



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn

Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften

Natorp, Paul

Leipzig [u.a.], 1910

§ 6. Logische Beleuchtung des Problems. Die Stetigkeit und die qualitative Allheit.

urn:nbn:de:hbz:466:1-35817

noch nicht die letzte Klärung gewonnen, sondern es bleibt hier noch eine fernere Beleuchtung notwendig, die nicht bezwecken kann, die Sicherheit der Einführung des Irrationalen noch über den erreichten Grad zu erhöhen, wohl aber darüber volles Licht zu geben, was mit der Einführung dieser Begriffe in logischer Hinsicht geleistet, welche eigentümliche Gesetzlichkeit des Denkens darin zu bestimmtem Ausdruck gebracht ist.

§ 6. (*Logische Beleuchtung des Problems. Die Stetigkeit und die qualitative Allheit.*) Es war von Anfang an falsch, die Stetigkeit definieren zu wollen durch die angebbare Möglichkeit der Diskretionen, da sie vielmehr das Hinausgehen über jede Diskretion besagt. Mit anderen Worten: es war falsch, die Stetigkeit definieren zu wollen durch eine Allheit selbst quantitativer Art, da durch die Quantität, auch durch eine bloß quantitativ verstandene Allheit, genau nur die Diskretion zu Begriff gebracht wird. Damit aber kommen wir erst zur Wurzel der ganzen Schwierigkeit, die zugleich den Grund ihrer Lösung enthält. Die Stetigkeit besagt vielmehr die qualitative Allheit, die jeder quantitativen logisch vorausliegt und sie erst möglich macht.

Im Sinne der reinen Quantität heißt „alle“ soviel wie „sämtliche“, alle zusammengenommen, alle der Reihe nach gesetzt, und dann vereinigt. Die Betrachtung geht also von den Einzelnen aus und nimmt diese nur hinterher gruppenweise zusammen. So sind „alle“ entweder eine bestimmte Zahl oder doch eine solche, die bestimmt sein sollte, und es erscheint als Mangel, wenn sie sich wirklich nicht bestimmbar erweist. Im Sinne der Qualität dagegen bedeutet die Allheit vielmehr die Gattung, d. h. die Identität einer inhaltlichen Bestimmung, unter der die in einer Reihe sich ordnenden, insofern in diskreter Quantität auseinander tretenden Verschiedenheiten als in ihrer Wurzel Eins gedacht, oder als bloße, doch gesetzmäßige Abwandlungen

oder Entwicklungen desselben Einen erkannt werden. Hier liegt also die Allheit, als Ursprungseinheit, zugrunde, und werden nur unterhalb ihrer, in Ableitung aus ihr, die Einzelnen gesetzt. Also war es überhaupt falsch, das Kontinuum aus den diskreten Werten zusammensetzen zu wollen; die *compositio continui* war nichts als ein falsch gestelltes Problem. Das Unendliche vielmehr liegt, als Ursprung, zugrunde.

Es ist zuletzt nichts als das logische Grundverhältnis der Denkkontinuität zur Diskretion der sondernden Setzung im Denken, was in dem Verhältnis der Zahl als Kontinuum zu den Zahldiskretionen seinen bestimmten, wissenschaftlich entwickelbaren Ausdruck sucht und findet. Sähe man in der Zahl selbst nur den Ausdruck des Verfahrens der Quantität, schon als Verfahren definiert sie zugleich qualitativ eine Gattung, welche den bestimmten quantitativen Setzungen, und zwar allen unterschiedslos, sich rein qualitativ überordnet und allen vorhergeht, da keine quantitative Setzung im besonderen anders möglich ist als gemäß dem allgemeinen Gesetz des Verfahrens quantitativer Setzung überhaupt.

Mit gutem Grunde unterschieden daher schon die Alten zwischen „der“ Zahl im Sinne von: alle Zahl, oder die Zahl als Gattung, und den Zahlen. Ein anderes übergeordnetes Kontinuum als das der Zahl im Gattungssinne ist in der Tat nicht zu suchen noch zu verstehen. Zwar ist es richtig, daß das Kontinuum nicht anders definiert werden kann als durch das allbefassende Gesetz, gemäß welchem diskrete Zahlsetzungen überhaupt nur zulässig sind; nicht aber wird damit das Kontinuum definiert durch die diskreten Setzungen, als ob diese vorangingen. Es kommt nur noch darauf an, zu bestimmen, was durch den Gattungsbegriff der Zahl genau gedacht, d. h. welches das Gattungsmerkmal ist, durch das die Allheit der möglichen Diskretionen, nicht als quantitative, sondern qualitative Allheit, gegeben

wird. Diese Frage aber setzen die vorigen Erwägungen uns in Stand zu beantworten. Blicke das Verfahren der Zahl notwendig beschränkt auf die rationale Beziehung zu einer einzigen, absolut gedachten, im schlechten Sinne „gegebenen“ Einheit, so bliebe damit sein Bereich selbst willkürlich beschränkt. Seine Erweiterung kann nur bestehen in einer Erweiterung eben des Verfahrens der Zahlsetzung. Diese ist es, die mit dem „Grenzverfahren“ angestrebt, aber nicht in einwandfreier Weise erreicht war. Worin aber liegt der logische Kern dieser Erweiterung?

Das hier entscheidende Merkmal verbirgt sich in einem Begriff, dessen fundamentale Wichtigkeit von den Mathematikern selbst noch nicht seit langer Zeit erkannt ist: dem Begriff des Zwischen. Weshalb durften die „Lücken“ oder „Schnitte“ des rationalen Systems, weshalb überhaupt das Spatium zwischen irgendwelchen rationalen oder auch irrationalen Werten, das Wertsegment als „existierend“ angenommen werden, existierend unter arithmetischem Gesichtspunkt; ohne doch durch einen diskreten Zahlwert bestimmt oder bestimmbar zu sein? Gibt es etwa hier¹⁾ ein Demokriteisches $\mu\eta\ \delta\upsilon$, ein Zahlvakuum, in das die diskreten Zahlen erst, wie die Atome in den leeren Raum, eintreten? Ja; man setzt der Sache nach ein solches arithmetisches „Nichtsein“, und zwar, wie Demokrit sein $\mu\eta\ \delta\upsilon$, als dennoch und erst recht seiend: um in es die Seienden engerer Bedeutung, die diskreten Zahlwerte, setzen zu dürfen. Ja, jenes Nichtseiende erweist sich gerade an Seinswert ursprünglicher als das enger bestimmte Sein der diskreten Zahlwerte, da es die Grundbedingung darstellt, die allein die letzteren zu setzen möglich macht, und die fortgilt über jede je vollzogene diskrete Setzung hinaus.

Um so weniger aber könnte es befriedigen, dies $\mu\eta\ \delta\upsilon$ nur negativ zu definieren durch das Nichterfülltsein mit den

1) In einem andern Sinne als oben S. 122.

eigentlich alleinigen, nämlich diskreten Setzungen, oder die Nichtbesetzung mit solchen (Lücke, Schnitt); oder auch durch die bloße Potentialität solcher Setzungen, obwohl diese, sofern sie auf den bedingenden Wert des unendlichen „Leeren“ für das Volle der diskreten Setzungen hinweist, der positiven Bestimmung schon um einen Schritt näher kommt. Es genügt in letztem Betracht eben nicht, zu sagen, daß es als Bedingung vorhergeht; sondern eben als vorhergehende Bedingung muß es, wenn auch nicht außer Beziehung zu den zu setzenden Diskretionen, doch in dieser Beziehung unabhängig, durch ein eigenes positives Merkmal derart bestimmt werden, daß dadurch den zu setzenden Diskretionen das Gesetz vielmehr vorgeschrieben, als etwa von diesen abgeleitet wird. Welches nun dies positive Merkmal sei, ist jetzt nicht mehr schwer zu sagen. Wie der Raum das Gesetz der Stellenordnung allgemein vorschreibt für alles in ihm zu setzende Reale, vor aller Maßbestimmung, unabhängig von ihr, die vielmehr umgekehrt durch jene erst möglich wird, so ist es das Gesetz der Stellordnung überhaupt, welches vor aller diskreten Zahlsetzung und für sie, insbesondere vor aller Maßbestimmtheit, das positive Grundmerkmal der Zahl als Gattung ausmacht. Dies Grundmerkmal der Stellordnung überhaupt, nämlich die Grundbeziehung des Vor und Nach in der Zählung und damit des Mehr und Weniger, liegt in der Tat der Unterscheidung des Rationalen und Irrationalen im letzten Grunde voraus, denn sie liegt überhaupt diesseits aller metrischen Beziehung, auf Grund deren erst Rationales und Irrationales unterscheidbar sind. Dies findet seinen bestimmtesten Ausdruck wiederum bei Veronese, durch die Einführung der „Skala“ (Messung durch eine bestimmte Einheit), lange nachdem die Reihe überhaupt, nämlich auf Grund der bloßen Ordnungsbeziehung, gesetzt, insbesondere auch die Homogenität eingeführt ist. Die Unabhängigkeit der Positionsbeziehung von jeder metrischen Beziehung zeigt sich übrigens durchweg in

den Beweisen der Existenz des Irrationalen darin, daß das Irrationale als genügend bestimmt gilt, wenn bewiesen ist, daß sein Verhältnis des Mehr und Weniger, d. h. des Vorhergehens und Nachfolgens in einer Reihe von Zahlwerten, gegenüber allen bis dahin gesetzten und noch zu setzenden Werten bestimmbar ist; bestimmbar nicht notwendig durch eine abgeschlossene Gleichung, sondern ebensowohl durch ein, sei's auch unendliches, System von Ungleichungen. Dies selbst, daß zur Bestimmung eines Zahlwertes nicht die Gleichung erforderlich ist, sondern nach bestimmten Maßgaben die Ungleichung genügt, beruht darauf, daß das Grundmerkmal der Zahl die Stellordnung oder die Beziehung des Mehr und Weniger überhaupt, und nicht die auf das Maß gestützte Beziehung der Gleichheit ist.

Man spricht von einer „Erweiterung“ des Zahlbegriffs durch die Einführung des Irrationalen. Die Erweiterung eines Begriffs kann aber rechtmäßig nur bedeuten die Aufhebung einer Beschränkung, die in dem letzten Gattungsmerkmal des fraglichen Begriffs in der Tat nicht lag. Verträgt und fordert ein Begriff eine Erweiterung, so muß er zuvor zu eng gefaßt gewesen sein. Die hier fragliche Erweiterung hat im Vorstehenden ihre Erklärung gefunden. Sie läßt sich auch so ausdrücken, daß von der Forderung der Kommensurabilität (Meßbarkeit durch eine gemeinsame Einheit) abgesehen wird. Ich hatte früher zur Lösung des Problems des Irrationalen mich der Hilfsannahme, eigentlich der Fiktion verschiedener Zählungen, nämlich mit verschiedenen, gegeneinander inkommensurablen Einheiten bedient. Diese Erklärung leistete gute Dienste zur deutlichen Herausstellung der Schwierigkeit; zu einer wirklichen Lösung ist auch sie nicht brauchbar, und in der Tat auch nicht notwendig. Verschiedene Zählungen sollten es nur darum sein, weil für eine und dieselbe Zählung bis dahin Kommensurabilität als Bedingung angenommen war. Nachdem aber diese Bedingung sich in rechtmäßiger Weise über-

schreitbar erwiesen hat, ist es zulässig, die irrationalen Werte mit den rationalen von Anfang an in einer Reihe vereint zu setzen. Die Einheit der Reihe ist genügend garantiert durch die Einheit des Grundgesetzes der Folge der Glieder aufeinander oder der Beziehung des Mehr und Weniger, nachdem diese als das die Zahl überhaupt konstituierende Merkmal erkannt ist. Ohne dies gemeinsame Merkmal hätte das Aufeinanderfallen der inkommensurablen Reihen der „Richtung“ nach, wie es in jener Interpretation angenommen wurde, überhaupt keinen sicheren Sinn. Die Plus-Minus-Richtung der Zahl ist in der Tat nur ein anderer Ausdruck jenes Grundmerkmals der Aufeinanderfolge der Glieder, welches überhaupt die Zahl konstituiert. Nur weil dieses Merkmal von vornherein den untereinander inkommensurablen Reihen gemeinsam war, ließen sie sich der Richtung nach aufeinanderfallend denken; die Einheit der Richtung ist eben bestimmt durch die immer gleiche Relation des Weniger und Mehr, als des in der Reihe Vor- und Nachgesetzten. Eben diesem gemeinsamen Merkmal zufolge brauchten aber die Reihen nicht erst künstlich zur Deckung gebracht zu werden, sondern durften von Anfang an als der Richtung nach einzige, weil überhaupt ihrem Wesen nach einzige Reihe „der“ Zahl (d. i. Abstufung nach dem Mehr und Weniger) gesetzt werden.

§ 7. (*Das Transfinite.*) Ist es somit allgemein der Rückgang auf die Qualität, wodurch das Problem der Stetigkeit bewältigt wird, so fragt es sich weiter nach den verschiedenen Gestalten, in denen die Qualitätsbeziehung an der Zahl sich ausdrückt und entfaltet.

Das Vorhergehen der Qualität überhaupt vor der Quantität begründet, wie sich zeigte, durch das Gattungsmerkmal des Vor und Nach oder der Positionsbeziehung überhaupt die Stetigkeit der Zahl. Diese enthält nun schon die ermöglichende Bedingung für die Zahlstrecke, als definiert