Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften

Natorp, Paul

Leipzig [u.a.], 1910

§ 3. Das Problem des Irrationalen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-35817

einen absoluten Abschluß wenigstens nach unten denken zu müssen glaubte, für den doch ein logischer Grund, nachdem einmal das Recht des Hinausschritts ins Unendliche überhaupt anerkannt ist, keineswegs besteht.

Nach diesem Blick auf die Geschichte unseres Problems, der für sich noch nichts entscheiden wollte, schreiten wir nun zur Untersuchung der Sache selbst.

Der Sinn und die unumgängliche Notwendigkeit des Hinausschritts zum Unendlichen wird durch nichts so eindringlich beleuchtet wie durch das bedeutende Problem des Irrationalen. Cantor bemerkt einmal, daß mit dem Irrationalen sein Transfinites stehe und falle. In der Tat so innerlich sind beide Probleme miteinander verflochten. Mit beiden hängt nicht minder eng das Problem des Infinitesimalen zusammen; alle diese Probleme vereinigen sich in dem ihnen gemeinsamen Grundmotiv der Stetigkeit.

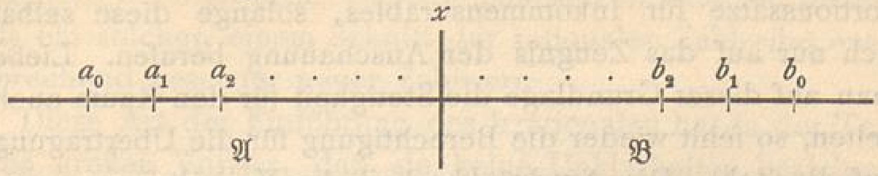
§ 3. (*Das Problem des Irrationalen.*) Die Untersuchung über das Irrationale hat sachgemäß den Ausgang zu nehmen von den unendlichen Reihen und deren Grenzwerten. Endliche auch rationale Werte lassen sich in unendlichen Reihen darstellen. Die Division $1 : 2 - 1$ ergibt die unendliche Reihe $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$; umgekehrt zeigt man: Wenn $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdots$, so ist $2x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$, also $= 1 + x$, mithin $x = 1$. Es scheint also die Gleichung zu Recht zu bestehen: $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$. Es ist grundsätzlich dasselbe, wenn man den rationalen Bruch $\left(\text{z. B. } \frac{1}{3}\right)$ darstellt durch den unendlichen periodischen Dezimalbruch $(0{,}333\ldots)$. Was besagt hier die Gleichsetzung endlicher Ausdrücke $\left(1, \frac{1}{3}\right)$ mit unendlichen Reihen? Wenn ich 1 halbiere und die Hälfte wieder halbiere und die Hälfte der

Hälfte usf., so ist durch Summierung der Hälfte und Hälfte der Hälfte usf., wie weit sie auch fortgesetzt werden mag, die Eins nicht zu erreichen. Gerade das besagt die Unendlichkeit der Reihe, daß die Rechnung nie zum Abschluß kommt, sondern stets ein Rest bleibt, in diesem Fall $\frac{1}{2^n}$, was, wie groß auch n sei, niemals Null wird. Vernachlässigt man den Rest, so vernachlässigt man die Voraussetzung, daß die Reihe weiter gehe, d. h. man hebt die Unendlichkeit der Reihe in Wahrheit auf. Ebenso ist es beim periodischen Dezimalbruch. Die Unendlichkeit des Dezimalbruchs $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$ hat nichts Geheimnisvolleres zum Grunde, als daß die Division von 3 in 10, aus der er entsteht, niemals aufgeht, nicht in 10 10^{tel} noch in 10 100^{tel}, 1000^{tel} usf., sondern stets als Rest $\frac{1}{10^n}$ läßt, was, in $\frac{10}{10^{n+1}}$ verwandelt und wieder durch 3 geteilt, $\frac{1}{10^{n+1}}$ als Rest läßt, und so stets wieder. Der Rest kann so lange nicht verschwinden, als 3 nicht in 10 aufgeht. So beschränkt aber der menschliche Intellekt auch sein mag, das darf er getrost behaupten, endgültig zu wissen, daß dies nie der Fall sein wird. Man kann daher ohne Widerspruch nicht die unvollendete und unvollendbare Reihe $0{,}333\ldots$ dem vollendeten Bruch $\frac{1}{3}$ gleichsetzen, wenn Gleichheit Identität des Wertbetrags bedeuten soll. Nun haben wir uns zwar längst dahin entschieden, allgemein unter Gleichheit nicht logische Identität, sondern Substituierbarkeit zu verstehen. Aber das entschuldigt nicht eine Ungenauigkeit, wie sie hier begangen würde, indem tatsächlich nicht gleichwertige Ausdrücke für einander substituiert werden würden. Daß die Ausdrücke wirklich nicht gleichwertig sein können, tritt sofort zutage, wenn man als Nenner, statt $1000\ldots$, vielmehr $999\ldots$ setzt. Nun geht die Teilung auf allen Stellen restlos auf, und man erhält als Quotient ohne jeden Zweifel $\frac{1}{3}$. Es kann aber dieselbe Zahl als Zähler zu verschiedenen Nennern gesetzt unmöglich denselben Wert darstellen. Man sagt daher richtiger: $\frac{1}{3}$ ist die Grenze der unendlichen Summe 0,333 ..., d. h. die Summe der Zehntel, Hundertstel usw. bleibt stets unter dem bestimmten Wert $\frac{1}{3}$, so aber, daß mit der Vermehrung der Summanden die Differenz immer kleiner wird, kleiner als jede noch so kleine endliche Differenz. Diese Betrachtung findet allgemeine Anwendung auf alle periodischen Dezimalbrüche oder systematischen Brüche überhaupt.

Diesen Begriff des Grenzwertes dehnt man nun aus auf den Fall, daß ein rationaler Wert als Grenze der unendlichen Reihe nicht existiert. Dies gilt von allen nicht periodischen unendlichen Reihen der allgemeinen Form

$$c_0 + \frac{c_1}{e} + \frac{c_2}{e^2} + \cdots,$$

wo c_0, c_1 usw. sämtlich positive ganze Zahlen kleiner als die ebenfalls positive ganze Zahl e sind; für $e = 10$ sind es die unendlichen nichtperiodischen Dezimalbrüche. Solche Reihen mögen sonst noch so regelmäßig gebaut sein, so daß nach festem Gesetz alle Glieder der Reihe ins Unendliche bestimmt sind, so existiert dennoch kein rationaler Grenzwert, wenn nicht die Reihe schließlich periodisch wird. Wohl aber ist es, wofern die Reihe nur überhaupt einem bestimmten Gesetz unterliegt, stets möglich, die verlangte, im rationalen Zahlgebiet nicht existierende Grenze so nahe, als man will, in rationalen Werten auszudrücken durch Systeme von Ungleichungen, nämlich Reihen einerseits wachsender rationaler Werte, die sämtlich kleiner sind als der verlangte Wert, andrerseits abnehmender, die sämtlich größer sind, so daß die Differenz der von beiden Seiten sich einander nähernden Werte sich unter jeden gegebenen noch so kleinen endlichen Betrag verringert. In anschaulicher Darstellung



sei $\mathfrak{A} = a_0 a_1 a_2 \ldots$ eine unendliche Reihe nach bestimmtem Gesetz ableitbarer wachsender rationaler Werte, die sämtlich kleiner als der gesuchte Grenzwert x sind, aber ihm unbegrenzt näher kommen, $\mathfrak{B} = b_0 b_1 b_2 \ldots$ eine dieser entsprechende Reihe abnehmender Werte $> x$, so wird die Differenz $b - a$ stets kleiner, und kleiner als jeder noch so kleine endliche Betrag. Wo nun dies der Fall ist, da *nimmt man an* (ohne es irgend beweisen zu können), daß ein eindeutig bestimmter Punkt x existiere, der die Gebiete $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ scheide. Den diesem Trennungspunkt entsprechend angenommen, nicht gegebenen Wert x setzt man dann als *neue Zahl*, die den gesuchten Grenzwert darstelle.

So der Tatbestand. Über die logische Begründung des Verfahrens sind die Meinungen noch immer nicht allseitig geklärt. Es ist im Grunde nur ein Ausdruck des Verzichts auf eine logisch zulängliche Begründung, wenn man einfach als „Axiom“ aufstellt, daß im gedachten Fall der einzige Grenzwert „existiere“. Es ist ebenso unbefriedigend, sich auf die Forderung der „Anschauung“ zu berufen, daß auf der Geraden, welche die Zahlreihe repräsentiert, kein Punkt fehle, daß sie lückenlos, stetig zusammenhänge. Möchte diese Eigenschaft der Stetigkeit woraufhin immer von der Geraden im Raume gelten, so würde das nicht berechtigen, sie auf die Zahl zu übertragen; hat man doch durch viele Jahrhunderte hindurch die Zahl als diskretes Gebilde vom Raum als stetigem strengstens unterschieden. Aber Anschauung kann überhaupt nicht Stetigkeit begründen, auch nicht für den Raum oder etwa die Zeit. Stetigkeit kann nur durch einen Begriff eingeführt werden. Damit wird zugleich die Berufung hinfällig auf die geometrischen Beweise der Proportionssätze für Inkommensurables, solange diese selbst sich nur auf das Zeugnis der Anschauung berufen. Ließe man auf dieser Grundlage die Stetigkeit für den Raum auch gelten, so fehlt wieder die Berechtigung für die Übertragung auf die Zahl. Die Ausdrückbarkeit des Verhältnisses unter Inkommensurabelem durch die Zahl wird lediglich postuliert, während nach der Rechtmäßigkeit dieses Postulats eben die Frage ist. So bleibt hier logisch immer ein Sprung. Vielleicht ein geglückter, da nachher alles glatt verläuft und ein Widerspruch nicht zutage kommt. Aber ein geglückter Sprung ist immer noch ein Sprung; die Kontinuität des Denkens bleibt unterbrochen; die Stetigkeit der Zahl wird gewonnen auf Kosten der Stetigkeit des Denkens — deren genauer Ausdruck sie vielmehr sein müßte; denn eine andere Grundlage als die Gesetze des reinen Denkens darf die Zahl nicht kennen.

§ 4. (*Mathematische Lösungen. Dedekind.*) Die berühmte Erklärung des Irrationalen durch Dedekind (*32*) sucht ihren Vorzug darin, daß sie die Stetigkeit der Zahl weder schlechthin annehmen noch auf eine Forderung der Anschauung stützen, sondern wenigstens durch eine genaue Definition einführen will. Sie drückt die Tatsache der Nichtexistenz der Grenzwerte unendlicher systematisch gebildeter, aber nicht periodischer Reihen im System der rationalen Zahlen so aus, daß dies System „Lücken“ habe. Die Tatsache aber, daß durch jede Reihe der beschriebenen Art, welche einen gesuchten irrationalen Grenzwert ausdrückt, eine Teilung des Systems der rationalen Zahlen auf die angegebene Weise hervorgebracht wird, wird damit ausgedrückt, daß jeder solchen Reihe ein „Schnitt“ der rationalen Reihe entspreche. Indem nun einem jeden solchen Schnitt eine und nur eine neue „Zahl“ entsprechend gesetzt wird, soll,