißen, was auch wirklich sein oder werden oder wenigstens gedacht werden kann. Das Unendliche aber kann nach Aristoteles eben nicht verwirklicht sein oder werden oder auch nur gedacht werden; also dürfte von ihm auch nicht gesagt werden, daß es der Möglichkeit nach bestehe. Die Schwierigkeit wird keineswegs behoben durch die Erinnerung, daß es sich beim mathematisch Unendlichen nie um ein vollendetes Sein, sondern um ein Werden, einen Wechsel oder Fortgang handle. In einer Aufeinanderfolge nämlich, meint Aristoteles, sei die Unendlichkeit unanstößig, indem eines immer an die Stelle des andern trete und diese Substitution immer stattfinde; dann sei in jedem gegebenen Stadium eben nur Eines verwirklicht und ergebe sich nicht der Widersinn der vollendeten Unendlichkeit (τῷ ἀεὶ ἄλλο καὶ ἄλλο λαμβάνεϲθαι Phys. 206 a 28, πεπεραϲμένον 29, usw.). Dieser Widersinn trete dagegen unausbleiblich ein, wenn das Unendliche auf einmal miteinander verwirklicht sein sollte. Daher läßt Aristoteles die Unendlichkeit gelten für die Zeit, und so auch für die Zahl, indem er die Zählung als sukzessive Setzung versteht; ja für das „Denken" allgemein, offenbar, indem es immer sukzessiv eines an die Stelle des andern setze (οὐχ ὑπομένοντοϲ τοῦ λαμβανομένου 208 a 20), welches Denken indes ihm für das Sein ganz und gar nichts beweist; denn nicht darum ist eine Sache so, daß wir sie so denken, sondern darum, daß sie so ist, haben wir sie so zu denken. Das Unendliche gilt aber eben deshalb nicht von Dingen, welche sind, nämlich auf einmal miteinander sind; daher vor allem nicht für die räumliche Ausdehnung des Universums. Das Argument der Atomisten, daß jede endliche Ausdehnung, eben mit ihren Enden, an eine fernere grenzen, die Ausdehnung an sich also unendlich sein müsse, gibt Aristoteles nicht zu: der Begriff des Begrenzten sei nicht an sich ein relativer, fordere nicht notwendig ein anderes, woran es grenze; und was solcher Subtilitäten mehr sind.

Von dieser Aristotelischen Auffassung ist die unsere wesentlich verschieden. Das Unendliche, von dem wir reden, gibt es, und zwar nicht zufolge einer Sukzession. Sprachen wir von einem Fortgang, von einem Verfahren der Setzung, so ist doch nicht die zeitliche Folge hierbei von irgendwelcher Bedeutung. Dies ginge allenfalls die Psychologie an; eine Grundlegung der Logik und Mathematik kann von der Voraussetzung zeitlicher Vorgänge schon darum nicht ausgehen, weil auf den Grundlagen, welche Logik und Mathematik aufzuzeigen haben, selbst erst der Begriff der Zeit sich aufzubauen hat. Worum es in Logik und Mathematik sich handelt, ist allein die Gesetzlichkeit ins Unendliche bestehender Relationen. Im Sinne der Aristotelischen Unterscheidung ist durchaus zu sagen, daß die Relationen der Zahl ins Unendliche sind, nicht werden; die Unendlichkeit der Zahlrelationen wäre also in Aristoteles' Sinn aktuelle, nicht potentielle Unendlichkeit zu nennen. Aber dieser ganze Modalitätsunterschied des Möglichen und Wirklichen hat in der Mathematik keine Stelle; diese hat also gar nicht zu reden von einem potentiell oder aktuell Unendlichen, sondern vom Unendlichen schlechtweg; wenn erforderlich, mit sonstigen Unterscheidungen, wovon bald zu reden sein wird. Damit fällt zugleich der bei Aristoteles keineswegs behobene Widerspruch weg, daß möglich genannt wird, was doch nicht soll wirklich sein oder werden oder auch nur gedacht werden können.

Näher steht der methodischen Auffassung des Unendlichen schon Descartes' Unterscheidung des Indefiniten und Infiniten; aber zu reinerer Durchführung gelangt sie erst bei Kant. Zwar kann es bei diesem äußerlich noch an Aristoteles erinnern, wenn allgemein die Unendlichkeit erklärt wird als Unvollendbarkeit der „sukzessiven Synthesis" im Progreß der Komposition von den Teilen zum Ganzen wie im Regreß der Dekomposition vom Ganzen zu den Teilen; mit der Unterscheidung jedoch, daß im Regreß, weil hier das Ganze voraus gegeben, es möglich sei, ins Unendliche (*in infinitum*) zu gehen, während im Progreß es nur ins Unendliche (d. h. hier: ins Unbestimmte, doch unbeschränkt, *in indefinitum*) möglich sei, zu höheren Stufen fortzuschreiten. Aber eben damit ist für den Regreß das Infinite im bestimmten Unterschied vom bloß Indefiniten anerkannt; was in der bald zu berührenden Auffassung des Unendlichkleinen bei Kant seine Bestätigung findet. Übrigens ist die leise ins Psychologische abbiegende Unterscheidung des Indefiniten und Infiniten für Kant offenbar von geringem Gewicht gewesen; denn andrerseits heißen ihm Zeit und Raum als unendlich dennoch „gegeben"; ihre Einheit liege zugrunde; irgendeine begrenzte Zeit- oder Raumvorstellung sei nur durch „Einschränkung der einigen zugrunde liegenden" Zeit- und Raumvorstellung möglich. Aber diese Einheit des Unendlichen ist „synthetische" Einheit, d. h. Einheit unendlicher Relationen kraft der Einheit des Gesetzes, nach welchem sie sich immer eine auf der anderen aufbauen oder auseinander entwickeln. Zeit und Raum sind nicht die leeren, unendlichen, absoluten, für sich bestehenden „Undinge", als welche einige Naturforscher Newtonscher Schule sie dachten, sondern beide sind nichts als Arten der Setzung „seiner Vorstellungen", sind daher selbst bloße „Verhältnisvorstellungen", durch die doch nicht eine Sache an sich erkannt werde (Allg. Anm. z. transz. Ästhetik II). Dasselbe gilt vollends von der Zahl, die als unmittelbarer Ausdruck des Verfahrens der Synthesis, zunächst der Quantität, von Kant ähnlich wie von uns gedeutet wird. Abgelehnt wird nur und mit Grund die Voraussetzung einer Abgeschlossenheit („Totalität") des Unendlichen in „vollendeter Synthesis", oder die Möglichkeit einer „Durchzählung" des Unendlichen, die das Unerschöpfliche erschöpft haben sollte. Gerade damit würde die Welt in Zeit und Raum, mithin diese selbst, und folgerecht auch die Zahl, zum „Ding an sich", d. h. aus einer reinen Verhältnisvorstellung zu einem Absoluten gemacht. In diesem

Absolutismus bleibt dagegen Aristoteles ganz befangen. Seine Ansicht ist in Kants Sinne schlechterdings dogmatisch, und zwar zwiespältig: dogmatisch im Sinne der Kantischen „Thesis“ (der Behauptung des endlichen Absoluten) in Hinsicht der räumlichen Ausdehnung, dagegen im Sinne der Antithesis (der Behauptung des unendlich Absoluten) in Hinsicht des zeitlichen Verlaufs des Weltprozesses; wogegen nach Kant die Totalität der Bedingungen im Unbedingten nur den Geltungswert einer „Idee“ beanspruchen darf, die keine weitere Funktion in der Erkenntnis zu erfüllen hat, als die Unendlichkeit der Aufgabe des empirischen Progresses und Regresses auszudrücken.

§ 2. (*Das aktuell Unendliche Georg Cantors.*) Tritt man mit den soeben entwickelten Vorbegriffen nun an Cantors Mengenlehre, als die moderne Gestalt der Mathematik des Unendlichen, heran, so findet man sich zunächst in einiger Verwirrung. Diese hat — das darf bei allem Dank und aller Bewunderung, die man dem schöpferischen Genie des Mannes schuldet, doch nicht ungesagt bleiben — ihren Grund zum großen Teil darin, daß Cantor, namentlich in seinen ersten Darlegungen, nicht bei seinem Leisten bleibt und rein als Mathematiker spricht, sondern das Geschäft des Metaphysikers der Unendlichkeitsbegriffe zugleich auf sich nimmt. Des Metaphysikers, nicht des Logikers, denn durch die Bezeichnung seines „Transfiniten“ als aktuell Unendliches, durch die Hereinziehung der Frage des Absoluten, durch das ganze Eingehen auf die alten scholastischen Kontroversen hinsichtlich des Unendlichen greift seine Behandlung der Frage[1]) offenbar und eingeständlich ins metaphysische Gebiet hinüber.

---

1) Math. Ann. 21, 1883, S. 545 ff.; Zeitschr. f. Philos. 88, 1886, S. 224 ff. und 91, 1887, S. 81 ff. Ich zitiere im folgenden die Annalen mit A., die Zeitschrift mit Z.