Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften

Natorp, Paul

Leipzig [u.a.], 1910

§ 7. Das Transfinite.

urn:nbn:de:hbz:466:1-35817

schreitbar erwiesen hat, ist es zulässig, die irrationalen Werte mit den rationalen von Anfang an in einer Reihe vereint zu setzen. Die Einheit der Reihe ist genügend garantiert durch die Einheit des Grundgesetzes der Folge der Glieder aufeinander oder der Beziehung des Mehr und Weniger, nachdem diese als das die Zahl überhaupt konstituierende Merkmal erkannt ist. Ohne dies gemeinsame Merkmal hätte das Aufeinanderfallen der inkommensurabelen Reihen der „Richtung" nach, wie es in jener Interpretation angenommen wurde, überhaupt keinen sicheren Sinn. Die Plus-Minus-Richtung der Zahl ist in der Tat nur ein anderer Ausdruck jenes Grundmerkmals der Aufeinanderfolge der Glieder, welches überhaupt die Zahl konstituiert. Nur weil dieses Merkmal von vornherein den untereinander inkommensurabelen Reihen gemeinsam war, ließen sie sich der Richtung nach aufeinanderfallend denken; die Einheit der Richtung ist eben bestimmt durch die immer gleiche Relation des Weniger und Mehr, als des in der Reihe Vor- und Nachgesetzten. Eben diesem gemeinsamen Merkmal zufolge brauchten aber die Reihen nicht erst künstlich zur Deckung gebracht zu werden, sondern durften von Anfang an als der Richtung nach einzige, weil überhaupt ihrem Wesen nach einzige Reihe „der" Zahl (d. i. Abstufung nach dem Mehr und Weniger) gesetzt werden.

§ 7. (*Das Transfinite.*) Ist es somit allgemein der Rückgang auf die Qualität, wodurch das Problem der Stetigkeit bewältigt wird, so fragt es sich weiter nach den verschiedenen Gestalten, in denen die Qualitätsbeziehung an der Zahl sich ausdrückt und entfaltet.

Das Vorhergehen der Qualität überhaupt vor der Quantität begründet, wie sich zeigte, durch das Gattungsmerkmal des Vor und Nach oder der Positionsbeziehung überhaupt die Stetigkeit der Zahl. Diese enthält nun schon die ermöglichende Bedingung für die Zahlstrecke, als definiert durch irgendein Gesetz der Entwicklung einer Folge von Werten (Reihe, insbesondere als unendliche), welche an die Forderung eines rational bestimmten Grenzwertes nicht mehr gebunden ist (Irrationalzahl). Sie begründet aber ganz allgemein die Möglichkeit, unendliche Folgen von Werten, die durch irgendein Gesetz gegeben werden, in Inbegriffen zu vereinigen, die nicht gleichsam von außen, durch endliche Grenzwerte, sondern in sich selbst, rein durch ihr erzeugendes Gesetz, also durch einen Universalbegriff bestimmt sind. Solche können dann untereinander durch Beziehungen verknüpft sein, die wiederum durch qualitative, nicht quantitative Bestimmungen definiert werden. Ein „unendlichkleines" Segment ist, obwohl stets durch irgendeine gesetzmäßige Beziehung zu einem gegebenen endlichen Bereich gesetzt, doch als solches nicht durch eine Beziehung quantitativer Art zur Einheit des endlichen Bereichs definierbar. Es ist in Beziehung auf ihn nur „Grenze" und als solche der Quantität nach Null; während es an sich nicht vom Zahlwert Null sein, sondern in einer anderen Zahlordnung einen geltenden Wert haben soll, dem gegenüber wieder ein anderes Unendlichkleines gesetzt, d. h. der Überschritt wieder in eine andere Ordnung von Zahlwerten vollzogen werden kann, und so unbeschränkt weiter. So ist der Punkt in der Dimension der Linie betrachtet Null, ebenso die Linie in der zweidimensionalen, die Fläche in der dreidimensionalen Ordnung. Abstrahiert man nun hierbei von der Lagebeziehung der Dimensionen (die uns hier noch nicht zu beschäftigen hat) und beachtet allein das Verhältnis zum jedesmaligen Nullwert und der zugehörigen Größenerstreckung (Extension) überhaupt, so gewinnt man ein zutreffendes Bild der verschiedenen Ordnungen des Unendlichen und Unendlichkleinen. Man kann sich aber ebensowohl in einer einzigen Gesamtordnung, dem „linearen Kontinuum", das man sich in gewöhnlicher Weise durch eine einzige Gerade repräsentiert denken mag, dasselbe Verhältnis in folgender Art klar machen. Man stelle in üblicher Weise die Zahleinheit, die als Ausgang dient, als begrenzte Strecke dar, so sind innerhalb ihrer unendliche Punkte setzbar. Man halbiere etwa die Einheit im Punkte $\frac{1}{2}$, die Hälften in den Punkten $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ usf., so liegt die ganze unendliche Folge der so entstehenden Punkte eingeschlossen zwischen den Punkten 0 und 1, ohne diese beiden Grenzen je zu erreichen. Man hat also innerhalb dieser Grenzen unendliche, in Bezug auf die angenommene Einheit unendlichkleine Strecken, jede in Bezug auf diese vom Betrag $\frac{1}{2^{\infty}}$, der sich als Einheit in einer neuen Zahlordnung betrachten und genau so behandeln, d. h. wieder unendlich teilen läßt, und so ohne Grenzen weiter. Es kann nun aber, da die Einheit überhaupt kein Absolutes ist, sondern die Bedeutung des Grundelements allemal nur für eine bestimmte Zählordnung hat, ebensowohl die erst angenommene Einheit als unendlichklein gegenüber einer höheren angesehen, d. h. sie kann unendlich vielmal gesetzt und diese ganze unendliche Folge ebenso wie die der Unendlichkleinen der vorigen Ordnung zwischen zwei Werten 0 und 1 einer nächsthöheren Wertordnung eingeschlossen gedacht werden, dann diese wieder ebenso, und so fort ebenfalls ohne Grenzen. So ergibt sich von irgendeinem willkürlich gewählten Ausgangswert Null an in einfachster Weise die Cantorsche Reihe, oder vielmehr die Veronesesche:

$$0, 1, 2 \cdots \omega, \omega + 1, \cdots 2\omega, 2\omega + 1, \cdots n\omega \cdots \omega\omega \cdots,$$

d. h. nicht nur ein Unendliches, sondern unendliche Folgen von Unendlichen, und unendliche Folgen solcher Folgen, und so immer weiter. Die Möglichkeit dieser ganzen Reihe bestimmter Unendlichkeiten ist, wie schon bemerkt, einfach darin begründet, daß auch eine unendliche Folge durch irgendein Gesetz, nach dem sie gebildet ist, gegeben und bestimmt sein kann, als ein „Inbegriff", der insoweit nur eine qualitative oder Gattungseinheit darstellt, in dem Fall aber, daß diese unendliche Folge zwischen irgendwelchen Grenzwerten des nächst übergeordneten Gebietes eingeschlossen ist, innerhalb dieses einen Umfang oder Bereich ausmacht, über den hinaus ein fernerer existiert, der mit anderen endlichen oder wiederum unendlichen Bereichen Vergleichungen auch quantitativer Art zuläßt.

Die Vergleichbarkeit wird hergestellt durch irgendeine gesetzmäßige Zuordnung von Glied zu Glied. Diese ergibt nur, wenn jeder der verglichenen Inbegriffe durch eine erschöpfbare Schrittzahl darstellbar ist, den gewöhnlichen Begriff der Gleichheit und die entsprechenden des Mehr und Weniger; wenn dagegen unendliche Inbegriffe in Vergleichung kommen, so erfahren diese selben Begriffe eine Erweiterung, indem die gegenseitig eindeutige Zuordnung festgehalten, auf die Forderung der erschöpfbaren Schrittzahl aber verzichtet wird. Es können dann natürlich die Gesetze der Beziehungen des Gleichviel, Mehr und Weniger nicht in jeder Hinsicht unverändert in Geltung bleiben; dies spricht sich aus in den bekannten „Paradoxieen des Unendlichen" [1]), die fast immer auf die eine fundamentale Abweichung zurückgehen, daß eine überendliche Menge einer Teilmenge ihrer selbst äquivalent sein kann. So ist, um nur an Allernächstliegendes zu erinnern, der Reihe der positiven ganzen Zahlen die Reihe der positiven geraden Zahlen äquivalent, da sich jeder positiven ganzen Zahl ihr Doppeltes zuordnen läßt und auf diese Weise den sämtlichen ganzen die sämtlichen geraden Zahlen gegenseitig eindeutig entsprechen. Es scheint also im Unendlichen nicht wie im Endlichen zu gelten, daß das Ganze stets mehr ist als sein Teil; man kann die unendliche Menge geradezu (mit Dedekind) durch diese Eigenschaft definieren, daß

1) Bolzano [*10*].

sie einer Teilmenge ihrer selbst (nicht gleich aber) äquivalent (d. h. gegenseitig eindeutig zuordnungsfähig) ist. Genauer wird man sagen, daß der Begriff des Verhältnisses von Ganzem und Teil nicht völlig derselbe bleibt, wo Unendliches mit in Vergleichung kommt. Nicht das ist zu verwundern, sondern eher, daß, obgleich also die im Endlichen geltenden Beziehungen im Unendlichen nicht unverändert gelten bleiben, dennoch eine Rechnung mit dem Unendlichen widerspruchslos möglich bleibt; daß Beziehungen, in weitem Umfang analog den im Endlichen geltenden, bestehen; daß die Begriffe Gleichviel, Mehr, Weniger und sämtliche Rechnungsarten bei sinngemäßer Abänderung ihrer Gesetze Anwendung leiden und zu sicheren und brauchbaren Ergebnissen führen. Aller Schein des Widerspruchs entspringt (wie Cantor[1]) eingehend gezeigt hat) nur daraus, daß man in jedem Betracht dieselben Beziehungen, die im Endlichen gelten, im Unendlichen wiederzufinden erwartet, während die Übertragung derselben Grundgesetze auf dies ganz andere Gebiet natürlich gewisse Abänderungen zur Folge haben muß. Es sind eben nicht mehr durch eine endliche Schrittzahl bestimmte Summen, mit denen gerechnet wird, sondern überendliche Inbegriffe. Unterschiedslos auf beide erstreckt sich der Cantorsche Grundbegriff der „Mächtigkeit", beruhend auf der gegenseitig eindeutigen Zuordnung von Glied zu Glied; aber dieser behält eben nur bei endlichen Inbegriffen den bisherigen Sinn der Summe, während die Mächtigkeiten unendlicher Inbegriffe nicht im gleichen Sinne Summen darstellen, daher auch nicht allen den Gesetzen unterliegen, die für endliche Summen gelten. Es darf besonders auch nicht übersehen werden, daß die Mächtigkeit einer Menge und die Menge selbst nicht dasselbe sind[2]); wenn auch der Unterschied in erkenntniskritischer Beziehung nicht einwandfrei damit be-

1) Z. 91, 122ff. 2) Ebenda.

zeichnet ist, daß die letztere uns als „Objekt“ gegenüberstehe, die erstere, als ihr „abstraktes Bild“, nur in unserem Geiste existiere. Die Gesamtheit z. B. aller endlichen ganzen positiven Zahlen (ν), sagt Cantor, ist der „Entität“ nach „reicher“ als die aller geraden Zahlen (2ν), die eine Teilmenge von ihr bildet; aber doch kommt beiden dieselbe Mächtigkeit zu. „Beides ist sicher und keines steht dem andern im Wege, wenn man nur auf die Distinktion von Realität und Zahl achtet“. Die Distinktion ist wenigstens in dieser Fassung nicht wohl annehmbar; der größere „Reichtum“ an Entität, das „Mehr“ an Realität verlangt, wie schließlich jeder Komparativ, einen Ausdruck in der Zahl, da die Zahl überhaupt die Abstufung des Mehr und Weniger, jedes Mehr und Weniger bedeuten will. Also wird es in irgendeinem Sinne auch richtig sein, zu sagen, daß die Gesamtheit (ν) aller positiven ganzen Zahlen der Zahl nach mehr ist als die Gesamtheit (2ν) aller geraden Zahlen; aber eben nicht der Mächtigkeit nach, die zwar auch eine arithmetische Beziehung, nur eben von eigener Art ist. Daß aber diese eigenartige Bestimmungsweise auf der Qualität beruht, wird ganz klar, wenn Cantor kurz vorher[1]) sagt: Die Behauptung, der Menge M komme dieselbe Kardinalzahl (Mächtigkeit) zu wie ihrer Teilmenge M', sei gleichbedeutend mit dem Satze: beide Mengen stehen unter einem und demselben Allgemeinbegriff, der durch Abstraktion von der Beschaffenheit und der Anordnung ihrer Elemente gewonnen wird; „seit wann aber wäre ein Widerspruch darin zu sehen, daß der Bestandteil eines Ganzen in irgendeiner Hinsicht unter demselben Universale stehe wie das Ganze?“ Nur ist zu fordern, daß genau bestimmt sei, in welcher Hinsicht Ganzes und Teil unter denselben Allgemeinbegriff fallen. Dies ist aber genau bestimmt durch das Verhältnis der gegenseitig eindeutigen Zuordnung, also ist sachlich alles in Richtigkeit.

1) S. 122.

Zur Unfruchtbarkeit verurteilt bliebe freilich die Rechnung mit dem Unendlichen, wenn wirklich, wie früher angenommen wurde, im Unendlichen alle Begriffsgrenzen, die im Endlichen gelten, ineinanderflössen und damit überhaupt alles in einen Nebel völliger Unbestimmtheit und Unbestimmbarkeit zerginge. Aber wenn gewisse Beziehungen, die im Endlichen stattfinden, im Unendlichen nicht mehr gelten, so bleiben deren genug übrig, um eine sichere Rechnung mit zweifellos gewissen und bedeutungsvollen Ergebnissen zu ermöglichen; dies bewiesen zu haben ist besonders das Verdienst Cantors. Der Kern und die wahre Fruchtbarkeit seiner Entdeckung liegt darin, daß es nicht nur ein unbestimmtes Unendliches gibt, welches wesentlich nur durch den Wegfall aller der Bestimmtheiten, die im Endlichen gelten, charakterisiert wäre, sondern eine schließlich wieder unendliche Folge scharf unterschiedener, gegeneinander und gegen den ganzen Bereich des Endlichen in strenger begrifflicher Bestimmtheit abgegrenzter Klassen von Unendlichen und eine sichere Rechnung mit diesen, die nicht nur ebenso exakte Resultate wie die Rechnung mit dem Endlichen liefert, sondern exakte Ergebnisse eben da ermöglicht, wo die aufs Endliche beschränkte Rechnung bei vagen Allgemeinheiten stehen zu bleiben genötigt wäre. So beweist man (um nur ein paar der wichtigsten Resultate zu berühren), daß zwar die Mächtigkeit der Gesamtheit der ganzen Zahlen ($\mathfrak{a}$) identisch ist mit der der Gesamtheit der rationalen und auch der algebraischen Zahlen, aber verschieden von ihr die Gesamtheit der reellen Zahlen oder des linearen Kontinuums ($\mathfrak{c} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{a}}$). Diese wiederum deckt sich mit der jedes noch so kleinen Intervalls des linearen Kontinuums, z. B. von 0 bis 1, andrerseits mit der des Kontinuums von beliebiger, selbst einfach unendlicher Dimensionenzahl (da auch $\mathfrak{c}^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{c}$), aber sie wird (nach Cantor) überboten durch die Mächtigkeit der Gesamtheit der reellen Funktionen einer oder mehrerer reellen Veränderlichen ($\mathfrak{f} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$). Diese und zahlreiche andere, besonders für die Funktionentheorie folgenreiche Sätze waren nicht zu gewinnen durch eine Rechnung, die im Endlichen stehen bleibt; diese hätte für alle diese Fälle nur den einen unterschiedslosen Begriff „des" Unendlichen zur Verfügung, welcher dann gleichbedeutend erscheint mit dem des aller Berechnung und Bestimmung Entzogenen; mit dem Dunkel, in dem alle Katzen grau sind.

Die einzige Erweiterung und damit zugleich Berichtigung, deren die Aufstellungen Cantors in prinzipieller Hinsicht noch bedurften, war die Ausdehnung der Relativierung, die Cantor mit dem Begriff des Unendlichen nach oben hin in der Reihe seiner „Alefs" richtig vollzogen hat, auch nach unten, d. h., die Anerkennung einer jener genau korrespondierenden unendlichen Reihe von Ordnungen des Unendlichkleinen. Diese Ergänzung hat aber, wie wir sahen, bereits Veronese vollbracht. Die entscheidenden Sätze Cantors über die Mächtigkeiten bleiben dabei alle richtig; gewonnen aber wird eine gesicherte Grundlage für die Infinitesimalanalysis in ihrem ganzen Umfang. Ganz abgesehen übrigens von jedem Ertrag an speziellen mathematischen Einsichten erreicht so das ganze System der Unendlichkeitsbegriffe der Mathematik eine durchsichtige Klarheit und innere Folgerichtigkeit, die, einmal errungen, nicht leichthin wieder preisgegeben werden kann.

Wir haben uns nun zur Infinitesimalanalysis den Übergang zu bahnen durch die Betrachtung der Begriffe der Veränderlichen und der Funktion.

§ 8. (*Die Zahl als Größe — Veränderliche — und als Funktion.*) Mit der Überordnung „der" Zahl über die bestimmten Zahlwerte ist ein wichtiger Begriff im Grunde schon eingeführt, unter dem erst die Zahl tauglich wird, nach der Ahnung der alten Pythagoreer und Platoniker das Sein, oder im bestimmteren Kantischen Terminus: die Realität dem