Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften

Natorp, Paul

Leipzig [u.a.], 1910

§ 3. Aus der Geschichte der komplexen Zahl.

urn:nbn:de:hbz:466:1-35817

tionen Plus und Minus der Begriff des Winkels schon verhüllt eingeführt: ein neuer Abstand, eine Größe der Verschiedenheit der Beziehungsart ist damit gesetzt; ein Abstand, der bisher zwar nur 1 oder 0 sein, aber doch aus 0 1, aus 1 0 soll werden können. In diesem „Werden" liegt aber schon unabweisbar die Notwendigkeit, auch die Zwischenwerte zwischen den Werten 0 und 1 des Beziehungsunterschieds in Gedanken zu setzen. Kontinuität ist ein so ursprüngliches, unverbrüchliches Gesetz des Denkens, daß überhaupt irgendwelche Diskretion sich nur als Diskretion eines Kontinuums will denken lassen. Also gibt es für das reine Denken das Kontinuum der Beziehungssinne oder Richtungen ebenso wie das Kontinuum der Werte. Und da die Zahl ursprünglich Richtung hat, so fordert auch an ihr diese neue Kontinuität ihren gesetzmäßigen Ausdruck. Dieser Ausdruck ist in der Arithmetik wohlbekannt; es ist: die komplexe Zahl.

§ 3. (*Aus der Geschichte der komplexen Zahl.*) Es ist nach dem Gesagten nicht ein bloßes, zufällig sich einstellendes Bedürfnis der Rechnung, welches eine Mehrheit von Zählrichtungen, d. h., in unserer Zeichensprache ausgedrückt, andere als ganzzahlige Potenzen des Minus fordert. Sondern das Auftreten dieses Bedürfnisses in der folgerichtigen Entwicklung der Rechnung ist selbst das sichere Symptom einer insgeheim wirkenden Gesetzlichkeit des reinen Denkens, die über die ursprünglich einzig gerichtete Zahlreihe hinausdrängt. Es ist aber bekannt, wie hartnäckig die Mathematik sich wohl zwei Jahrhunderte hindurch gesträubt hat, diesem tiefen Zuge des Denkens bis zu vorbehaltloser Anerkennung nicht sowohl seiner wissenschaftlichen als seiner logischen Berechtigung nachzugeben. Die Geschichte des Imaginären [1]) ist eines der denkwürdigsten Zeugnisse für

1) S. z. B. Durège [*42*], Einleitung. Gauß, WW. II, 109, 171 ff.

die siegende Kraft des Logischen in der Mathematik, zugleich aber für die oft zu einem harten Rigorismus sich steigernde formal-logische Gewissenhaftigkeit derselben, die selbst einer so ursprünglich notwendigen, darum auch wie mit Naturgewalt sich Bahn brechenden Neuschöpfung wie der der komplexen Zahl das Heimatrecht im Reiche der mathematischen Begriffe so lange bestritt, als eben ihre logische Zulänglichkeit nicht überzeugend dargetan werden konnte. Die Rechnung mit dem Imaginären entstand schon im Laufe des 17. Jahrhunderts, aber sie galt langehin als eine Rechnung mit dem Unmöglichen; blieb das Imaginäre im Ergebnis stehen, so bedeutete das die Unlösbarkeit der Aufgabe, die Absurdität des Geforderten (so z. B. Montucla). Aber so hartnäckig, wie man ihm das Existenzrecht absprach, behauptete es sich in dieser so bestrittenen Existenz selbst. Nur zögernd verstand man sich dazu, einzugestehen, daß in ihm doch wohl noch eine andere Bedeutung schlummern müsse als die einer zur Vereinfachung gewisser Rechnungen zwar nützlichen, in sich aber sinnlosen Fiktion. Auch die schon früh (zuerst 1693 durch Wallis) gemachte Beobachtung, daß durch die komplexe Zahl die Punkte der Ebene eine ebenso streng gesetzmäßige Darstellung finden wie durch die reelle die Punkte der Geraden, brachte das Bedenken gegen ihre logische Zulässigkeit nicht zum Schweigen. Entscheidender wirkte die Erkenntnis, daß allgemein eine Rechnung mit verschiedenen Einheiten (komplexen Zahlen im weiten Sinne) möglich ist und sinnvoll sein kann. Diesem allgemeineren Begriffe ließ sich nunmehr die Rechnung mit dem Imaginären, nämlich der imaginären in Verbindung mit der reellen Einheit, einfach unterordnen. Freilich die Gleichsetzung des Quadrates der imaginären Einheit mit dem negativen Wert der reellen erschien gerade nun als gewissermaßen zufällig, als nur eine von unendlichen, willkürlich wählbaren Annahmen, die vor anderen keinen weiteren Vorzug habe als jene erstaunliche

Fruchtbarkeit an weittragenden Ergebnissen, für die es bis dahin keine rechte Erklärung gab. Aber wenigstens das Bürgerrecht im Reiche der mathematischen Begriffe konnte dem Imaginären nicht länger vorenthalten bleiben. Schon erklärt Durège die Existenz des Imaginären für hinreichend gesichert durch ihre widerspruchslose Definition; nach den Anwendungen, so wichtig sie sein möchten, habe die reine Mathematik als solche nicht zu fragen; denn ihre durch eindeutige und widerspruchsfreie Definition eingeführten Begriffe begründen in ihrer Definition selbst ihre Existenz; ihre Sätze sind wahr, gleichviel ob sich von ihnen eine Anwendung machen läßt oder nicht. Das ist nun merkwürdig: vordem blieb dem Imaginären die Anerkennung einzig deshalb versagt, weil es in seinem Begriff einen offenen Widerspruch einschließe. Eine Zahl, die mit sich selbst multipliziert eine negative Zahl ergäbe, existiere eben nicht; denn es gebe der Position nach nur positive und negative Zahlen, welche beide, in gerade Potenz erhoben, positive, nie negative Zahlen ergeben. Einzig um der Fruchtbarkeit der Anwendungen willen hatte man die Rechnung mit dem Imaginären dennoch zugelassen, aber stets mit dem ausdrücklichen oder stillschweigenden Vorbehalt, daß man es nur ja nicht für eine rechtschaffene Zahl ansehen dürfe statt für ein Symbol unbekannten Sinnes, mit dem nur merkwürdigerweise sich rechnen und richtige und bedeutsame Resultate herausbringen ließen.

Vielleicht ist es nicht zum wenigsten gerade dieser merkwürdige Erfolg einer Rechnung mit einem bisher unbegriffenen, ja für absurd geltenden Symbol gewesen, der so viele Mathematiker noch bis in die jüngste Zeit verführt hat, zu glauben, daß man am Ende besser tue, auf einen angebbaren logischen Sinn der ersten Voraussetzungen, mit denen die Mathematik arbeitet, zu verzichten und sich mit der Widerspruchslosigkeit der Ableitungen zufrieden zu geben; Zahl einfach zu nennen, womit sich rechnen und Resultate gewinnen lassen, auch wenn für das so Benannte selbst eine sichere Bedeutung nicht angebbar ist. Diesen schroffen Formalismus vertrat auch in dieser Frage wieder in typischer Weise ihrerzeit die Arithmetik von Stolz. Sie dekretierte einfach: da die Gleichung $x^2 = -1$ eine reelle Wurzel nicht hat, so verschafft man ihr Auflösungen durch eine neue „Erweiterung des Zahlsystems". Diese wird an keine andere Bedingung gebunden, als daß für die neuen „Zahlen" dieselben Rechnungsregeln wie für die bisherigen geltend bleiben müssen. Also der reinen Mathematik wurde eine absolute Machtvollkommenheit zugetraut, Zahlen nach Bedarf zu schaffen; sie zu schaffen geradezu aus dem Nichts; denn das Bedürfnis der Verallgemeinerung der Rechnungsregeln ist doch nicht eine Materie, aus der sich etwas schaffen ließe. Daneben wurde dann in „synthetischer" Erwägung eigentlich nur historisch bemerkt, daß, seit man die geometrische Bedeutung der komplexen Zahl kenne, man sich mehr und mehr zur Anerkennung ihrer Zulässigkeit verstanden und die logischen Bedenken zum Schweigen gebracht habe. Irgendein Bedürfnis, zwischen der arithmetischen Definition und der geometrischen Deutung des Imaginären einen logischen Zusammenhang herzustellen, wurde nicht empfunden.

Dagegen zeichnet auch in dieser Frage Hankel sich dadurch aus, daß er diesen fehlenden Zusammenhang doch wenigstens vermißt. Gerade bei ihm läßt sich erkennen, daß besonders Graßmanns große Durchführung der Rechnung mit Größen zu beliebig vielen Einheiten (seine „Ausdehnungslehre"), zumal in Verbindung mit der dem Prinzip nach nahe verwandten Quaternionenrechnung Hamiltons, das volle Zutrauen in die logische Angängigkeit der komplexen Zahlen bei den Mathematikern hervorgebracht hat. Bei Graßmann und Hamilton kommt aber auch schon zu deutlichem Ausspruch, daß durch die Rechnung mit dem

Komplexen die tiefe Kluft, die zwischen Arithmetik und Geometrie bis dahin bestand, überbrückt wird. Die Geometrie wird bei Graßmann geradezu zum bloßen Spezialfall oder „Beispiel" einer Mathematik, die rein in Rechnung besteht, aber auch über die gewöhnliche Arithmetik und Algebra sich erhebt und diese gleicherweise nur als Spezialfälle unter sich begreift. Im Grunde ist die beiden Wissenschaften sich überordnende „Ausdehnungslehre" nichts als die Erweiterung der Zahl selbst, als stetigen Gebildes, zugleich auf unbeschränkt viele Dimensionen. Und zwar ist es deutlich eben die Forderung der Stetigkeit, mit der ihr eng verschwisterten der Homogeneïtät, welche den Übergang in die höheren Dimensionen zugleich fordert und möglich macht; wiewohl selbst Graßmann darüber nichts Genaueres angibt, wie eigentlich dieser Übergang sich auch als im logischen Sinne stetiger vollzieht. Gerade die Hinaushebung der Ausdehnungslehre auch über die Zahl (indem diese im gewöhnlichen Sinne, daher streng eindimensional verstanden wird) hat es wohl verschuldet, daß die Dimensionsbetrachtung, so unbeschränkt sie bei Graßmann durchgeführt wird, doch nicht aus den eigenen Begriffen der Arithmetik hervorwachsend, sondern willkürlich in sie hineingetragen erscheint. Und daraus hauptsächlich erklärt es sich wohl, weshalb Graßmann lange Zeit bei den Mathematikern so gut wie unbeachtet bleiben konnte, von neueren Mathematikern aber, die sein Verdienst voll würdigen, selbst jedoch auf dem formalistischen Standpunkte starr verharren (wie Whitehead), als Gesinnungsgenosse begrüßt werden konnte, während er sich doch ausdrücklich und mit ganzer Entschiedenheit auf den „genetischen" Standpunkt stellt, das Ausgehen von einem „unmittelbaren Anfang", einem eigentlich Platonischen ἀνυπόθετον, die ursprüngliche, streng stetige „Erzeugung" der mathematischen Gebilde fordert, über deren Eigenschaften daher auch gar nicht anders entschieden werden könne, als wenn man „auf ihre ursprüngliche Erzeugung zurückgeht“.[1])

Hankel nimmt, wie gesagt, auf Graßmann bereits Bezug. Auch scheint ein innerer Zusammenhang zwischen der arithmetischen und geometrischen Bedeutung der komplexen Zahl ihm schon bestimmter als seinen Vorgängern vor Augen zu stehen. Nur gilt dieser Zusammenhang auch ihm noch als ein verborgener, geheimnisvoller. Die Imaginärzahl ist ihm ein eigenes, „im Geiste gesetztes“, „mentales Objekt“, das zunächst in sich etwas ist, an sich unabhängig davon, wie es etwa im Gebiete der Anschauung oder des Realen zur Erscheinung kommt. Doch liegt, sagt er, in der geometrischen Darstellung der komplexen Zahlen „ein dem formalen Schema . . . zwar dem Begriff nach nicht unbedingt wesentliches, aber doch vollkommen adäquates Phänomen im Raume, in der Anschauungsform des zusammenfassenden Denkens“ vor, die „sich mit psychologischer Notwendigkeit allen unseren abstrakten Vorstellungen als konkretes Abbild beigesellt“. An dieser Ausdrucksweise ist merkwürdig, daß die Anschauung nur als eine besondere Art des Denkens, das in ihr „Konkrete“, ganz Platonisch, als bloßes Abbild, also die rein begriffliche Denkgestalt, der sie sich nur „beigesellt“, als das Urbild angesehen wird. Aber um so unbefriedigender ist es, daß eine notwendige innere Beziehung des anschaulichen Abbildes zum gedanklichen Urbild dennoch nicht aufgezeigt wird. So ist es begreiflich, daß auch Hankel schließlich nicht über die Klage hinauskommt, daß die Metaphysik des Imaginären noch immer sehr im argen liege. Nicht nach einer Metaphysik war zu fragen, so wenig wie nach einer Psychologie, sondern nach schlichter Logik. Das Imaginäre, auch der Zusammenhang zwischen seinem anschaulichen Abbild und dem begrifflichen Urbild, muß sich rein logisch bewältigen lassen,

1) S. [*128*], bes. S. 181, 185.

wenn doch die Form der Anschauung selbst nur eine solche des „zusammenfassenden Denkens“ ist.

Dieser Zusammenhang ist es, den unsere obige Betrachtung anbahnen wollte. Seiner Entdeckung war immerhin schon von vielen Seiten vorgearbeitet. Stellt die reelle Zahl die gerade Linie bloß ihrer Länge nach dar — so heißt es schon bei Durège — so die komplexe auch der Richtung nach. Daß hier ein logischer Zusammenhang obwalten muß, konnte nicht lange mehr verborgen bleiben. Wie freilich ein Ausdruck, der rein aus dem Gebiete der Zahl stammt: die Anwendung des rein arithmetischen Verfahrens der (geradzahligen) Radizierung auf die negative Einheit, die einer solchen ihrem Begriff nach ganz unfähig scheint, dazu kommt, den bisher für bloß geometrisch geltenden Begriff der Richtung zu vertreten, das blieb immer noch Geheimnis.

Nahezu erreicht ist die Lösung, soviel ich sehe, zuerst von O. Schmitz-Dumont (Naturphilosophie, 1895). Er trennt von Anfang an (so wie wir) von der rein quantitativen (d. h. metrischen) Betrachtung — in der allein die Quadratwurzel oder mittlere Proportionale unmittelbar eine Bedeutung hat, aber dann auch nur die numerischen Werte angeht — die „qualitative“ Betrachtung, wie wir sagen: der Zählungsrichtung. Für das Verhältnis des Plus und Minus nun glaubt er die rein logische Erklärung zu finden in dem Aristotelischen Begriff des Totalgegensatzes (τελείως ἐναντίον), der seinerseits wiederum mit Quantitätsbegriffen an sich nichts zu schaffen habe. Bloß als Krücke der Anschauung, um einen Träger für die Denktätigkeit zu haben, an dem diese haften könne, wie die Kräfte an den Stoffen in der physikalischen Betrachtung, setze man statt des abstrakten Verhältnisses von Plus und Minus das Verhältnis $(+1):(-1)$, oder in der Umkehrung $(-1):(+1)$. Diesen unter sich äquivalenten Ausdrücken steht dann folgerecht als Ausdruck der Richtungsidentität gegenüber das Verhältnis Plus zu Plus oder Minus zu Minus, also, wenn man auch hier die Krücke der Anschauung zu Hilfe nimmt: $(+1):(+1)$ oder $(-1):(-1)$. Zwischen der reinen Identität aber und dem vollen, aufhebenden Gegensatze liege der vollkommen denkbare Fall, daß zwei Setzungen sich nicht vollständig, sondern nach einem Grade des Mehr und Minder aufheben. Denn Gegensatz und Gradreihe widersprechen sich nicht, seien als denkende Setzungen nicht heterogen in jeder Hinsicht, da sie durch Tätigkeit desselben, in seiner Grundform sich stets gleich bleibenden Denkaktes entstehen. Also habe man das Recht, zwischen $\frac{-1}{-1}$ oder $(-1)^0$ und $\frac{-1}{+1}$ oder $(-1)^1$ die mittlere Proportionale $(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$ zu setzen; womit dann die imaginäre Einheit begründet ist. Die geometrische Darstellung ergibt sich nun von selbst, und zwar nicht als bloße Anwendung auf ein ohnedies Gegebenes, sondern so, daß der Begriff des zweidimensionalen Kontinuums durch den des Richtungs-Kontinuums, welches in der komplexen Zahl seinen sachentsprechenden arithmetischen Ausdruck gefunden hat, erst gegeben wird.

Hierin liegt in der Tat das wahre Prinzip zur Entscheidung der Frage. Im übrigen ist die Ableitung, so wie sie bei Schmitz-Dumont vorliegt, nach mehreren Seiten unbefriedigend. Man sieht nicht, wie der rein logische Begriff des Mittleren zwischen den Gegensätzen dazu kommt, als mittlere Proportionale ausgedrückt zu werden. Und wenn Schmitz-Dumont mit größtem Recht die Richtungsbetrachtung von der metrischen zunächst trennt, so wird dagegen nicht klar verständlich, wie beide hernach wieder zusammenkommen; man sieht nicht, wie eine Gleichung $i^2 = -1$ begründet sei, kurz wie „das" Imaginäre zur Imaginärzahl wird. Die verschiedenen Richtungen müssen Richtungen der Größensetzung, Richtungen der Zählung, und als solche aus der Natur der Zahl selbst verständlich sein. Das ist es, was bei Schmitz-Dumont vielleicht wohl geahnt, aber jedenfalls zu voller Klarheit nicht gebracht ist. Dies ist aber zugleich die Voraussetzung, um die Richtungsbetrachtung, wie es doch auch Schmitz-Dumont anstrebt, mit der Dimensionsbetrachtung in überzeugende Verbindung zu setzen. Dimensionen sind, als „Abmessungen", eben Zählungen. So wird durchweg der Rückweg von der bloß logischen zur mathematischen Betrachtung bei Schmitz-Dumont nicht gefunden oder doch nicht klargestellt. Und das läßt es begreiflich erscheinen, daß die Mathematiker an dieser anscheinend bloß logischen Aus- oder Umdeutung arithmetischer Begriffe achtlos vorübergingen. Man sah nicht, was für das Verständnis der Zahl da herausspringen solle. Gewiß muß logische Erwägung in dieser so sehr logischen Frage entscheiden, aber nur eine solche, die aus dem Schoße der mathematischen, der arithmetischen Begriffe, die selbst rein logische Schöpfungen sind, homogen hervorgeht, nicht aus einem der Arithmetik an sich fremden Gebiete des Logischen in sie hineingetragen erscheint.

Der Ausgang von dem Aristotelischen Begriff des Gegensatzes ist in der Tat bestenfalls eine Verhüllung, aus der der reine Sachgehalt erst herauszuschälen ist. Wie schon die negative Zahl nicht richtig gedeutet wird durch den Begriff entgegengesetzter als in der Vereinigung einander vernichtender Dinge; wie man schon hier in dem Gegensatz des Plus und Minus den ganz positiven Sinn der Gegenseitigkeit bloßer Beziehungen, den Sinn des Gegenverhältnisses nicht erkannt hat, so konnte erst recht in der Erklärung der komplexen Zahl das Ausgehen vom Gegensatz im Sinne der Aufhebung zu Null (als dem vermeinten arithmetischen Nichts) nur in die Irre leiten. Vielmehr war die Aristotelische, absolut verstandene Kontrarietät erst selbst zu relativieren zum Richtungsgegensatz (Plus-Minus-Verhältnis), welche Relativierung übrigens der Sache nach schon Kant in der wenig beachteten, bedeutenden Schrift von den negativen Größen (1763) vollzogen hat. Im Richtungsgegensatz aber verbirgt sich als die wahre Wurzel der gesuchten Mannigfaltigkeit der Position die zirkuläre Änderung. Der Sache nach schwebt diese auch Schmitz-Dumont vor; auf die zyklische Funktion wird geradezu hingewiesen (S. 113 u. 140). Aber es kommt bei ihm wenigstens nicht zur Klarkeit über ihre Stelle im System der logischen Grundbegriffe und daher über die Art ihrer Verbindung mit den übrigen für die Begründung der Arithmetik erforderlichen Urbegriffen des reinen Denkens; man versteht nicht, wie die Zahl selbst der zirkulären Änderung fähig sein soll.

§ 4. (*Endgültige Rechtfertigung der Einführung der Begriffe Dimension und Richtung in die Zahl.*) Verstehen läßt es sich in der Tat wohl, daß man ernstes Bedenken trug, die Begriffe Dimension und Richtung mit dem Begriff der Zahl in eine so unmittelbare Verbindung zu setzen, wie wir es fordern. Hat doch selbst Graßmann nicht gewagt, sie geradezu der Zahl als Merkmale beizulegen; beide bleiben auch bei ihm im Grunde nur Eigenschaften des Zählbaren, für die in der „Ausdehnungsgröße" nur das geeignete Mittel methodischer Behandlung geschaffen werden sollte. Wie dagegen aus dem eigenen Begriff der Zahl Dimension und Richtung folge, das zu zeigen nimmt auch er keinen Anlauf. Aber eben darum haftet seiner Ausdehnungsgröße ein kaum überwindlicher Schein des Willkürlichen, künstlich Zurechtgemachten an.

Die Zahl als bloßer Ausdruck des Mehr und Weniger scheint ein lineares Gebilde sein und bleiben zu müssen und also, mit einer Mehrheit von Dimensionen, auch eine Mehrheit von Richtungen auszuschließen. Das ist es, was allen Bedenken gegen die komplexen Zahlen von jeher offen oder versteckt zugrunde lag und bis heute zugrunde liegt.

Zwar fällt auch jeder Schatten von logischem Widerspruch sofort weg, wenn man verschiedene, aber unter sich verknüpfte Zählungen einmal zuläßt. Nur für eine einzige