Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften

Natorp, Paul

Leipzig [u.a.], 1910

§ 5. Lösungen von Weierstraß, Cantor, Pasch, Veronese.

urn:nbn:de:hbz:466:1-35817

Das Bedürfnis ist gewiß unabweislich. Geometrie beweist, daß das Verhältnis zwischen Seite und Diagonale des Quadrats auszudrücken wäre gemäß einer Zahlproportion

$$1 : x = x : 2,$$

d. h. sie fordert die mittlere Proportionale zwischen 1 und 2, oder den Zahlwert $x = \sqrt{2}$. Eine existierende Größe verlangt eben einen Ausdruck in der Zahl; und sofern die Größe stetig sein soll, wie von der räumlichen, desgleichen der zeitlichen Größe, woraufhin immer angenommen wird, so ist dadurch die Zahlreihe selbst als stetige gefordert. Aber auch ohne jede Rücksicht auf das Bedürfnis der Geometrie, in reiner Arithmetik ist die mittlere Proportionale zwischen 1 und 2, ist überhaupt das Irrationale und um seinetwillen die Stetigkeit der Zahl unentbehrlich, wenn auch nur die einfachsten Rechnungsarten allgemeine Anwendbarkeit behalten sollen. Nur soll man nicht immer wieder die Unumgänglichkeit der Forderung verwechseln mit ihrem Erfülltsein.

§ 5. (*Lösungen von Weierstraß, Cantor, Pasch, Veronese.*) Trotz allem Gesagten lag in Dedekinds Erklärung der wahre logische Grund der Stetigkeit verborgen, aber eben verborgen; es war noch nötig, ihn ans Licht zu ziehen. Daß er nicht zutage kam, hatte seinen wesentlichen Grund darin, daß immer noch vom Endlichen, Diskreten, Rationalen als dem zweifellos Gegebenen und Bestimmten ausgegangen wurde und dann durch irgendeine bestimmte Beziehung unter Rationalem das Irrationale zur Bestimmung gebracht werden sollte. Das konnte ein für allemal nicht gelingen. Durch keine Kunst läßt sich aus Rationalem Irrationales, aus Diskretem Stetiges machen. Es muß vielmehr gezeigt werden können, daß der nicht rational, d. h. endlich und diskret bestimmte Wert in sich etwas ist und in sich bestimmt ist, ja aus dem Boden des Unendlichen, aus dem er erwächst, eine gediegenere Bestimmtheit zu schöpfen vermag, als die dem bloß endlich bestimmten Werte zukäme. Den rein mathematischen Ausdruck dieses richtigeren Weges sehe ich darin, daß Weierstraß und Cantor[1]) die konvergente unendliche Reihe selbst (bei Cantor: Fundamentalreihe) als in sich ebenso bestimmtes mathematisches Gebilde, wie die rationalen Zahlen, allem voraus aufstellen und von diesem dann beweisen, wie die Begriffe gleich, größer, kleiner, die arithmetischen Grundoperationen und damit alle Beziehungen des Mehr und Weniger im Stellverhältnis wie im metrischen Verhältnis auf sie, in Verbindung mit rationalen Werten wie unter sich, gegründete Anwendung finden. Und dasselbe leistet in vorzüglich durchsichtiger und einfacher Weise Pasch [*139*] durch den Begriff der „Zahlstrecke". Auf solche Weise wird — wie Cantor klar ausspricht[2]) — der Grenzwert der unendlichen Reihen nicht mehr „präsumiert"; es ist gar nicht mehr nötig, ihn zu präsumieren, denn es ergibt sich, daß die irrationale Zahl „vermöge der ihr durch die Definitionen gegebenen Beschaffenheit eine ebenso bestimmte Realität in unserem Geiste hat wie die rationale, selbst wie die ganze rationale Zahl, und daß man sie nicht erst durch einen Grenzprozeß zu gewinnen braucht, sondern vielmehr im Gegenteil durch ihren Besitz von der Tunlichkeit und Evidenz der Grenzprozesse allgemein überzeugt wird". Es ist mehr zu sagen: es ist nach dieser Betrachtungsweise überhaupt kein Grund mehr, zwischen der Reihe und ihrem Grenzwert zu unterscheiden; die Reihe stellt selbst, als in sich bestimmtes Gebilde, den neuen Wert dar; wie denn Pasch ausdrücklich die den irrationalen Wert definierende Reihe als Zahlstrecke ohne Begrenzung bezeichnet. Aber auch Cantor erwähnt mit Zustimmung, daß, durch ihn angeregt, Heine die Irrationalen einfach durch die Reihen selbst ausgedrückt habe.

---

1) A. 21, § 9 u. 10. 2) A. 21, 568.

Auf diese Weise bleibt kein Raum mehr für unsere vorigen Bedenken. Indem die konvergente unendliche Reihe in sich eindeutig bestimmt und damit zugleich alle Verhältnisse des Mehr und Weniger zu jedem gegebenen rationalen Wert (sowie der irrationalen untereinander) bestimmbar sind, ist allem genügt, was für den rechnerischen Gebrauch des Irrationalen erforderlich ist. Das in logischer Hinsicht entscheidend Wichtige aber ist, daß hiermit der Überschritt in eine neue Wertordnung vollzogen ist; nämlich es wird nicht mehr bloß eine unbeschränkt fortsetzbare Folge rationaler Werte, die man sich etwa in Aristoteles' Weise immer einen an die Stelle des anderen tretend zu denken hätte, sondern vielmehr die Allheit eines Wertgebietes gesetzt, kraft welcher die Reihe im Endlichen unbeschränkt fortschreitender Setzungen ein neues Ganzes als in sich so bestimmtes Denkgebiet setzt, als nur irgend die rationalen Werte bestimmt gedacht werden mögen. Das ist der neue Denkschritt, vor dem man zurückscheute und der doch unerläßlich war, wenn die „Existenz" des Irrationalen legitim begründet und nicht erschlichen werden sollte.

Auch hier aber blieb es Veronese vorbehalten, die (soviel ich sehe) letzte Präzision, die durch rein mathematische Mittel erreichbar war, zu erreichen. Er zeigt überzeugend[1]): Aus den im rationalen Bereich geltenden Gesetzen folgt nicht, daß ein Wert außerhalb des rationalen Bereiches existieren muß, „es sei denn, man wüßte schon", daß er existiert. Daher kann die Existenz solcher Werte nur durch eine neue „Hypothese" (seine Hypoth. VI, § 96) eingeführt werden, die aber, im Einklang mit der Aufstellung der ins Unendliche fortgehenden Reihe von „Unendlichen", unangreifbare Berechtigung hat. Denn diese gestattet ohne weiteres, Werte, die durch keine auch unbegrenzte Folge rationaler, d. h. durch die gegebene Einheit bestimmbarer

1) Grundz. [*175*], Einl. § 96, Bem. I.

Werte punktuell bestimmt sind, als dennoch punktuell bestimmt zu setzen. Eben diese allgemeine Voraussetzung ermöglicht aber auch, einen schärferen Begriff der Stetigkeit zu geben. Nach Veronese ist auch das durch die Einstellung der in Bezug auf die gegebene Einheit irrationalen Werte geschaffene System nur relativ, eben in Bezug auf diese Einheit stetig, während dasselbe System in Bezug auf eine andere, im Verhältnis zu jener unendlich kleine Einheit wiederum unstetig sein kann. Im absoluten Sinne ist das, einem in Bezug auf die gegebene Einheit unbegrenzt kleinen Segment XX' entsprechend gesetzte „Element" (der Grenzpunkt) vielmehr ein „Segment" (Grenzsegment), das nur in Bezug auf diese Einheit einem Element gleichzusetzen ist. Erst wenn die Veränderlichkeit nicht bloß in Bezug auf eine bestimmte gegebene, sondern in Bezug auf jede Einheit verstanden würde, würde das Grenzelement absolut einzig, d. h. die Differenz XX' absolut Null werden. Indessen ist nicht nur kein Grund, ein letztes, absolut Unendlichkleines zu setzen, sondern es ist, zur Wahrung der Gleichmäßigkeit, sagt Veronese, vielmehr anzunehmen, daß die Reihe der Ordnungen der unendlich kleinen Gebiete selbst unbegrenzt sei.[1] Es ist[2] nur eine im Interesse der Gleichförmigkeit der Ausdrücke gewählte Redeweise, wenn die Null als das absolut Unendlichkleine in Bezug auf die absolute Einheit (d. h. in Bezug auf jedes beliebige Segment als Maßeinheit) bezeichnet wird; in Wahrheit darf von gar keinem absolut Unendlichkleinen die Rede sein. Indem also die Definition der Stetigkeit durch die Einstellung der Reihenzahlen ausgedehnt wird auf die unendlichen Ordnungen unendlichkleiner Einheiten, erhält erst die Stetigkeit selbst absoluten Sinn.[3]

Diese ganz radikale Fassung des Begriffs des mathema-

1) § 100, Bem. I, 5); ebenda Hyp. VII. 2) Ebenda, Def. I. 3) Hyp. VIII und Def. I, § 101.

tisch Unendlichkleinen und damit des Stetigen erscheint nicht bloß zulässig, sondern notwendig, sobald nicht mehr durch das sogenannte Archimedische Prinzip (Ausmeßbarkeit der Größe durch irgendeinen Teil) die absolute Grenze der zulässigen Zahlsetzungen bestimmt sein soll. Dies Prinzip bedeutet eben die stillschweigende Voraussetzung des Beharrens auf der endlichen Teilung. Es war aber die Voraussetzung auch der Dedekindschen Erklärung; einzig durch das Überschreiten dieser Voraussetzung war über Dedekind wirklich hinauszukommen und damit das Irrationale als rechtmäßiges mathematisches Gebilde zu begründen. Also hat Cantor richtig gesehen, daß die Anerkennung des Irrationalen in seiner strengen Bedeutung die des Transfiniten einschließt. Jene Voraussetzung hat in der Tat keine Notwendigkeit mehr, sobald man nicht, nach der alten Aristotelischen *petitio principii*[1]), das Endliche als das allein Existierende von vornherein annimmt. Das „Archimedische Prinzip" ist also wirklich, wie bereits oben gesagt wurde, eigentlich die Definition der Endlichkeit einer Größe.

Das Irrationale ist, in Bezug auf die gegebene Einheit, d. h. aber rational, nur auszudrücken durch die Konvergenz unendlicher nichtperiodischer Reihen. Was heißt es denn, das Irrationale rational ausdrücken? Es heißt, es einem Maßstab unterwerfen, der auf es, eben als das Irrationale, nicht paßt. Dieser Ausdruck ist notwendig, um das Irrationale mit dem Rationalen überhaupt vergleichbar zu machen. Aber genau als das Irrationale kann es durch diesen Ausdruck selbst nicht gegeben werden. Das war der Grund, weshalb die frühere, durch Dedekind zur schärfsten Fassung gebrachte Deutung des Irrationalen nicht

1) Diese wird offenkundig, wenn Aristoteles z. B. sagt (Phys. 206 a), ποcὸν heiße überhaupt ποcόν τι z. B. δίπουν, τρίπουν, d. h. das Soundsoviel einer gegebenen Einheit, womit ein unendliches Quantum von vornherein ausgeschlossen ist.

befriedigte; es war der Grund der doppelten *petitio principii*, die wir oben hervorzuheben hatten. Wie nämlich das Irrationale überhaupt durch die unendliche Reihe, insofern sie aus rationalen Gliedern besteht, nicht gegeben werden kann, so vollends nicht die Allheit der irrationalen Zahlen. Eine Definition z. B. durch die überhaupt möglichen Dezimalbrüche (die man erschöpfend zu geben glaubt, indem man sich jede Dezimalstelle der Reihe nach durch die Zahlen 0 bis 9 besetzt denkt) oder irgendeine dieser ähnliche hilft der Schwierigkeit offenbar nicht ab, bestätigt vielmehr nur die Unmöglichkeit einer erschöpfenden Definition. Man zählt doch immer nur mit 0, 1, 2 . . ., aber von 0 zu 1, von 1 zu 2 usf. im Zähler bleibt logisch immer derselbe Sprung, gleichviel welche Potenz von 10 (oder sonst einer Zahl) als Nenner angenommen ist. Der Grund der Unmöglichkeit liegt aber ersichtlich in dem Festhalten an der Forderung der Meßbarkeit durch die einzige ursprünglich angenommene Einheit. Nun mag man sagen: auch wenn man auf diese Forderung verzichte und die unendlichen Ordnungen von Unendlichkleinen mit Veronese einführe, so werde hieran nichts geändert, da in Bezug auf jede gewählte Einheit dasselbe gelte. Aber eben in dem prinzipiellen Hinausgehen über jede wie auch immer gewählte Einheit zu einer neuen liegt der Überschritt zur echten Unendlichkeit und damit Stetigkeit der Zahl. Auch Veronese vermag nicht und versucht gar nicht das Unmögliche, aus Diskretem Stetiges zu machen; er stellt im Gegenteil das absolute Hinausgehen der Stetigkeit über jede, und wäre es unendlichfach unendliche Diskretion unumstößlich fest.

So allein kommt endgültige Klarheit in die Sache. Es wird die Zahl zum reinen und adäquaten Ausdruck der Denkgesetzlichkeit selbst in ihrem ganzen Umfang, die nichts anderes ist als Gesetzlichkeit der Relation, gültig für Relationen von Relationen usf. ohne Schranken. Es sollte dann nur auch von keinem „Geheimnis“ der Stetigkeit weiter die Rede sein[1]), in welches es unserer „Vorstellung“ nicht gestattet sei, einzudringen. Gewiß ist die Stetigkeit absolut undurchdringlich für unser sinnliches Vorstellen, aber für dieses ist überhaupt jeder reine Denkgegenstand undurchdringliches Geheimnis. Es dürfte ebensowenig die Annahme des Stetigen noch in irgendeinem Sinne auf das Zeugnis der „Anschauung“ gestützt werden. Stetigkeit kann so wenig angeschaut wie empfunden, sie kann nur gedacht werden, da sie nichts anderes als das letzte Grundgesetz des Denkens selbst bloßlegt und zum wissenschaftlich genauen Ausdruck bringt. Aber in der Berufung auf die Anschauung verbirgt sich hier wie oft die richtige Ahnung einer neuen, nur noch nicht klar als solche erfaßten Denkleistung. Man meinte das Diskrete mit dem reinen Denken (das zunächst sondernd verfährt) zu durchdringen, während man noch nicht sah, welches (natürlich andere) reine Denken es ist, welches die Stetigkeit begründet; so schob man sie dann ab auf die höchst fragwürdige Instanz der Anschauung; immerhin mit dem Vorbehalt, daß diese „als notwendiger Bestandteil weder in der Fassung der Sätze oder der Definitionen, noch in den Beweisen auftreten dürfe“. Veronese selbst hat dagegen anderwärts[2]) die Mathematik des Unendlichen von jedem Zwang der Berufung auf Anschauung mit vollem Recht freigesprochen. Die unendlich großen und unendlich kleinen Segmente, heißt es dort, werden „nicht mittels der Anschauung bestimmt, sondern durch einen möglichen geistigen (d. h. reinen Denk-) Akt, und gerade dies verbürgt ihre geometrische Möglichkeit“; eine „Möglichkeit“, die offenbar auch für ihn zugleich Existenz und Notwendigkeit ist.

Indessen ist auch mit diesem allen in logischer Beziehung

---

1) Veronese, S. 56, Anm.
2) Im Anhang der Grundz., S. 704f.

noch nicht die letzte Klärung gewonnen, sondern es bleibt hier noch eine fernere Beleuchtung notwendig, die nicht bezwecken kann, die Sicherheit der Einführung des Irrationalen noch über den erreichten Grad zu erhöhen, wohl aber darüber volles Licht zu geben, was mit der Einführung dieser Begriffe in logischer Hinsicht geleistet, welche eigentümliche Gesetzlichkeit des Denkens darin zu bestimmtem Ausdruck gebracht ist.

§ 6. (*Logische Beleuchtung des Problems. Die Stetigkeit und die qualitative Allheit.*) Es war von Anfang an falsch, die Stetigkeit definieren zu wollen durch die angebbare Möglichkeit der Diskretionen, da sie vielmehr das Hinausgehen über jede Diskretion besagt. Mit anderen Worten: es war falsch, die Stetigkeit definieren zu wollen durch eine Allheit selbst quantitativer Art, da durch die Quantität, auch durch eine bloß quantitativ verstandene Allheit, genau nur die Diskretion zu Begriff gebracht wird. Damit aber kommen wir erst zur Wurzel der ganzen Schwierigkeit, die zugleich den Grund ihrer Lösung enthält. Die Stetigkeit besagt vielmehr die qualitative Allheit, die jeder quantitativen logisch vorausliegt und sie erst möglich macht.

Im Sinne der reinen Quantität heißt „alle" soviel wie „sämtliche", alle zusammengenommen, alle der Reihe nach gesetzt, und dann vereinigt. Die Betrachtung geht also von den Einzelnen aus und nimmt diese nur hinterher gruppenweise zusammen. So sind „alle" entweder eine bestimmte Zahl oder doch eine solche, die bestimmt sein sollte, und es erscheint als Mangel, wenn sie sich wirklich nicht bestimmbar erweist. Im Sinne der Qualität dagegen bedeutet die Allheit vielmehr die Gattung, d. h. die Identität einer inhaltlichen Bestimmung, unter der die in einer Reihe sich ordnenden, insofern in diskreter Quantität auseinandertretenden Verschiedenheiten als in ihrer Wurzel Eins gedacht, oder als bloße, doch gesetzmäßige Abwandlungen