Universitätsbibliothek Paderborn

Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften

Natorp, Paul

Leipzig [u.a.], 1910

§ 1. Die Zahlreihe als gerade Reihe.

urn:nbn:de:hbz:466:1-35817

Visual Library

Fünftes Kapitel.

Richtung und Dimension als Bestimmungen der reinen Zahl.

§ 1. (*Die Zahlreihe als gerade Reihe.*) Die Beziehung der Position oder der Ordnung des Vor und Nach erwies sich als das letzte Gattungsmerkmal der Zahl, welches aller Maßbedeutung derselben logisch vorhergeht. Sein mathematischer Ausdruck ist das Plus und Minus, welches eine immer gleiche Art der Relation von Glied zu Glied unserer Urreihe

. . . | | | | | . . .,

nämlich die Bedeutung jedes Gliedes der Reihe als Gegenglied zu einem Grundglied oder Grundglied zu einem Gegenglied bezeichnet. Dieser Doppelausdruck der Plus-Minus-Beziehung ist darin begründet, daß mit dem Plus das Minus, mit dem Minus das Plus immer zugleich gegeben ist. Man nennt diese beiden „Sinne" der Positionsbeziehung einander entgegengesetzt. Diese Bezeichnung ist aber nur dann zutreffend, wenn man die Entgegensetzung ohne den Nebensinn des Feindlichen oder der Tendenz der Vernichtung, in der schlichten Bedeutung des Gegenüber oder der Gegenseitigkeit versteht. Der „Gegensatz" ist in Wahrheit, nach Kants Ausdruck, „Gegenverhältnis", Reziprozität. Weit entfernt, einander zu vernichten, bedingen und geben sich die beiden Sinne der Positionsbeziehung vielmehr gegenseitig, daher sie richtig so, als die zwar verschiedenen, aber zueinander gehörigen „Sinne“ einer und derselben, dennoch einzigen Grundbeziehungsart oder „Richtung“ bezeichnet werden. Die „Aufhebung“ der mit entgegengesetztem Vorzeichen versehenen Werte gegeneinander ist nicht „Vernichtung“, sondern Rückgang zum jedesmaligen Ausgangswert, der absoluten oder relativen Null, die nicht ein arithmetisches Nichts ist, sondern die sehr reale Bedeutung des letzten Bezugs- oder Vergleichspunktes zu jeder Setzung eines Wertbetrages, oder in anderer Wendung, der unteren Grenze der Wertsetzung hat. Für jetzt aber ist von einer Bestimmtheit des im einen oder anderen Sinne zu setzenden Wertbetrags überhaupt abzusehen, da es gilt, die Positionsbeziehung rein als solche in ihrer eigenen Gesetzlichkeit zu verstehen.

Dieser zufolge stellt nun unsere Urreihe sich dar als streng homogenes Gebilde. Damit soll ausgedrückt sein: daß in strenger Identität stets der Art nach dieselbe, jedoch von Haus aus doppelsinnige Grundbeziehung, eben jene mit Plus und Minus bezeichnete (des Gegenglieds zum Grundglied und des Grundglieds zum Gegenglied) für irgendwelche zwei Glieder der Reihe, welches auch ihr Abstand in der Reihe, gleichsam die Schrittzahl vom einen zum andern (oder von einem willkürlich gewählten Ausgangspunkte Null zum einen und zum andern) sei, geltend bleibt. Dadurch ist nicht bloß ein Zurücklaufen der Reihe in sich selbst, sondern überhaupt irgendeine Mehrheit der Relationsart oder der Art der Nullbeziehung (abgesehen von ihren beiden „Sinnen“) ausgeschlossen.

Die Bedeutung dieser Bestimmung wird sofort klar werden durch eine Vergleichung mit den auf dieselbe Frage bezüglichen Aufstellungen Veroneses. Dieser definiert die Homogeneïtät eines eindimensionalen Systems dadurch: daß es zu einem beliebigen, in einer bestimmten Richtung genommenen Segment des Systems von einem beliebigen Element desselben Systems aus zunächst in derselben Richtung ein ihm identisches, d. h. dem Begriff, und zwar dem ganzen Begriff nach übereinstimmendes Segment gibt. Indem dann diesem „homogenen“ System noch die weitere Eigenschaft beigelegt wird, daß es auch als Ganzes in seinen beiden Richtungen, von irgendeinem Element aus genommen, sich selbst identisch bleibt, nennt Veronese das so charakterisierte System ein „in der Lage seiner Teile identisches“ System. Mit diesen Bedingungen bleibt eine zirkuläre Gestalt des Systems verträglich: das so definierte System kann offen oder geschlossen sein (§§ 70, 71). In der Tat treffen die besagten Merkmale auf den Kreis so gut wie auf die gerade Linie zu. Doch beruht dies im Grunde darauf, daß Veronese nicht, wie wir, die Positionsbeziehung rein von der Maßbeziehung ablöst, sondern sie nur zugleich mit dieser ins Auge faßt und zunächst maßgleiche Segmente in Vergleichung zieht. Für solche gilt allerdings im Kreis wie in der Geraden auch Positionsgleichheit; während sie für ungleiche Segmente in der Geraden gilt, im Kreise nicht. Nun kann aber ein Segment gar nicht bestimmt sein, ohne daß voraus die Art der Relation von Glied zu Glied bestimmt ist. Also ist vielmehr diese zunächst rein für sich ins Auge zu fassen, die Identität also auf diese, in voller Unabhängigkeit von irgendwelchen besonderen Bedingungen hinsichtlich des Betrages der verglichenen Segmente, zu beziehen. Dann aber kann die Homogeneïtät des Systems nur so verstanden werden, daß die Identität der Beziehung von Glied zu Glied für irgendwelche, wie auch immer angenommene Glieder der Reihe (nicht Segmente, sondern Elemente) auch in deren stetigem Zusammenhange gilt. Diese Bedingung läßt aber nicht mehr die Wahl frei zwischen dem offenen und dem geschlossenen System, da im geschlossenen System die Positionsbeziehung nicht identisch ist für beliebige Paare von Elementen, sondern genau nur für maßgleiche Segmente. Schon ein Segment AB ist einem Segment $AC = AB + BC$ im zirkulären System nicht „in

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

der Lage seiner Teile identisch", während im geraden System und nur in ihm diese Identität, überhaupt unabhängig vom Punktabstand, erfüllt ist.

Das durch diese Eigenschaft ausgezeichnete Gebilde ist damit zugleich in seiner Art einzig, nicht auf mehr als eine Art annehmbar. So aber ist es von dem Grundgebilde, auf dem überhaupt die mathematische Bestimmung irgendwelcher Art sich aufbauen soll, auch unbedingt zu fordern. Wie weit man auch die Wahlfreiheit mathematischer Definitionen ausdehnen mag, man gäbe überhaupt jede Möglichkeit einer Einheit des Objekts der mathematischen Wissenschaft, d. h., eine durchgängige Vergleichbarkeit und gesetzmäßige Vereinbarkeit der von ihr aufzustellenden Gebilde preis, wenn man auf jede letzte „notwendige", d. h. nicht so oder anders wählbare Voraussetzung verzichten würde. Diese unerläßliche letzte, für alles Mathematische als solches bedingungslos geltende Voraussetzung aber ist es eigentlich, die unter dem Namen der Zahl gesucht und verstanden wird. Möchte es also in der Geometrie, als einer besonderen mathematischen Wissenschaft, immerhin wahlfrei bleiben, ob man ihr Grundgebilde in unserem oder in Veroneses Sinn homogen annimmt, möchte die letztere Annahme wegen ihrer größeren Weite für die Geometrie sogar einen Vorzug behaupten, so ist dagegen das schlechthin ausgeschlossen, das Grundgebilde, auf dem die Zahl sich aufbauen soll, anders als einzig und darum in unserem prägnanten Sinne homogen vorauszusetzen. „Voraussetzen" bedeutet dann nicht mehr: nach Wahl annehmen, sondern die Voraussetzung hat hier den verschärften Sinn derjenigen Grundlegung, ohne welche der ganze Bau der Mathematik hinfiele, nämlich jede Möglichkeit einer einheitlichen Bestimmung ihrer Objekte aufgehoben wäre.

Freilich, hätte man den Aufschluß über die Eigenschaften der Zahl von gegebenen Dingen zu erwarten, dann müßte man am Ende auch auf solche Überraschungen gefaßt sein,

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

wie daß man, von Eins an weiter und weiter zählend, bei dieser selben Eins, von der man ausgegangen war, endlich wieder anlangen würde. Aber, wenn nirgend sonst, so müßte an diesem Punkte klar werden, daß die letzten Gesetze, die der Erkenntnis gelten sollen, nur sie selbst sich vorschreiben kann, weil sonst aller Sinn des Erkennens, das doch vor allem Verstehen, mit sich selber eins werden bedeutet, aufgehoben würde. Die „Erfahrung", die über die Gesetze der Zahl Aufschluß geben sollte, wäre selbst nicht möglich ohne eben die Gesetze, über die sie angeblich erst entscheiden soll. Und so würde sie selbst sich in jener zirkulären Anordnung der Beweisgründe bewegen, welche die Logik den *circulus vitiosus* nennt. Ein gerader Denkgang wird das Grundgebilde alles reinen Denkens selbst nur als gerades, d. h. in sich der Art nach streng identisch aufstellen können.

Diese Bezeichnung des im erklärten Sinne homogenen Systems als „gerades" bedarf vielleicht noch einer Rechtfertigung. Mag unter Geometern der Begriff des Geraden noch streitig sein, der gemeinhin darunter verstandene Begriff ist zweifellos der jener Eigenschaft eines Systems, wonach dasselbe durch irgendwelche zwei seiner Elemente unterschiedslos eindeutig bestimmt sei. Ob diese Eigenschaft, welche wir als die der absoluten Geradheit bezeichnen wollen, dem Grundgebilde, auf dem die Raumbeziehungen mathematisch aufzubauen sind, unerläßlich beizulegen sei, ist hier noch nicht zu untersuchen; die einfache Zahlreihe aber ist, der oben gestellten Bedingung zufolge, die nichts Willkürliches einschließt, sondern rein auf die Grundrelation, welche die Zahl überhaupt nur möglich macht, sich stützt, notwendig als gerade in diesem absoluten Sinne zu setzen.

Eine andere Frage ist, ob die Forderung der Eindeutigkeit (Einzigkeit) im gleichen absoluten Sinne für die Maßbestimmung gelten müsse. Diese ist ihrem ganzen Begriff

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

nach relativ; es wird daher auch die Forderung der Eindeutigkeit für sie nur den relativen Sinn haben dürfen, daß für eine einzige Zählung auch eine einzige letzte gemeinsame Grundlage der Maßbestimmung, d. h. eine einzige Maßeinheit gelten muß; was zur Folge hat, daß durch irgendwelche zwei Elemente auch stets ein Abstand als einziger bestimmt sein wird. Die Eigenschaft der Geradheit (im erklärten Sinne) ist für die Möglichkeit irgendwelcher Bestimmtheit des Abstandes schon Voraussetzung und als solche in ihr eingeschlossen; an sich aber ist sie die Eigenschaft der Positionsbeziehung, daher von jeder besonderen Annahme hinsichtlich des Abstandes unabhängig, und auch ihrerseits auf diesen ohne Einfluß. Wenn oben das gerade System erklärt wurde als ein solches, das durch irgendwelche zwei seiner Elemente eindeutig bestimmt sei, so kann und will dies nicht besagen, daß durch das Merkmal der Geradheit die Elemente selbst gegeben würden, sondern nur: die Art der Relation von Element zu Element, gleichgültig wie viele deren (nach metrischen Gesetzen) angesetzt werden mögen und wie, sei für das ganze System bestimmt, sobald nur zwei Elemente, und mit diesen deren Relation, gesetzt sind.

Auch das mag zu bemerken nicht überflüssig sein: diese Forderung gilt streng nur für die Reihenordnung nach der Zahl selbst; sie legt dagegen keinerlei Bedingung dem zu Zählenden auf. Das was gezählt wird, etwa Punkte der Zeit oder des Raumes, möchte in seiner Aufeinanderfolge einen Kreislauf beschreiben, die Zählung ginge dabei doch immer gleichförmig weiter. Es möchte das an n^{ter} Stelle Gezählte mit dem an 1^{ter} Stelle Gezählten identisch sein, die Stelle n der Zählung bleibt von der Stelle 1 deshalb nicht weniger verschieden. Schon darum wäre es nicht möglich, diese Eigenschaft der Zahl irgendwie auf Anschauung (Zeit oder Raum), geschweige auf Wahrnehmung an zählbaren Dingen zu gründen. Ihre Begründung kann nur

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

rein logisch sein; ihr letzter logischer Grund aber ist kein anderer, als daß überhaupt irgendeine veränderliche (so oder anders setzbare) Bestimmung zu ihrer eigenen Möglichkeit irgendeine letzte unveränderliche, nicht anders mögliche, d. h. notwendige Voraussetzung fordert. Diese Forderung eines *Principium* der Bestimmung ist unabweisbar; und ihr genügt, für das, was hier zur Frage steht, einzig jene absolute Identität der Relationsart, die wir als Geradheit definierten.

§ 2. (*Das Kontinuum der Richtungen.*) Nachdem die Einzigkeit der Positionsbeziehung für die Grundreihe gesichert ist, fragt es sich weiter, ob und in welcher Art etwa in irgendeiner ferneren Entwicklung der Zahl eine Mannigfaltigkeit von Positionsbeziehungen doch entstehen kann. Für eine solche Weiterentwicklung ist bisher kein anderer Anhalt gegeben als in den beiden Sinnen der dennoch einzigen Grundrichtung unserer Urreihe. Wir nannten sie zueinander reziprok; sie sind es auch in der genauen Bedeutung, daß jeder die Umkehrung des andern, keiner von beiden absolut der erste ist. Zwar geht die Zählung von der Null „vorwärts", und dies Vorwärts ergibt den Plussinn; so erscheint dieser als der erste. Aber die Plusbeziehung existiert überhaupt nicht ohne die Minusbeziehung; mehr: schon in der Erklärung der Subtraktion erwies sich das Minus sogar ursprünglicher als das Plus. Durch es ist die Beziehung des Nachfolgenden zum Voraufgehenden ebensowohl ausdrückbar wie die des Voraufgehenden zum Nachfolgenden. $1 - 0$ (Stellung von Eins gegen Null) ist ein so korrekter Ausdruck für die Plusbeziehung wie $0 - 1$ (Stellung von Null gegen Eins) für die Minusbeziehung. Natürlich ist die Deutung des Zeichens an sich willkürlich; aber es besteht für sie der sachliche Grund, daß es eines Ausdrucks bedarf für die Positionsbeziehung überhaupt, der also beide Sinne zugleich umfassen muß; zu diesem Ausdruck eignet sich

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN