Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften

Natorp, Paul

Leipzig [u.a.], 1910

§ 10. Sinn des Differentialquotienten.

urn:nbn:de:hbz:466:1-35817

auf dem Radius in dessen Endpunkt errichteten Senkrechten die Kreislinie entstehend denken, so daß die kontinuierliche Richtungsänderung in der Kreislinie durch die Richtungsänderung der Tangente von Moment zu Moment dargestellt wird. Die Aufgabe, zu beliebigen, durch ihr analytisches Gesetz gegebenen Kurven die Tangenten zu finden und umgekehrt, war es historisch, die zur Entdeckung des Verfahrens der Differentation geführt hat, welches dann besonders Anwendung fand auf die Bestimmung der Geschwindigkeitsänderungen in der Mechanik. Daher dürfen die beiden vorgeführten Beispiele vor anderen als typisch gelten.

§ 10. (*Sinn des Differentialquotienten.*) Vergleicht man beide Beispiele, so ergibt sich, daß übereinstimmend hier und dort aus einem schon bekannten, für endliche Beträge der Änderung der verglichenen Größen geltenden Gesetze, nach welchem die Änderung der einen von der der anderen abhängt, eine neue Form des Änderungsgesetzes gewonnen wird für irgendeinen und zwar jeden beliebigen Punkt der Veränderung; dort die Endgeschwindigkeit, mit der der bewegte Körper, falls nicht weitere Geschwindigkeitsänderung hinzutritt, etwa in einer horizontalen Ebene ohne Widerstände, sich fortbewegen würde; hier die Endrichtung, in der ein in der Kreislinie bewegter Punkt, wenn nicht die Richtungsänderung fortdauert, aber das bis zu diesem Punkte erreichte Ergebnis der kontinuierlichen Richtungsänderung festgehalten wird, sich fortbewegen wird, welches offenbar die Richtung der Tangente sein muß. Hiernach versteht sich das „Verschwinden" der Differenz. Es kommt wirklich etwas in Wegfall, nämlich die weitere Fortdauer der Veränderung, indem nur das bis dahin erreichte Ergebnis der kontinuierlichen Veränderung festgehalten wird. So begreift sich, weshalb man in diesem und allen ähnlichen Fällen einen vereinfachten Ausdruck erhält, so im ersten Beispiel statt des quadratischen das einfache Verhältnis der Zeiten;

so allgemein, wenn y irgendeiner Potenz von x entspricht, eine um 1 verminderte Potenz.

Man mißt also durch den Differentialquotienten nicht das Verhältnis der unendlich kleinen Änderungen der kontinuierlich miteinander veränderlichen und in dieser Veränderung nie stillstehenden Größen y und x; sondern man fixiert das durch die nach bestimmtem Gesetz geschehende stetige Änderung im gegebenen diskreten Punkt erreichte, von da ab sich nicht weiter ändernde Ergebnis der Änderung, dieses aber in einem neuen Gesetzesausdruck (einer neuen Funktion), der für jeden Punkt der gedachten Änderung gilt. Damit erhält man einen gleichsam verdichteten Ausdruck des in anderer Form schon bekannten Gesetzes der Änderung, indem die neue, aus der vorigen abgeleitete, in diesen Fällen einfachere Funktionalbeziehung für den Punkt der Änderung, und zwar für jeden Punkt, daher in der Zusammenfassung (Integration) wieder für den ganzen, kontinuierlichen Verlauf der Änderung gilt. So ergibt sich aus der stetigen Folge der Endgeschwindigkeiten im Fall wieder umgekehrt das Fallgesetz, so aus den kontinuierlichen Richtungsänderungen der Tangente das Gesetz der Krümmung der Kurve. Das ist der verdeutlichte Sinn der zunächst dunklen Ausdrucksweise, daß die unendlichvielen unendlichkleinen Änderungen das Gesetz für den endlichen Betrag der Änderung ergeben, oder der Sinn des zur Differentiation reziproken Verfahrens der „Integration". Das Gesetz gilt für alle Punkte des Änderungsverlaufs; diese qualitative Allheit des Gesetzes als des Gattungsausdrucks der Veränderung erklärt das „Unendlichviel" und „Unendlichklein"; andere Rätsel sind darin nicht zu suchen. Aber eben indem diese Allheit qualitativer, nicht quantitativer Art ist, so ist durch das Infinitesimalverfahren das allgemeine Mittel gewonnen, echte Qualitäten zu streng gesetzmäßigem Ausdruck zu bringen. Schon Galilei hatte in seiner Ableitung des Fallgesetzes den Begriff des „Momentes" der

Geschwindigkeit eingeführt, worunter er verstand die durch die einem bestimmten Gesetz unterliegende, in diesem Fall konstante Beschleunigung in jedem Punkte der Zeit erreichte Geschwindigkeit. Indem aber die Fallbahn sich von Augenblick zu Augenblick in unendlichvielen unendlichkleinen Zuwüchsen an Geschwindigkeit erzeugend gedacht wird, erscheint die infinitesimale Geschwindigkeit als der Ursprung, aus dem die endlichen Fallräume sukzessiv hervorfließen. Das heißt es, wenn man, wie namentlich Newton, die infinitesimale Größe betrachtet als die erzeugende, die endliche als durch sie erzeugt; oder diese in jener involviert und aus ihr sich evolvierend. Der wahre Erzeuger der endlichen Größe ist nicht die „unendlichkleine" Größe (das Unendlichkleine wäre dem Größenwert nach vielmehr Null), sondern es ist das Gesetz der Größe (als Veränderlicher), das man sich nun wie in einen Punkt zusammengezogen, d. h. für den einzelnen Punkt ausgedrückt, oder an einer endlichen Erstreckung sich darstellend denken kann, das aber dem letzten Sachgehalt nach dasselbe ist für den Punkt und die endliche Erstreckung, wenn es auch in Bezug auf beide verschiedene, im allgemeinen auseinander ableitbare Ausdrücke erhalten muß. Da aber die endliche Größe überhaupt von Punkt zu Punkt entstehend (d. h. veränderlich) gedacht wird, so ist insofern der punktuelle, d. h. infinitesimale Ausdruck der fundamentale, aus dem der extensionale gleichsam erst hervorwächst. Die Differenz entsteht eben von der Null an; nicht aus ihr; aus Null wird keine extensive Größe; wohl aber von der Null, d. h. dem Nichtsein dessen, was werden soll, oder ganz schlicht[1]) vom Ausgangswert an; woraus? Aus dem Gesetz; eine andere Antwort ist nicht zu geben und nicht zu verlangen. Durch dies Gesetz aber ist die Größe als Eines, Identisches, im Unterschied von den sukzessiven Größenwerten, also in ihrem Gattungsausdruck definiert.

1) Vgl. oben S. 122.

Fragt man also: wie soll aus der Null gewordenen, „verschwundenen“ Größe die endliche Größe wiederentstehen? so ist zu antworten: die Größe zwar (*quantitas*), d. h. das So-und-so-groß, ist verschwunden, quantitativ Null geworden, aber nicht ist damit auch das Gesetz der Größe qualitativ zunichte geworden; also nicht die Größe im Sinne des Wiegroßen (*quantum*), d. h. des identisch Definierten, welches die sukzessiven Größenwerte nur wechselnd durchläuft, ohne in ihnen sich je zu verlieren und gleichsam auszugeben. Und wie ist es definiert? Eben durch das Gesetz, also in rein qualitativer Identität, wiewohl durch das Mittel quantitativer Beziehungen, die als solche sich stets nur am Endlichen darstellen. Denn auch in Bezug auf den Punkt kann das Gesetz nur formuliert werden durch quantitative Beziehungen unter endlichen Größen. Die Beispiele zeigen es klar, daß der Differentialquotient selbst eine endliche, für jeden Punkt konstante Größe darstellt (z. B. gt). Auch die Form des Quotienten ist hierbei an sich nicht wesentlich. Sie ist sogar leicht irreführend, gerade indem sie das dy und dx als neue, nur überaus kleine endliche Größen, so klein als man nur will, mißverstehen läßt. Das streng Unendlichkleine hätte überhaupt kein Wertverhältnis; dieses wäre, dem Zahlwert nach, $\frac{0}{0}$, was an sich kein möglicher Ausdruck eines definiten Wertverhältnisses ist. Es ist überhaupt nicht eine bloße quantitative Änderung des gegebenen endlichen Wertverhältnisses, sondern es ist etwas qualitativ Anderes, was der Differentialquotient gegenüber der ursprünglichen Funktion oder dem Differenzquotienten bedeutet; der Ausdruck als Quotient ist, wie gesagt, nur die Erinnerung an den Weg der Ableitung, auf dem der neue Ausdruck gewonnen wurde. Man redet daher richtig von der „derivierten Funktion“. Es ist in der Tat eine neue Funktion, die etwas Anderes als die erstgegebene ausdrückt, doch aus dieser abgeleitet.

Die wichtige allgemeine Bedeutung des Verfahrens aber besteht darin, daß dadurch Begriffsgrenzen überschreitbar werden, die ohne das für unüberschreitbar gelten müßten. Die Gerade, welche zwei Punkte mit der Kreisperipherie gemein hat, und die, welche nur einen Punkt mit ihr gemein hat, also sie nicht schneidet, sondern berührt, sind qualitativ verschiedene Begriffe. Es ist eine für die Anschauung bequeme Ausdrucksweise, wenn man die Schneidungspunkte der Sekante sich unendlich nahe kommen und so die Sekante schließlich in die Tangente übergehen läßt. Aber der rein logische Sinn dieser nur allzu anschaulichen Beschreibung des Vorgangs ist einzig der: es lassen sich Ausdrücke gesetzmäßiger Beziehungen, die für die Sekante gelten, in solche für die Tangente umsetzen, und es fallen auf diese Weise beide vorher dem Begriff nach geschiedenen Fälle qualitativ unter eine Betrachtung, unter ein und dasselbe höhere Gesetz. Die Stetigkeitsbetrachtung, daher das Infinitesimalverfahren, wird so zum geradezu universalen Mittel der Vereinheitlichung wissenschaftlicher Betrachtungen, die sich auf Größen irgendwelcher Art beziehen. Ganz analog ist die Rolle des Durchgangs durchs Unendliche in der Geometrie der Lage. Parallelen und Sichschneidende sind qualitativ verschiedene Begriffe; Parallelen schneiden sich ihrem Begriff nach eben nicht. Dennoch kommen beide unter eine Betrachtung, indem man die Parallelen als in einem „unendlichfernen Punkt" sich schneidend auffaßt. Was dieser seltsame Ausdruck der unendlichfernen Schneidung zweier sich nicht Schneidenden sachlich besagt, liegt zum Glück nicht unendlich fern; es besagt, daß ein stetiger Übergang gedacht werden kann und muß aus der Lage der sich Schneidenden in die der Parallelen, gemäß welchem jede Aussage, die für Sichschneidende gilt, sich mit richtigem Ergebnis überträgt auf den Grenzfall der sich nicht Schneidenden, d. h. eine einzige Gesetzlichkeit fortan beide Fälle umfaßt. So wird der

Durchgang durchs Unendliche zu dem methodischen Mittel einer berechtigten μετάβασις εἰς ἄλλο γένος, der Herstellung einer Kontinuität des Denkens, in welcher die vorher wie *A* und *non-A* geschiedenen Fälle sich unter höherer Betrachtung wieder vereinigen.

Durch diese Aufhellung wird aber nicht unsere frühere Erwägung über die aktuelle Bedeutung der Unendlichkeiten in der Mathematik und besonders des Unendlichkleinen etwa entbehrlich gemacht. Die Möglichkeit des Übergangs von x zu dx und umgekehrt beruht genau darauf, daß kraft der qualitativen Allheit Unendlichkeiten, nämlich unendliche Wertbereiche, Wertinbegriffe, Zahlstrecken mit punktuellen Werten, Wertgrenzen in einen Gesetzeszusammenhang kommen. Die Strecke enthält unendliche Punkte; und indem solche Unendlichkeiten und nicht mehr bloß endliche Wertbeziehungen der Herrschaft des mathematischen Begriffs unterworfen werden, wird es möglich, von der Strecke auf den Punkt, vom Punkt auf die Strecke, und so im ganzen Gebiet der Größen von jedem gegebenen Bereich zum logisch angrenzenden in voller begrifflicher Strenge überzugehen. Ein Letztes, Absolutes wird dabei nicht erreicht; denn dieser qualitative Übergang setzt sich selbst wieder ins Unendliche fort, wie die unendlichen Ordnungen des Unendlichen und Unendlichkleinen klar zeigen. Aber eben damit ist ausgesprochen, daß fortan keine Begriffsgrenze irgendwelcher Art absolut unüberschreitbar bleibt. Allein das Verfahren dieser berechtigten Grenzüberschreitung selbst könnte „absolut" heißen in dem Sinne, daß es jeder Schranke gewachsen ist, die etwa der Souveränität des Denkens sich entgegenstellen möchte.

§ 11. (*Das Infinitesimale und die Realität.*) Auf Grund des Gesagten dürfte man ganz den freilich hyperbolisch lautenden Satz Cohens[1]) unterschreiben: daß mit dem Infinite-

1) Logik [*26*], S. 32.