Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften

Natorp, Paul

Leipzig [u.a.], 1910

§ 9. Das Infinitesimalverfahren.

Wertreihe in mancherlei Beziehungen (z. B. als in einem bestimmten Intervall stetig oder unstetig) betrachten zunächst ohne Rücksicht auf eine Beziehung zwischen ihr und einer bestimmten anderen Veränderlichen y. So mag man von x und dx reden auch ohne Beziehung auf ein bestimmtes y und dy. Indessen ist hierbei die Funktionsbeziehung wenigstens zu einem möglichen y immer mitzudenken. Sonst wäre es nicht der Begriff einer Größe, der Größe, die der Forderung genügt, statt bloßer Zahlen ein zählbares Etwas zu vertreten. Dafür bleibt unerläßlich wenigstens die allgemeine Voraussetzung der möglichen Beziehung einer Veränderlichen auf eine andere als deren Funktion.

§ 9. (*Das Infinitesimalverfahren.*) Wir haben nunmehr die Voraussetzungen beisammen, um die Methode der Infinitesimalrechnung uns deuten zu können. Ihre fundamental wichtige logische Bedeutung erkannt zu haben, ist besonders das Verdienst H. Cohens [*22*], dessen Darstellung freilich für den nicht philosophisch wie mathematisch gleich vorbereiteten Leser große Schwierigkeiten bietet.

Der allgemeine Sinn und die Absicht des Infinitesimalverfahrens läßt sich indessen auch dem mathematischen Laien unschwer verständlich machen. Eine veränderliche Größe schreitet fort von Wert zu Wert, also in bestimmten, zunächst endlichen Differenzen. Sofern nun zwei Veränderliche (x, y) hinsichtlich des Ganges ihrer Veränderungen miteinander verglichen und in gesetzmäßiger Beziehung erkannt werden sollen, so wird die eine von ihnen (die abhängig Veränderliche, y) allemal eine bestimmte Differenz (Δy) durchmessen, wenn die andere (unabhängig Veränderliche, x) eine bestimmte Differenz (Δx) durchmißt. Das Verhältnis der Differenzen beider Größen also, das sich als Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ schreiben läßt, drückt dann den Gang der

Veränderung der einen im Verhältnis zu dem der anderen Größe aus. Nun soll aber die beiderseitige Änderung nicht sprung- oder absatzweise, d. h. durch Differenzen von bestimmtem endlichen Betrag, sondern kontinuierlich geschehen; es soll mit anderen Worten der Wertbetrag auf beiden Seiten in keinem Punkte unverändert bleiben. Durch die Vergleichung der in endlichen Abständen gemessenen Differenzen aber ist die Änderung nur ruckweise, also diskontinuierlich zum Ausdruck gebracht. Um sie als kontinuierliche auszudrücken, fragt man: was wird aus dem Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, wenn die Differenzen beiderseits kleiner und kleiner werden, kleiner als jeder endliche Betrag? D. h.: welches ist der Grenzwert dieses Verhältnisses, wenn beide Differenzen sich der Null unbegrenzt nähern? Dieser Ausdruck wird noch immer als Verhältnis, mithin als Quotient geschrieben, obgleich es kein Quotient für sich gegebener meßbarer Zahlwerte mehr ist; man schreibt ihn so gleichsam zur Erinnerung an seine Entstehung aus dem Quotienten der Differenzen. Dieser neue Ausdruck zeigt aber gegenüber dem vorigen eine wesentlich veränderte, in vielen und wichtigen Fällen vereinfachte Gestalt. Um den Sinn dieser Vereinfachung durchsichtig zu machen, ist es nützlich, ein typisches Beispiel ins Auge zu fassen; ein Beispiel höchst elementarer Art, für welches das Verfahren der Differentiation freilich nicht erdacht zu werden brauchte, da in diesem Fall das Ergebnis sich auch ohne das gewinnen ließ; welches aber eben darum besonders geeignet ist, dem, der über den Sinn des Verfahrens erst Klarheit sucht, eine Vorstellung davon zu geben, worin es eigentlich besteht und was damit geleistet wird.

Man bezeichnet in der Mechanik mit g die Endgeschwindigkeit, welche beim Fall schwerer Körper nach einer Sekunde vom Beginn der Fallbewegung an erreicht wird. Da nun der Fall schwerer Körper dem Gesetze der gleichförmigen Beschleunigung unterliegt, so ist die Endgeschwindigkeit nach 2 Sekunden $2g$, nach t Sekunden tg:

$$v = tg. \tag{1}$$

Der durchmessene Raum ist, wie man leicht einsieht, gleich der mittleren Geschwindigkeit; also in der ersten Sekunde gleich dem Mittel zwischen 0 und g, oder $= \frac{1}{2}g$; in der zweiten Sekunde gleich dem Mittel zwischen g und $2g$, also $= \frac{3}{2}g$; so in der dritten $= \frac{5}{2}g$ und so fort. Also in der ersten $= \frac{1}{2}g$, in den zwei ersten zusammen

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \text{ oder}\right) \frac{4}{2}g,$$

in den drei ersten

$$\left(\frac{1+3+5}{2} \text{ oder}\right) \frac{9}{2}g,$$

und so fort. Die durchmessenen Räume also schreiten von Sekunde zu Sekunde im Verhältnis der Quadratzahlen fort; der Fallraum in t Sekunden ist

$$s = \frac{1}{2}gt^2. \tag{2}$$

Diese Gleichungen (1, 2) ließen sich aufstellen, ohne daß es dazu der Formeln des Infinitesimalverfahrens bedurfte. Nun aber zeigt sich, daß die erste dieser Gleichungen aus der zweiten durch Differentiation, oder die zweite aus der ersten durch Integration gewonnen werden kann. Es genügt, das Erstere zu zeigen. s ist stetig veränderlich mit t oder eine stetige Funktion von t, d. h. jeder Änderung von t entspricht eine bestimmte Änderung von s, in beiderseits stetigem Übergang, nach dem Gesetz, welches durch die Gleichung (2) ausgedrückt ist. Erhält also die Größe t einen Zuwachs um eine bestimmte Differenz Δt, so erhält die Größe s einen dem genannten Gesetz gemäß diesem entsprechenden Zuwachs Δs. Dies drückt sich sachgemäß so aus, daß in der Gleichung (2) s durch $s + \Delta s$, t durch $t + \Delta t$ ersetzt wird; also

$$s + \Delta s = \frac{1}{2} g (t + \Delta t)^2,$$

oder, indem $s = \frac{1}{2} g t^2$ beiderseits wegfällt:

$$\Delta s = g t \cdot \Delta t + \frac{1}{2} g \cdot \Delta t^2$$

oder

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = g t + \frac{1}{2} g \cdot \Delta t.$$

Durch diese Gleichung ist das Verhältnis irgendwelcher willkürlich gewählten endlichen Änderung von s zu einer entsprechenden, ebenfalls endlichen Änderung von t angegeben, in einem Ausdruck, der, wie man sieht, nicht von g und t allein, sondern noch von der unbestimmten, willkürlich wählbaren Größe Δt abhängt. Läßt man nun aber beide Differenzen sich unbegrenzt der Null nähern, so wird sich das zweite Glied zur Rechten ebenfalls der Null, der Wert des Verhältnisses $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, also dem Werte $g t$ unbegrenzt nähern. Diesen Grenzwert schreibt man in Gestalt eines neuen Quotienten $\frac{ds}{dt}$, welcher der Differentialquotient heißt. Er bedeutet dem Buchstaben nach das Verhältnis der unendlichklein werdenden oder „verschwindenden" Differenzen Δs und Δt, d. h., den Ausdruck, den das Verhältnis der beiden Differenzen erhält, wenn beide sich gleichzeitig der Null unbegrenzt nähern. Was aber der sachliche Sinn dieses Quotienten ist, ergibt das Beispiel klar. Wir wissen ja schon aus unserer Gleichung (1), was der erhaltene Ausdruck $g t$ wirklich bedeutet, nämlich die Endgeschwindigkeit, die in der Zeit t, vom Beginn des Falls gerechnet, erreicht wird. Der „Differentialquotient" $\frac{ds}{dt} = g t$ aus der Gleichung $s = \frac{1}{2} g t^2$ besagt also nichts

Geheimnisvolleres als: Wenn in der Zeit t der Raum s gemäß dem Gesetz der gleichförmigen Beschleunigung durchmessen wird, so ist die im Endmoment erreichte Geschwindigkeit $= g \cdot t$, wo g eine bekannte, unter bestimmten Voraussetzungen konstante Größe ist, nämlich die Fallgeschwindigkeit, die nach einer Sekunde erreicht wird, welche unter sonst gleichen Umständen, namentlich in gleicher Entfernung vom Attraktionszentrum, konstant ist.

Es sei sogleich noch ein zweites Beispiel von nicht minder typischem Charakter hinzugefügt, die Differentiation der Kreisgleichung. Hier ergibt sich der Differentialquotient gleich dem Verhältnis zweier aufeinander senkrechter Geraden, durch welches die Richtung der Tangente für einen beliebigen Punkt der Kreislinie bestimmt ist, oder auch gleich dem trigonometrischen Ausdruck eines Winkels, der dasselbe leistet: die Richtung der Tangente festzulegen. Die Differentiation der Kreisgleichung bedeutet also: Ein in der Kreisperipherie bewegter, somit konstant seine Richtung ändernder Punkt wird sich in einem gegebenen Moment seiner Bewegung, wenn er von diesem Momente ab seine Richtung nicht weiter ändert, sondern die in diesem Punkte erreichte Richtung innehält, in der Tangente fortbewegen. Umgekehrt kann man sich nun die Kreislinie entstehend denken durch Drehung einer Achse r um den Mittelpunkt, in deren anderem Endpunkt eine Senkrechte auf r gedacht wird, die zugleich mit der Achse unter Festhaltung des rechten Winkels sich dreht; so definiert die kontinuierliche Richtungsänderung dieser Senkrechten (d. h. der Tangente) die kontinuierliche Richtungsänderung eines in der Kreislinie bewegten Punktes von Moment zu Moment, oder die Krümmung der Kreislinie. Also während man einerseits aus dem gleichen Abstand jedes Peripheriepunktes vom Mittelpunkt beweist, daß die Tangente in jedem Peripheriepunkt auf dem Radius senkrecht steht, so kann man umgekehrt durch die kontinuierliche Richtungsänderung einer auf dem Radius in dessen Endpunkt errichteten Senkrechten die Kreislinie entstehend denken, so daß die kontinuierliche Richtungsänderung in der Kreislinie durch die Richtungsänderung der Tangente von Moment zu Moment dargestellt wird. Die Aufgabe, zu beliebigen, durch ihr analytisches Gesetz gegebenen Kurven die Tangenten zu finden und umgekehrt, war es historisch, die zur Entdeckung des Verfahrens der Differentation geführt hat, welches dann besonders Anwendung fand auf die Bestimmung der Geschwindigkeitsänderungen in der Mechanik. Daher dürfen die beiden vorgeführten Beispiele vor anderen als typisch gelten.

§ 10. (*Sinn des Differentialquotienten.*) Vergleicht man beide Beispiele, so ergibt sich, daß übereinstimmend hier und dort aus einem schon bekannten, für endliche Beträge der Änderung der verglichenen Größen geltenden Gesetze, nach welchem die Änderung der einen von der der anderen abhängt, eine neue Form des Änderungsgesetzes gewonnen wird für irgendeinen und zwar jeden beliebigen Punkt der Veränderung; dort die Endgeschwindigkeit, mit der der bewegte Körper, falls nicht weitere Geschwindigkeitsänderung hinzutritt, etwa in einer horizontalen Ebene ohne Widerstände, sich fortbewegen würde; hier die Endrichtung, in der ein in der Kreislinie bewegter Punkt, wenn nicht die Richtungsänderung fortdauert, aber das bis zu diesem Punkte erreichte Ergebnis der kontinuierlichen Richtungsänderung festgehalten wird, sich fortbewegen wird, welches offenbar die Richtung der Tangente sein muß. Hiernach versteht sich das „Verschwinden" der Differenz. Es kommt wirklich etwas in Wegfall, nämlich die weitere Fortdauer der Veränderung, indem nur das bis dahin erreichte Ergebnis der kontinuierlichen Veränderung festgehalten wird. So begreift sich, weshalb man in diesem und allen ähnlichen Fällen einen vereinfachten Ausdruck erhält, so im ersten Beispiel statt des quadratischen das einfache Verhältnis der Zeiten;