Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften

Natorp, Paul

Leipzig [u.a.], 1910

§ 11. Das Infinitesimale und die Realität.

urn:nbn:de:hbz:466:1-35817

Durchgang durchs Unendliche zu dem methodischen Mittel einer berechtigten μετάβασις εἰς ἄλλο γένος, der Herstellung einer Kontinuität des Denkens, in welcher die vorher wie *A* und *non-A* geschiedenen Fälle sich unter höherer Betrachtung wieder vereinigen.

Durch diese Aufhellung wird aber nicht unsere frühere Erwägung über die aktuelle Bedeutung der Unendlichkeiten in der Mathematik und besonders des Unendlichkleinen etwa entbehrlich gemacht. Die Möglichkeit des Übergangs von x zu dx und umgekehrt beruht genau darauf, daß kraft der qualitativen Allheit Unendlichkeiten, nämlich unendliche Wertbereiche, Wertinbegriffe, Zahlstrecken mit punktuellen Werten, Wertgrenzen in einen Gesetzeszusammenhang kommen. Die Strecke enthält unendliche Punkte; und indem solche Unendlichkeiten und nicht mehr bloß endliche Wertbeziehungen der Herrschaft des mathematischen Begriffs unterworfen werden, wird es möglich, von der Strecke auf den Punkt, vom Punkt auf die Strecke, und so im ganzen Gebiet der Größen von jedem gegebenen Bereich zum logisch angrenzenden in voller begrifflicher Strenge überzugehen. Ein Letztes, Absolutes wird dabei nicht erreicht; denn dieser qualitative Übergang setzt sich selbst wieder ins Unendliche fort, wie die unendlichen Ordnungen des Unendlichen und Unendlichkleinen klar zeigen. Aber eben damit ist ausgesprochen, daß fortan keine Begriffsgrenze irgendwelcher Art absolut unüberschreitbar bleibt. Allein das Verfahren dieser berechtigten Grenzüberschreitung selbst könnte „absolut" heißen in dem Sinne, daß es jeder Schranke gewachsen ist, die etwa der Souveränität des Denkens sich entgegenstellen möchte.

§ 11. (*Das Infinitesimale und die Realität.*) Auf Grund des Gesagten dürfte man ganz den freilich hyperbolisch lautenden Satz Cohens[1]) unterschreiben: daß mit dem Infinite-

1) Logik [*26*], S. 32.

simalverfahren (oder allgemeiner mit dem Verfahren des Unendlichen) die „präzise Frage“ und die „erlösende Antwort“ formuliert sei für die Bedeutung des Denkens als Erzeugung des Seins. Schwierig zwar bleibt es, wenn Cohen das Infinitesimale selbst als Absolutes — immerhin mit bezeichnender Einschränkung als „gleichsam“ Absolutes — bezeichnet[1]), da doch die Infinitesimalmethode gerade die Bedeutung hat, die Einheit und damit die Zahl überhaupt zu relativieren. Nicht das Infinitesimale ist absolut; aber das Verfahren mit dem Infinitesimalen drückt prägnant die souveräne Macht des Denkens über das Sein aus, der keine absolute Schranke sich entgegenstellen kann. Schwierig ist es auch, wenn Cohen das dx selbst als die wahre „Einheit“ bezeichnet. Doch wird auch das in bestimmtem Sinne verständlich. Die Einheit überhaupt wird durch die Infinitesimalmethode, wie gesagt, relativiert, indem jede Maßeinheit einer bestimmten Wertordnung in einer anderen unendlichklein, jedes für eine Ordnung Unendlichkleine in einer anderen Ordnung endliche Maßeinheit sein kann, also jedes x wieder als dx, jedes dx als x fungieren kann. Am Ende hat Cohen eben dies sagen wollen, obwohl die Ausdrucksweise gegen Mißverstand nicht genügend geschützt ist. Es kann leicht die verkehrte Meinung entstehen, als ob das Endliche durch das Unendlichkleine gemessen werden sollte, während gerade das Hinausgehen über die Forderung der Meßbarkeit es ist, was durch das Infinitesimalverfahren ermöglicht wird. Die Vervielfachung müßte unendlich sein; aber ein unendlich Vielfaches ist im eigentlichen Sinne kein Vielfaches mehr; sondern es ist nur ein versinnlichender Ausdruck des qualitativen Überganges in eine andere Wertordnung, wie vom Punkt zur Strecke; so wie umgekehrt das dx nicht durch unendliche Teilung (die ebenso nicht mehr Teilung im eigentlichen Sinne wäre) aus dem Endlichen

1) S. 109, 116, 123 u. oft.

entsteht. Also ist dx gegenüber x nicht, was man sonst unter Einheit versteht: eine zu vervielfältigende Einheit, Einheit zu einer Mehrheit; dx dürfte, in Vergleichung mit x, genau genommen überhaupt nicht im Plural gesetzt werden (wie wenn Cohen[1]) von einem Zusammenhang „der" dx, der infinitesimalen Elemente spricht), sondern als Allgemeinausdruck nur im Singular. Cohen selbst stellt das Differential treffend zusammen mit dem allgemeinen Glied der Reihe, welches doch als allgemeines nicht mehr ein Glied, sondern das Glied ist, das die Reihe aufbaut. Die größte Schwierigkeit aber macht in Cohens Behandlung des Problems die scheinbar schroffe Ablehnung des Grenzverfahrens als Grundes der Infinitesimalmethode, während doch anders als durch den Grenzwert — richtiger freilich: die innere Wertbestimmtheit — unendlicher Reihen, die aus endlichen Größen sich aufbauen, zu keinem Differential (wie auch nicht zum Irrationalen) zu gelangen ist, ja im Grenzübergang die schöpferische Macht des Infinitesimalverfahrens wesentlich liegt. Der Punkt, heißt es bei Cohen, müsse nicht als Grenze, als Anfang, sondern als Ursprung der Extension gedacht werden. Aber nicht der Punkt, der als solcher in der Tat nur den Nullwert der Ausdehnung bedeuten würde, ist der Ursprung, sondern der Ursprung ist das Gesetz, das man sich (wie gesagt) intensiv im Punkte konzentriert oder extensiv auf die Strecke erstreckt denken mag, das aber an sich so wenig am Punkte wie an der Strecke haftet, sondern gleichermaßen beide bestimmt, insofern über beiden steht und eben damit den Übergang vom einen zum andern möglich macht. Das Richtige, das zugrunde liegt, ist: daß eben hiermit der Begriff des Punktes (aber nicht minder der der Strecke) eine Wandlung erfährt, indem fortan der Punkt nicht bloß als Nullwert der Ausdehnung (wie die Strecke nicht bloß als endlicher Wertbe-

---

1) S. 115.

trag), sondern als Träger des Gesetzes angesehen wird, aus dem die extensionale Größenbestimmtheit durch Integration, wie umgekehrt aus ihr die punktuelle Bestimmung durch Differentiation hervorgehe. Aber nur wenn man sich die Strecke vom Punkte an entstehend denkt, erscheint der auf den Punkt bezogene Ausdruck des Gesetzes ursprünglicher; und auch so nur ursprünglicher; über diesen Komparativ hinauszugehen wäre bedenklich, weil der punktuelle Ausdruck so wenig wie der extensionale eine absolute Geltung beanspruchen kann; weil in nochmals vertiefter Betrachtung der Punkt wieder Segment werden, also einen neuen, vergleichungsweise punktuellen Ausdruck des Gesetzes (eine neue Differentiation) erfordern kann. Gerade Cohen hat mit Recht betont, daß nicht notwendig die Integration als Umkehrung der Differentiation, sondern ebensogut diese als Umkehrung jener zu betrachten ist. Die Strecke, einmal als Integral begriffen, hat also nicht durchaus als das Abgeleitete zu gelten, so wenig wie der Punkt als Differential absoluter Ursprung ist. Dann schiene in ihm der Ursprung sich zu erschöpfen, während es doch der ganze logische Sinn des Ursprungs ist, unerschöpfbar zu sein, wie es in der unendlichen Wiederholbarkeit des Differentiationsverfahrens auch zum genauen Ausdruck kommt. Vielmehr in beiden, im Differential wie im Integral, drückt sich gleich sehr und in genauer Korresponsion das Unendliche als Ursprung und rechtfertigender Grund des Endlichen, und damit das Denken als Ursprung und rechtfertigender Grund des Seins aus. In dieser logischen Grundauffassung bleiben wir einig, und sie festgestellt zu haben bleibt das unschätzbare Verdienst der Cohenschen Untersuchungen über die Infinitesimalmethode.[1])

---

1) Die Kritik, welche B. Russell (*154*, ch. 41, §§ 315—324) an Cohens „Prinzip der Infinitesimalmethode" übt, setzt durchweg Russells eigene Philosophie der Mathematik voraus (über welche Cassirer [*19*] Bericht gibt). Nicht das ist ihr zum Vorwurf

Das aber bedeutet zuletzt auch die tiefe Kantische Bestimmung der intensiven, d. h. wesentlich: der infinitesimalen Größe als der realisierenden. Durch die bloße extensive Größe setzt man (wie anfangs schon gesagt) eigentlich nichts als die Setzung selbst, die soweit keinen Inhalt hätte, daher leer, nichtig erscheinen müßte in Hinsicht auf den schließlichen Zweck: den Gegenstand zu erkennen. Die hier fehlende Inhaltsbestimmung gibt erst die Größe als intensive, d. h. aus dem Unendlichen des reinen Denkverfahrens, gleichsam von innen her, begründete und von da nach außen, in den „Gegenstand" hinein, erst sich erstreckende (extendierende). Wie sie zum Ausdruck gerade der echtesten Qualität wird, genügt fast das einzige Beispiel der Beschleunigung klar zu machen. Eben dadurch aber wird es nun möglich, zu präzisem Ausdruck zu bringen, was

zu machen; eher, daß auf die bedeutende Weiterentwicklung, welche die Mathematik des Unendlichen seit Cantor (durch Veronese) erfahren hat, keine Rücksicht genommen wird. Doch, von allem Prinzipiellen abgesehen, beruht diese Kritik fast durchweg auf Mißverständnissen, welche durch die schwierige Darstellung Cohens doch nur zum Teil erklärlich sind. (Z. B. wenn Cohen *22*, § 2, sagt, durch das Grenzverfahren werde der elementare Begriff der Gleichheit ergänzt und korrigiert, so will er auf die einfache Tatsache hinweisen, daß auf Grund des Grenzverfahrens ein Wert nicht bloß, wie in der Elementarmathematik, durch eine Gleichung, sondern durch ein System von Ungleichungen bestimmt wird.) Durchweg liegt bei Russell die irrige Vorstellung zugrunde, als solle das Infinitesimale, das als inextensiv von Cohen fort und fort bezeichnet wird, gleichwohl eine extensive Quantität, eine „Distanz", die nicht Null und doch auch nicht endlich sei, bedeuten, was die Meinung Cohens jedenfalls nicht ist. Zu bedauern ist auch, daß Russell sich ausschließlich an die Schrift d. J. 1883 gehalten hat; aus Cohens „Logik" (1902) würde er ersehen haben, daß der in der älteren Schrift noch nicht völlig aufgegebene Kantische Dualismus von reiner Anschauung und reinem Denken von keinem gründlicher als eben von Cohen überwunden ist. — Ein anderer Angriff auf Cohens Auffassung des Infinitesimalen ist von Cassirer (Philos. Arbeiten I, S. 31 ff.) gebührend zurückgewiesen worden (vgl. auch *20*, S. 462).

jetzt und hier, im gegebenen Punkt der Zeit und des Raumes, „Reales“ vorhanden sei. Es werden eben jetzt nicht mehr lauter Nichtse gezählt, noch bleibt zwischen den gezählten Punkten ein Leeres, im schlechten Sinne eines Nichts, das dennoch dawäre, nur nicht mitzählte. Mag unsere Zählung von Punkt zu Punkt springen, der wirkliche Vorgang kann, eben als Gang, nur kontinuierlich gedacht werden. Wie aber denkt man ihn kontinuierlich? Indem der Gedanke das Gesetz, in welchem das Reale des Vorgangs qualitativ bestimmt wird, stetig festhält, auch wenn er zählend von Punkt zu Punkt, von Halt zu Halt zu springen scheint, um festzustellen, welches jetzt und jetzt und wieder jetzt das Ergebnis der kontinuierlichen Änderung ist. So wird die Reihe sukzessiver Wertbestimmungen der Veränderlichen zum Ausdruck der sukzessiven Veränderungsstufen eines nunmehr definierten „Etwas“, d. h. zum Ausdruck des Realen.

Also ist die entscheidende Erkenntnisleistung des Infinitesimalen zutreffend durch Kants Bestimmung ausgedrückt, daß es Realität begründe, d. h. ein existenzfähiges Etwas im Unterschied vom Nichts (der leeren Stelle) definierbar mache. Die Methode des Infinitesimalen ist also nicht bloß eine abkürzende Methode des Zählens und Rechnens, die gleichsam zufällig auf anderweitig gegebenes „Reales“ Anwendung litte, sondern es ist die Methode, welche ein Etwas, das gezählt und womit gerechnet wird, überhaupt erst begründet. Die Quantität liefert gleichsam nur das Rohmaterial dazu; durch sie allein wäre allenfalls nur ein System von Stellen gegeben, ohne etwas, das die Stellen besetzt. Erst durch die Qualität, in jener strengen Verknüpfung mit der Quantität und andrerseits mit der Relation, die im Infinitesimalen sich den genauen wissenschaftlichen Ausdruck und die handliche Methode geschaffen hat, werden die Stellen besetzbar, und zwar alle Stellen eines zu beschreibenden Änderungsganges in lückenloser Ausfüllung.

So bleibt nichts „leer“; die Zumutung eines existierenden Nichts kann ferner nicht auftreten.

Hiermit ist nun der Übergang schon in weitem Umfang vorbereitet von der bloßen Mathematik zur mathematischen Naturwissenschaft, zunächst der Mechanik. Mit der Einführung der Stetigkeit in die Zahl ist die trennendste Kluft schon gefallen, welche die Zahl vom Raume schied; mit dem Raume aber und der Zeit, die nicht minder zwingend von hier aus sich der Zahl verbindet, stehen wir schon nicht mehr in der bloßen Mathematik, sondern bereits mitten in der Mechanik. Nur eines fehlt uns noch, um den Übergang zu einem ganz kontinuierlichen zu machen: die Einführung auch der Begriffe Dimension und Richtung in die reine Zahl. Diese soll uns im nächsten Kapitel beschäftigen.