



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Universitätsbibliothek Paderborn**

### **Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften**

**Natorp, Paul**

**Leipzig [u.a.], 1910**

§ 2. Das Kontinuum der Richtungen.

**urn:nbn:de:hbz:466:1-35817**

rein logisch sein; ihr letzter logischer Grund aber ist kein anderer, als daß überhaupt irgendeine veränderliche (so oder anders setzbare) Bestimmung zu ihrer eigenen Möglichkeit irgendeine letzte unveränderliche, nicht anders mögliche, d. h. notwendige Voraussetzung fordert. Diese Forderung eines *Principium* der Bestimmung ist unabweisbar; und ihr genügt, für das, was hier zur Frage steht, einzig jene absolute Identität der Relationsart, die wir als Geradheit definierten.

§ 2. (*Das Kontinuum der Richtungen.*) Nachdem die Einzigkeit der Positionsbeziehung für die Grundreihe gesichert ist, fragt es sich weiter, ob und in welcher Art etwa in irgendeiner ferneren Entwicklung der Zahl eine Mannigfaltigkeit von Positionsbeziehungen doch entstehen kann. Für eine solche Weiterentwicklung ist bisher kein anderer Anhalt gegeben als in den beiden Sinnen der dennoch einzigen Grundrichtung unserer Urreihe. Wir nannten sie zueinander reziprok; sie sind es auch in der genauen Bedeutung, daß jeder die Umkehrung des andern, keiner von beiden absolut der erste ist. Zwar geht die Zählung von der Null „vorwärts“, und dies Vorwärts ergibt den Plussinn; so erscheint dieser als der erste. Aber die Plusbeziehung existiert überhaupt nicht ohne die Minusbeziehung; mehr: schon in der Erklärung der Subtraktion erwies sich das Minus sogar ursprünglicher als das Plus. Durch es ist die Beziehung des Nachfolgenden zum Voraufgehenden ebensowohl ausdrückbar wie die des Voraufgehenden zum Nachfolgenden.  $1 - 0$  (Stellung von Eins gegen Null) ist ein so korrekter Ausdruck für die Plusbeziehung wie  $0 - 1$  (Stellung von Null gegen Eins) für die Minusbeziehung. Natürlich ist die Deutung des Zeichens an sich willkürlich; aber es besteht für sie der sachliche Grund, daß es eines Ausdrucks bedarf für die Positionsbeziehung überhaupt, der also beide Sinne zugleich umfassen muß; zu diesem Ausdruck eignet sich

nach dem geltenden Zeichengebrauch das Minuszeichen, nicht das Pluszeichen, weil das erstere, als Zeichen der Subtraktion, unabhängig davon, ob der Subtrahend oder der Minuend die größere Zahl ist, eben die Stellbeziehung als solche gleichermaßen nach ihren beiden Sinnen ausdrückt. Entscheidend ist namentlich, daß man in der Arithmetik tatsächlich die Plusbeziehung aus der Minusbeziehung hervorgehen läßt, da man sagt, daß Minus mal Minus Plus ergibt; während aus der Plusbeziehung die Minusbeziehung nur durch die Minusbeziehung selbst hervorgehen kann. Der doppelten Forderung, daß 1. die Positionsbeziehung überhaupt einen Ausdruck finde, 2. nicht nur ein zweifacher Sinn dieser Beziehung, sondern zugleich die Reziprozität beider Beziehungssinne, nach welcher sie sich gegenseitig bedingen und geben, also das Hervorgehen des einen aus dem andern und zwar gleichviel, von welchem ausgegangen wird, zum Ausdruck komme, wird durch die geltende Bezeichnung entsprochen, indem erstens das nackte Minuszeichen sich zwanglos als Ausdruck der Positionsbeziehung überhaupt deuten läßt, sodann durch  $-^0$  der Ausgangssinn, in der Folge der Potenzen des Minus aber ( $-^0, -^1, -^2$  usf.) durch Vermehrung des Exponenten um 1 das Hervorgehen allemal des (relativen) Gegensinns aus dem vorigen als (relativem) Grundsinn bezeichnet, endlich die geraden Potenzen des Minus gleich Plus, die ungeraden gleich Minus (im absoluten Sinne) gesetzt werden. Diese Beziehungen unter den Vorzeichen gelten zugleich, so wie es gefordert ist, unabhängig von jeder Rücksicht auf die mit Vorzeichen zu versehenen Wertbeträge in allen metrischen und Stellbeziehungen; der Betrag des Produkts ergibt sich aus den Beträgen der Faktoren ohne Unterschied des Vorzeichens:  $+2 \cdot +3, +2 \cdot -3, -2 \cdot +3, -2 \cdot -3$  geben dem Betrage nach unterschiedslos dasselbe, nämlich  $2 \cdot 3 = 6$ ; das Vorzeichen des Produkts richtet sich allein nach den Vorzeichen der Faktoren, und zwar den obigen

Aufstellungen entsprechend so, daß, jedes Plus für zweimaliges Minus gerechnet, das Produkt positives oder negatives Vorzeichen erhält, je nachdem die Gesamtzahl der Minus in den Faktoren gerade oder ungerade ist.

Noch scheint der Ausdruck der Änderung des Beziehungssinnes durch das Produkt und daher, da die Änderung immer die gleiche ist, durch die Potenz einer Begründung bedürftig. Sie liegt darin, daß die Bedeutung der Produktbildung an sich eine allgemeinere sein muß als die der Vervielfältigung eines Wertbetrages, da man eben nicht bloß numerische Werte, sondern relative (mit Vorzeichen versehene) Zahlen multipliziert. Diese allgemeinere Bedeutung ist die: daß eine bestimmte Änderung selbst wieder einer ihr gleichsinnigen Änderung unterworfen wird. Das gewöhnliche Produkt fällt unter diesen Begriff als wiederholte Setzung wiederholter Setzungen, Zählung von Zählungen, Betrag von Beträgen. So ist, der einfachen Minussetzung gegenüber, als „Minus mal Minus“ auszudrücken die Minussetzung einer Minussetzung; die zweimalige Minussetzung nicht im Sinne des „Minus plus Minus“; das wäre eine Veränderung und noch eine ihr gleiche; sondern in der Bedeutung, daß der Minus- d. h. Gegensinn selbst wieder im Minus- oder Gegensinn genommen wird, also, da einmalige Minussetzung Umkehrung des gegebenen Beziehungssinnes bedeutet, diese Umkehrung sich wiederum umkehrt, was gleichbedeutend ist mit der Rückkehr zum Grundsinn.<sup>1)</sup>

1) Auf diesen allgemeinen Sinn der Produktbildung stützt sich z. B. H. Graßmann, indem er ihm auf die Multiplikation gerichteter Strecken Anwendung gibt (WW. I<sup>2</sup> 507; vgl. [128] S. 198). Er definiert im Anschluß an eine Aufstellung des älteren (J. G.) Graßmann als Produkt in allgemeiner Bedeutung „das Ergebnis einer Konstruktion, welche aus einem schon Erzeugten (Konstruierten) auf gleiche Weise hervorgeht, wie dieses Erzeugte aus dem ursprünglich Erzeugenden“, oder klarer noch als „das Ergebnis einer Synthesis, bei welcher das durch eine frühere Synthesis Erzeugte an die Stelle des ursprünglichen Elementes gesetzt und wie dieses behandelt

Auf die angegebene Weise entsteht nun schon eine erste Mannigfaltigkeit von Beziehungsarten und eine Rechnung mit solchen, vorerst beschränkt auf die reine Umkehrung des jedesmaligen Beziehungssinnes. Diese führt zwar, so oft sie auch wiederholt werden mag, zu nichts Neuem, da eben alle geradzahligen Potenzen unterschiedslos den Plussinn, alle ungeraden den Minussinn zurückführen. So dürftig aber diese neue Rechnungsart an Ergebnissen zu sein scheint, prinzipiell ist sie darum nicht von geringerer Tragweite. Diese liegt darin, daß mit den beiden Grundarten der Positionsbeziehung (Null gegen Eins und Eins gegen Null, oder Minus und Plus) zugleich die Relation dieser Relationsarten (Plus zu Minus und Minus zu Plus) gegeben ist. Diese kann, indem sie von der einen Art der Relation zur andern hinüberführt, ohne weiteres auch als Änderung der Relation verstanden werden, im gleichen Sinne, wie die Folge der Werte 0, 1, 2 . . . zugleich die Möglichkeit eines Überganges von Wert zu Wert oder einer Abwandlung durch die Folge dieser Werte ausdrückt. Damit aber sind wir unversehens auf das gestoßen, was wir vorher zurückgewiesen hatten, auf dem damaligen Punkte der Erwägung auch zurückweisen mußten, nämlich die zirkuläre Änderung. Es war also eine ganz richtige Tendenz, welche die Mathematiker leitete, wenn sie annahmen, daß die zirkuläre Änderung an sich nicht minder ursprünglich sei als die lineare und darum schon bei der ersten Aufstellung der Zahlreihe Berücksichtigung fordere. Man erkannte nur nicht zugleich: 1. daß die lineare Änderung schlechthin zugrunde liegt und nicht anders als im

wird“. In der Multiplikation der gerichteten Strecken nun kommt zur Multiplikation der Beträge (Längen), die den gewöhnlichen Gesetzen folgt, eine Multiplikation der Positionsbeziehungen (Richtungen in der Ebene), und das erklärt in einfachster Weise (vgl. die oben zitierte Abhandlung 128) den nichtkommutativen Charakter dieser Art der Multiplikation.

Rückblick auf sie eine zirkuläre Änderung überhaupt zu sicherem Begriff gebracht werden könnte; 2. daß die zirkuläre Änderung, als Änderung der Position, eben auch rein aus den selbständig für sich zu betrachtenden Beziehungen der Position zu begründen ist. In diesen aber hat sie in der Tat ihren schlechthin ursprünglichen Grund, nämlich in der Reziprozität der beiden Beziehungssinne, die mit diesen selbst ursprünglich und unauflösblich gesetzt ist; d. h. jenem Umstand, daß zugleich mit der Beziehung des Folgenden zum Voraufgehenden nicht bloß die des Voraufgehenden zum Folgenden, sondern auch die Beziehung dieser beiden Beziehungen existiert, welche als die Beziehung der Reziprozität oder des wechselseitigen Hervorgehens der einen aus der anderen, oder deren Umkehrbarkeit, unmittelbar die zirkuläre Änderung bedeutet.

Dann aber muß es sofort auch als logisch unbefriedigend empfunden werden, daß diese neue Art der Änderung durchaus nur unstetig, sprunghaft sollte geschehen können. So aber stellte sie bis dahin sich dar; denn von der Grundreihe in die Gegenreihe und umgekehrt würde, wenn die bisherige Betrachtung der Positionsbeziehungen erschöpfend wäre, kein stetiger Übergang stattfinden. Es ist nämlich ein bloßer Schein, daß man vom Plus zum Minus durch die Null in der stetigen Zahlreihe kontinuierlich überginge. Eine Kontinuität liegt zwar vor, aber sie betrifft einzig die Werte. Diese ändern sich stetig von irgendeinem Punkte der Reihe zu irgendeinem andern, und diese Kontinuität wird durch die Null nicht unterbrochen, sondern für die Reihe der Plus- und Minuswerte als Ganzes gerade hergestellt. Die Plusbeziehung dagegen bleibt für alle Werte  $> 0$ , die Minusbeziehung für alle Werte  $< 0$  in sich ungeändert; in der Null selbst findet keine von beiden Beziehungen statt; „Null gegen Null“ kann nicht etwa ebenso wohl als Plus- wie Minusbeziehung aufgefaßt werden, sondern in Wahrheit besteht kein Grund, eine von beiden Be-

ziehungen hier anzusetzen. Die Schreibung  $\pm 0$  hat nur den verständlichen Sinn, daß die Null zugleich die untere Grenze der Plus- und die obere der Minuswerte darstellt, nicht aber, daß in diesem Grenzpunkt die Gegensätze, als deren Begriff man sonst angab, daß sie in der Vereinigung einander vernichten, friedlich zusammenbeständen. Zwar haben wir diesen Sinn des Gegensatzes des Plus und Minus überhaupt verworfen und betont, daß beide Beziehungssinne vielmehr stets zusammengehen; aber dadurch ist es nicht weniger ausgeschlossen, daß sie jemals begrifflich koinzidieren sollten. Daraus, daß es kein Rechts gibt ohne ein Links und kein Links ohne ein Rechts, folgt nicht, daß je ein Rechts sein eigenes Links, ein Links sein eigenes Rechts sein könnte. Also wird durch die Null nicht eine Kontinuität der Plus- und Minusbeziehung hergestellt, sondern gerade die Diskontinuität des Überganges vom einen zum andern Beziehungssinne kommt darin zum scharfen Ausdruck, daß der Null als solcher in der relativen Zahlreihe mit logischem Recht weder die Plusbeziehung noch die Minusbeziehung zugeschrieben werden kann, aus dem einfachen Grunde, weil sie selbst das Fundament dieser doppel-sinnigen Beziehung, das worauf zu beziehen, und nicht ein Bezogenes bedeutet.

Ist demnach in der stetigen Reihe der relativen Zahlen der Übergang von der Plusbeziehung zur Minusbeziehung selbst und umgekehrt nur durch einen Sprung möglich, so weist eben diese Unstetigkeit, je unwidersprechlicher sie vorliegt, um so zwingender auf die Notwendigkeit hin, die hier fehlende Kontinuität durch eine neue Schöpfung des Denkens herzustellen. Der Gedanke selbst vollzieht doch den Übergang stetig. Er wendet den Grundsinn in den Gegensinn und umgekehrt und beschreibt diese Wendung kontinuierlich, gleichsam als Drehung, die sich ohne weiteres auch als kontinuierliche Winkeländerung verstehen läßt. In der Tat ist mit der Relation der Rela-

tionen Plus und Minus der Begriff des Winkels schon verhüllt eingeführt: ein neuer Abstand, eine Größe der Verschiedenheit der Beziehungsart ist damit gesetzt; ein Abstand, der bisher zwar nur 1 oder 0 sein, aber doch aus 0 1, aus 1 0 soll werden können. In diesem „Werden“ liegt aber schon unabweisbar die Notwendigkeit, auch die Zwischenwerte zwischen den Werten 0 und 1 des Beziehungsunterschieds in Gedanken zu setzen. Kontinuität ist ein so ursprüngliches, unverbrüchliches Gesetz des Denkens, daß überhaupt irgendwelche Diskretion sich nur als Diskretion eines Kontinuums will denken lassen. Also gibt es für das reine Denken das Kontinuum der Beziehungsinne oder Richtungen ebenso wie das Kontinuum der Werte. Und da die Zahl ursprünglich Richtung hat, so fordert auch an ihr diese neue Kontinuität ihren gesetzmäßigen Ausdruck. Dieser Ausdruck ist in der Arithmetik wohlbekannt; es ist die komplexe Zahl.

§ 3. (*Aus der Geschichte der komplexen Zahl.*) Es ist nach dem Gesagten nicht ein bloßes, zufällig sich einstellendes Bedürfnis der Rechnung, welches eine Mehrheit von Zählrichtungen, d. h., in unserer Zeichensprache ausgedrückt, andere als ganzzahlige Potenzen des Minus fordert. Sondern das Auftreten dieses Bedürfnisses in der folgerichtigen Entwicklung der Rechnung ist selbst das sichere Symptom einer insgeheim wirkenden Gesetzlichkeit des reinen Denkens, die über die ursprünglich einzig gerichtete Zahlreihe hinausdrängt. Es ist aber bekannt, wie hartnäckig die Mathematik sich wohl zwei Jahrhunderte hindurch gesträubt hat, diesem tiefen Zuge des Denkens bis zu vorbehaltloser Anerkennung nicht sowohl seiner wissenschaftlichen als seiner logischen Berechtigung nachzugeben. Die Geschichte des Imaginären <sup>1)</sup> ist eines der denkwürdigsten Zeugnisse für

1) S. z. B. Durège [42], Einleitung. Gauß, WW. II, 109, 171 ff.