Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften

Natorp, Paul

Leipzig [u.a.], 1910

§ 2. Das aktuell Unendliche Georg Cantors.

urn:nbn:de:hbz:466:1-35817

Absolutismus bleibt dagegen Aristoteles ganz befangen. Seine Ansicht ist in Kants Sinne schlechterdings dogmatisch, und zwar zwiespältig: dogmatisch im Sinne der Kantischen „Thesis" (der Behauptung des endlichen Absoluten) in Hinsicht der räumlichen Ausdehnung, dagegen im Sinne der Antithesis (der Behauptung des unendlich Absoluten) in Hinsicht des zeitlichen Verlaufs des Weltprozesses; wogegen nach Kant die Totalität der Bedingungen im Unbedingten nur den Geltungswert einer „Idee" beanspruchen darf, die keine weitere Funktion in der Erkenntnis zu erfüllen hat, als die Unendlichkeit der Aufgabe des empirischen Progresses und Regresses auszudrücken.

§ 2. (*Das aktuell Unendliche Georg Cantors.*) Tritt man mit den soeben entwickelten Vorbegriffen nun an Cantors Mengenlehre, als die moderne Gestalt der Mathematik des Unendlichen, heran, so findet man sich zunächst in einiger Verwirrung. Diese hat — das darf bei allem Dank und aller Bewunderung, die man dem schöpferischen Genie des Mannes schuldet, doch nicht ungesagt bleiben — ihren Grund zum großen Teil darin, daß Cantor, namentlich in seinen ersten Darlegungen, nicht bei seinem Leisten bleibt und rein als Mathematiker spricht, sondern das Geschäft des Metaphysikers der Unendlichkeitsbegriffe zugleich auf sich nimmt. Des Metaphysikers, nicht des Logikers, denn durch die Bezeichnung seines „Transfiniten" als aktuell Unendliches, durch die Hereinziehung der Frage des Absoluten, durch das ganze Eingehen auf die alten scholastischen Kontroversen hinsichtlich des Unendlichen greift seine Behandlung der Frage[1]) offenbar und eingeständlich ins metaphysische Gebiet hinüber.

---

1) Math. Ann. 21, 1883, S. 545 ff.; Zeitschr. f. Philos. 88, 1886, S. 224 ff. und 91, 1887, S. 81 ff. Ich zitiere im folgenden die Annalen mit A., die Zeitschrift mit Z.

Cantor unterscheidet drei Begriffe des Unendlichen:

1. Das eigentlich Infinite, schlechthin Abgeschlossene, Absolute, das als solches keinerlei Determination zuläßt, nicht nur über jedes endlich Bestimmte, sondern auch über jedes bestimmbar Unendliche hinausliegt und nichts mehr über sich hat, eben deshalb aber „nur anerkannt, nie erkannt, auch nicht annähernd erkannt werden" kann.[1]) Dieses hat sich uns bereits in Kants „Idee" aufgelöst, der nur regulative, nicht konstitutive Bedeutung zukommt.

2. Das uneigentlich, potentiell oder synkategorematisch Unendliche oder Indefinite, welches keine von der endlichen wesensverschiedene konstante, sondern die veränderliche, über alle endlichen Grenzen (richtiger würde es heißen: über jede endliche Grenze) hinaus wachsende oder abnehmende, d. h. beliebig groß oder beliebig klein anzunehmende, dabei aber immer endlich bleibende Größe bedeutet.[2]) Mit Unrecht nenne man es das „schlecht" Unendliche, da es in der Mathematik und Naturwissenschaft als höchst brauchbares Instrument bewährt sei. Nur glaube man ebenso mit Unrecht, mit diesem allein in der Mathematik auszukommen. Die bekannten, dies vertretenden Ausführungen Dührings u. a. beweisen nach Cantor nur a) daß eine bestimmte endliche Zahl, wenn noch so groß, nie unendlich ist, b) daß eine veränderliche, unbeschränkt wachsende oder abnehmende Zahl der Bestimmtheit ermangelt, die ihr ein Sein beizulegen gestatten würde.[3]) Nur diese uneigentliche Bedeutung des Unendlichen will aber Cantor selbst im sog. Unendlichkleinen oder Infinitesimalen finden. — Von diesen beiden Bedeutungen des Unendlichen also, von denen die eine rein metaphysisch ist, die Mathematik als solche nichts angeht, die andere in ihr

---

1) A. 21, 587, A. 2; Z. 91, 109.
2) Z. 88, 230.
3) A. 21, 582. 588 A. 4.

von wichtigem und unangefochtenem Gebrauch ist, unterscheidet er

3. die des aktuell, aber nicht absolut Unendlichen oder Transfiniten (Überendlichen), welches ein bestimmtes, konstantes, aber jenseits aller endlichen Größe liegendes Quantum bedeute. Es unterscheidet sich vom Absoluten, sofern es ein zwar Unendliches, aber doch noch Vermehrbares, das letztere dagegen unvermehrbar und mathematisch überhaupt undeterminierbar sei.[1]) Das Überendliche ist determinierbar. Es ist übrigens nicht einfach, sondern existiert in wiederum unendlichen Abstufungen, durch die man, nicht anders als durch die Reihe der endlichen Zahlen, „immer weiter, nirgends an eine unübersteigbare Grenze, aber zu keinem auch nur angenäherten Erfassen" eines Letzten, welches hier das Absolute wäre, gelangt.[2])

Cantor glaubt sich mit diesen Aufstellungen im Gegensatz zu allen älteren Fassungen des Unendlichkeitsbegriffs, besonders auch zu Kant zu befinden. Er hat also nicht bemerkt, daß gerade Kant eine der seinigen eng verwandte Unterscheidung macht zwischen dem echten mathematischen Begriff des Unendlichen, als dessen, was im Verhältnis zu einer beliebig anzunehmenden Einheit „größer als alle Zahl", oder der „Menge", die, unter Voraussetzug einer gegebenen Einheit, größer ist als alle Zahl; welches in der Mathematik gilt und mit welchem sie rechnet, trotzdem dabei „die sukzessive Synthesis der Einheiten in Durchmessung eines Quantum niemals vollendet sein kann"; und dem unechten Begriff, den die Metaphysiker oftmals diesem echten, um ihn zu diskreditieren, untergeschoben haben: der Größe (oder Menge), über die keine größere möglich; welches auch er dem „Absoluten" gleichsetzt.[3]) Wenn Cantor an

1) Z. 88, 231.

2) A. 21, 587 A. 2.

3) Kritik, Antinomieen, Anm. z. 1. Thesis. So aber schon in vorkritischer Zeit, Diss. § 1**, und Neg. Gr., Einl., auch Metaph. An-

Kant tadelt, daß er das Absolute als die Grenze des Endlichen ansehe, während diese Grenze vielmehr das Transfinite sei [1]), so übersieht er, daß Kant das Absolute (die „Totalität der Bedingungen im Unbedingten") als wissenschaftlich setzbaren Abschluß und in diesem Sinne als Grenze überhaupt verwirft und ihm nur die Bedeutung einer Idee zugesteht, deren Funktion allein in der Erkenntnis der Unendlichkeit des empirischen Progresses und Regresses besteht. Diese Aufstellung ist vorsichtiger als die Cantors, der das Absolute als zwar nicht erreichbare, aber doch existierende Grenze der immer fortsetzbaren, notwendig fortzusetzenden Reihe bestimmbarer, teils endlicher, teils unendlicher Mengen doch setzt, also uns zumutet, ein absolut jenseits des unserer Erkenntnis Erreichbaren Liegendes doch als existierend zu denken und anzuerkennen. Das aktuell Unendliche oder Überendliche Cantors fällt dagegen ersichtlich unter Kants Begriff des mathematisch Unendlichen als des über jede Vielheit einer gegebenen Einheit Hinausgehenden, das sich freilich nicht „anschauen", nicht sinnlicher Erkenntnis zugänglich machen läßt, aber sich doch wohl muß denken lassen, da die Mathematik mit ihm arbeitet und sichere Resultate erreicht. Allenfalls hätte Kant dies echte mathematisch Unendliche noch bestimmter vom bloß Indefiniten (Hegels „schlechter" Unendlichkeit) unterscheiden dürfen. Aber ohne jeden Zweifel erkennt er ein nicht bloß indefinit Unendliches an, und zwar als den echten mathematischen Begriff des Unendlichen, da er das Infinitesimale ausdrücklich in diesem Sinne auffaßt und es nach dieser Definition wiederholt in Schutz nimmt

---

fangsgr. d. Naturwiss. 2. Hauptst. Lehrs. 4. Die Unterscheidung selbst rührt von Aristoteles her (Phys. 207a 1) — nur daß dieser sie im gerade entgegengesetzten Sinne anwendet, nämlich das οὗ ἀεί τι ἔξω für das Sein zu leugnen, das οὗ μηδὲν ἔξω zu behaupten, welches, als τέλειον, abgeschlossen, also begrenzt sein müsse.

1) Z. 88, 231.

gegen die ungegründeten Verdächtigungen der Metaphysiker, die ihm, weil sie es fälschlich mit dem Absoluten identifizieren, überhaupt die Existenz abstreiten oder wenigstens im Bereiche wissenschaftlicher Erkenntnis nur Endliches gelten lassen wollen.

Nun teilt zwar Cantor, wie schon bemerkt, gerade hinsichtlich des Infinitesimalen die von sehr vielen Mathematikern vertretene Auffassung, daß darunter nur eine beliebig kleine, doch immer endlich bleibende, veränderliche Größe zu verstehen sei. Er will[1]) den Beweis geführt haben, daß das Infinitesimale als aktuell Unendlichkleines nicht etwa notwendig seinem aktuell Unendlichgroßen entsprechend anzunehmen, sondern durch dieses vielmehr ausgeschlossen sei. Was er aber wirklich beweist, ist nur, daß das Infinitesimale, als dem sogenannten Archimedischen Prinzip, das heißt der Möglichkeit der Ausmessung durch eine gegebene endliche Einheit entzogene, dennoch endliche, „unter dem Bilde begrenzter geradliniger stetiger Strecken vorstellbare“ Zahlgröße, als „Element“ oder integrierender Teil endlicher linearer Größen unmöglich sei; was, wenn der „Teil“ in Beziehung auf die gegebene Einheit verstanden wird, freilich keines Beweises bedurfte; denn daß eine Größe, die Teil einer endlichen Größe ist, nicht unendlich klein in dem Sinne sein kann, daß nicht durch irgendeine Vervielfältigung derselben die endliche Größe erreicht und übertroffen würde, ist durch den Begriff des Teils, als korrelativ zu dem des Vielfachen, ja ohne weiteres gegeben. Aber das Infinitesimale sollte schon bei den klassischen Begründern dieses Begriffs nicht ein „extensives“, durch die gegebene Einheit meßbares Quantum darstellen. Schon Galilei spricht von *infinita non quanta;* Leibniz behauptet das Infinitesimale als *praeter extensionem, imo extensione prius,* bei Newton sind die infinitesimalen „Momente“ nicht *quan-*

---

1) Z. 91, 112ff.

titates finitae, sondern *principia iamiam nascentia finitarum magnitudinum;* und Kant erklärt das Infinitesimale durch die intensive Größe, die den Grund der extensiven enthalte, aber nicht selbst extensiv sei.[1]) Gerade Cantor sollte einer solchen Auffassung nicht unzugänglich sein, da er sein aktuell Unendliches doch nicht durch Vervielfältigung der gegebenen Einheit, überhaupt nicht durch irgendein bloß quantitatives Verfahren, sondern durch den Übergang zu einem neuen „Universalbegriff“ oder „Gesetz“, unter ausdrücklichem Verzicht auf Meßbarkeit durch eine gemeinsame Einheit erreicht. Was aber die Begründung der Analysis betrifft, so vertritt z. B. Enriques (*45*, S. 117 f.) die Ansicht, daß zwar der Aufbau der gewöhnlichen Analysis bei der Betrachtung von Größen, die dem Archimedischen Postulat genügen, stehen bleiben könne, daß aber bei besonderen Problemen, wie dem des Kontingenzwinkels, allgemein bei der Begründung der verschiedenen Ordnungen des Unendlichkleinen, oder beim Vergleich der mehr oder weniger raschen Art, in der die Funktionen variierend einer Grenze zustreben, mit dieser Vorstellung nicht mehr auszukommen sei, sondern eine Betrachtung wie die Cantors vom aktuell Unendlichen notwendig werde. Aber auch Cantor selbst, der das Unendlichkleine durch das potentiell Unendliche erklären möchte, folgert andrerseits geradezu vom potentiell auf das aktuell Unendliche: das Gebiet der Veränderlichkeit könne nicht selbst wiederum veränderlich gedacht werden, es sei notwendig als „bestimmte aktuell unendliche“ Wertmenge zu denken.[2]) Und diese „Gebiete der Veränderlichkeit“ seien die eigentliche Grundlage der Analysis sowohl als der Arithmetik. Damit ist der Sache nach das Infinitesimale auf das Transfinite gestützt und aus dem Bereiche des bloß Indefiniten hinausgehoben.

1) Cohen [*22*] S. 46, 71, 85f., 111; in welchem Buche überhaupt reiches Material über diese Frage zu finden ist.

2) Z. 91, 116f.

Mit ganzer Entschiedenheit aber wird diese Auffassung vertreten durch den bedeutendsten Nachfolger, den Cantor gefunden hat: Giuseppe Veronese, der, an gewisse ältere Erwägungen von Stolz und P. du Bois-Reymond anknüpfend, die verschiedenen Ordnungen des Unendlichgroßen und Unendlichkleinen, unter ausdrücklicher Absehung vom Archimedischen Prinzip, aufgestellt und in grundsätzlicher Hinsicht, soviel ich erkennen kann, einwandfrei begründet hat. Nach ihm deckt sich das Prinzip des Archimedes geradezu mit der Voraussetzung der Endlichkeit, ist also das Absehen von diesem Prinzip (welches in der Tat keine absolute Denknotwendigkeit ausspricht) gleichbedeutend mit der Anerkennung der Existenz echter Unendlichkeiten. Diese beruht übrigens für ihn wie für Cantor einfach darauf, daß die Allheit z. B. der ganzen positiven Zahlen, obgleich ohne letztes Element, also im „potentiellen" Sinn unendlich, doch dem Begriff nach in eindeutiger Bestimmtheit gegeben ist und auch in einem zwischen zwei bestimmten Elementen begrenzten Intervall beschlossen gedacht werden kann und muß; so wie doch stets von den Mathematikern angenommen wurde, daß begrenzte Strecken unbegrenzt teilbar seien, also unendliche Teile an sich (für das Denken) enthalten. Soll das einmal gelten, so muß es auch in voller Allgemeinheit gelten; damit aber relativiert sich notwendig die Unterscheidung des Endlichen und Unendlichen, und es ergibt sich zwingend eine strenge Korrespondenz sogar unendlicher Ordnungen des Unendlichkleinen und Unendlichgroßen, so wie das Schema Veroneses (Grundl. S. 184) es darstellt. So wird Cantors Vorstellung in ihrer prinzipiellen Grundlage bestätigt und zu ihrer vollen Konsequenz erst entwickelt, damit aber zugleich überboten und in Hinsicht der Deutung des Unendlichkleinen berichtigt. Cantor blieb eben, wie es genialen Entdeckern sehr oft ergangen ist, noch mit einem Fuß in der alten Auffassung stecken, indem er sich einen absoluten Abschluß wenigstens nach unten denken zu müssen glaubte, für den doch ein logischer Grund, nachdem einmal das Recht des Hinausschritts ins Unendliche überhaupt anerkannt ist, keineswegs besteht.

Nach diesem Blick auf die Geschichte unseres Problems, der für sich noch nichts entscheiden wollte, schreiten wir nun zur Untersuchung der Sache selbst.

Der Sinn und die unumgängliche Notwendigkeit des Hinausschritts zum Unendlichen wird durch nichts so eindringlich beleuchtet wie durch das bedeutende Problem des Irrationalen. Cantor bemerkt einmal, daß mit dem Irrationalen sein Transfinites stehe und falle. In der Tat so innerlich sind beide Probleme miteinander verflochten. Mit beiden hängt nicht minder eng das Problem des Infinitesimalen zusammen; alle diese Probleme vereinigen sich in dem ihnen gemeinsamen Grundmotiv der Stetigkeit.

§ 3. (*Das Problem des Irrationalen.*) Die Untersuchung über das Irrationale hat sachgemäß den Ausgang zu nehmen von den unendlichen Reihen und deren Grenzwerten. Endliche auch rationale Werte lassen sich in unendlichen Reihen darstellen. Die Division $1:2-1$ ergibt die unendliche Reihe $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$; umgekehrt zeigt man: Wenn $x=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\cdots$, so ist $2x=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots$, also $=1+x$, mithin $x=1$. Es scheint also die Gleichung zu Recht zu bestehen: $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots$. Es ist grundsätzlich dasselbe, wenn man den rationalen Bruch $\left(\text{z. B. } \frac{1}{3}\right)$ darstellt durch den unendlichen periodischen Dezimalbruch $(0{,}333\ldots)$. Was besagt hier die Gleichsetzung endlicher Ausdrücke $\left(1, \frac{1}{3}\right)$ mit unendlichen Reihen? Wenn ich 1 halbiere und die Hälfte wieder halbiere und die Hälfte der