Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften

Natorp, Paul

Leipzig [u.a.], 1910

§ 4. Endgültige Rechtfertigung der Einführung der Begriffe Dimension und Richtung in die Zahl.

urn:nbn:de:hbz:466:1-35817

aber verbirgt sich als die wahre Wurzel der gesuchten Mannigfaltigkeit der Position die zirkuläre Änderung. Der Sache nach schwebt diese auch Schmitz-Dumont vor; auf die zyklische Funktion wird geradezu hingewiesen (S. 113 u. 140). Aber es kommt bei ihm wenigstens nicht zur Klarkeit über ihre Stelle im System der logischen Grundbegriffe und daher über die Art ihrer Verbindung mit den übrigen für die Begründung der Arithmetik erforderlichen Urbegriffen des reinen Denkens; man versteht nicht, wie die Zahl selbst der zirkulären Änderung fähig sein soll.

§ 4. (*Endgültige Rechtfertigung der Einführung der Begriffe Dimension und Richtung in die Zahl.*) Verstehen läßt es sich in der Tat wohl, daß man ernstes Bedenken trug, die Begriffe Dimension und Richtung mit dem Begriff der Zahl in eine so unmittelbare Verbindung zu setzen, wie wir es fordern. Hat doch selbst Graßmann nicht gewagt, sie geradezu der Zahl als Merkmale beizulegen; beide bleiben auch bei ihm im Grunde nur Eigenschaften des Zählbaren, für die in der „Ausdehnungsgröße" nur das geeignete Mittel methodischer Behandlung geschaffen werden sollte. Wie dagegen aus dem eigenen Begriff der Zahl Dimension und Richtung folge, das zu zeigen nimmt auch er keinen Anlauf. Aber eben darum haftet seiner Ausdehnungsgröße ein kaum überwindlicher Schein des Willkürlichen, künstlich Zurechtgemachten an.

Die Zahl als bloßer Ausdruck des Mehr und Weniger scheint ein lineares Gebilde sein und bleiben zu müssen und also, mit einer Mehrheit von Dimensionen, auch eine Mehrheit von Richtungen auszuschließen. Das ist es, was allen Bedenken gegen die komplexen Zahlen von jeher offen oder versteckt zugrunde lag und bis heute zugrunde liegt.

Zwar fällt auch jeder Schatten von logischem Widerspruch sofort weg, wenn man verschiedene, aber unter sich verknüpfte Zählungen einmal zuläßt. Nur für eine einzige

Zählung muß auch die Nullbeziehung einzig sein; diese Bedingung gilt dagegen nicht mehr, sobald eine Mehrheit unter sich verknüpfter Zählungen angenommen werden darf. Aber diese Annahme selbst erscheint zunächst logisch nicht gerechtfertigt, sondern allenfalls nur willkürlich setzbar. So erklärt Whitehead: das Symbol $(-1)^{\frac{1}{2}}$ sei an sich als Zahl sinnlos. Daß algebraische Operationen mit diesem sinnlosen Symbol sich ausführen lassen und zu Sätzen führen, die für Zahlen gelten, sucht er dadurch verständlich zu machen, daß die Operationen der Algebra über die Zahl (als ein besonderes Gebilde) hinausreichen. Ihre Gesetze, obgleich durch die Arithmetik ursprünglich dargeboten, hängen doch an sich nicht von ihr ab, sondern — wovon? Von der Übereinkunft! Nur, da es doch ursprünglich Regeln der Arithmetik waren, so bleiben die arithmetisch deutbaren Ergebnisse algebraischer Entwicklungen immer richtig. Aber daß der bloßen Übereinkunft ein Kraft innewohne, durch arithmetisch absurde Vermittelungen arithmetisch sinnvolle Ergebnisse zutage zu fördern, will nicht einleuchten. So ist es in der Tat auch nicht. $(-1)^{\frac{1}{2}}$ ist allerdings keine „Zahl", wenn man sich einmal darauf festgelegt hat, „Zahl" nur ein einzelnes Glied einer einzelnen Zählung zu nennen. Sobald man dagegen anerkennt, daß aus systematischer Verknüpfung verschiedener Zählungen Zahlausdrücke hervorgehen können, welche nicht Glieder isolierter Zählungen, sondern Beziehungen unter verschiedenen, doch gesetzmäßig verknüpften Zählungen bedeuten, wird der Streit, ob man solche als arithmetische Begriffe anerkennen soll oder nicht, zum unnützen Wortstreit; die Gültigkeit eines durch die komplexe Zahl erhaltenen Ergebnisses für reelle Zahlen ist dann um nichts rätselhafter, als daß ein geometrischer Beweis, der auf n Dimensionen Bezug nimmt, eine Aussage im Bezug auf $n - 1$ Dimensionen begründen kann.

Dies setzt freilich die Zulässigkeit mehrfacher Zählung schon voraus. Nun liegt es nahe genug, darauf hinzuweisen, daß die sogenannten Erweiterungen der Zahl sämtlich auf der Einführung verschiedener aber verknüpfter Zählungen beruhen, wie schon Hamilton (in der Vorrede seiner Vorlesungen) bemerkt hat. Und zwar bietet sich zur nächsten Vergleichung die relative Zahl an, in der die Zählung 0, 1, 2... zweimal auftritt, unterschieden durch das Vorzeichen, verknüpft im gemeinsamen Ausgangswert 0; verknüpft aber durch die, nicht aus irgendwelcher Willkür angenommene, sondern mit der ursprünglich die Zahl erzeugenden Grundrelation von 0 zu 1 oder 1 zu 0 zugleich gegebene Beziehung dieser beiden Beziehungsweisen (des Plus und Minus), gemäß welcher die eine die Umkehrung der anderen oder ihren Gegensinn darstellt. Durch diese so ursprünglich begründete Verknüpfung wird die relative Zahlreihe, obgleich sie von einer Seite als Verknüpfung zweier Zählungen erschien, zu einem fortan unteilbar einheitlichen Gebilde. So erwiesen auch die gegeneinander inkommensurabelen Zählungen, die sich zunächst als verschiedene, obgleich streng gesetzmäßig verknüpfbar, darstellten, sich in letzter Betrachtung, nachdem der tiefere Grund dieses Unterschieds und dieser Verknüpfbarkeit erkannt war, als nicht bloß hinterher vereinbar, sondern wurzeleins und in der einen, stetigen Zahlreihe notwendig zusammenhängend. So muß denn wohl auch die komplexe Zahl, so sehr ihr zunächst der Schein eines willkürlichen Kompositum anhaftet, in einer letzten Betrachtung sich als wesentlich einiges Gebilde, im Ursprung aller Zahlsetzung von Haus aus begründet, erweisen. Irgendein Hinweis auf die Tatsache, daß mehr Dimensionen und Richtungen des Zählbaren, z. B. räumlicher Beziehungen vorkommen und einen Ausdruck in der Zahl verlangen, kann hier schlechterdings nichts ausrichten; sondern die Entscheidung muß streng in den eigenen Gesetzen der Zahl gefunden werden. Da aber haben wir sie dem Prinzip nach bereits gefunden.

Zur Darstellung mehrdimensionaler Beziehungen, nachdem solche anderweitig gegeben sind, würde die gewöhnlich verstandene, eindimensionale Zahl zur Not hinreichen; obwohl genau betrachtet nur deshalb, weil schon die schlichte Operation des Multiplizierens ein Analogon von Mehrdimensionalität einschließt. Nämlich es läßt sich schon die allein auf die Werte bezogene multiplikative Entwicklung der Zahl zum Ausdruck mehrdimensionaler Beziehungen des Gezählten gebrauchen, wie es schon den Pythagoreern geläufig war. Aber es sind immer nur die Werte, die so zum Ausdruck gebracht werden, nicht die Dimensionsbeziehungen selbst. Wertbeträge mehrdimensionaler Gebilde werden aus den in jeder einzelnen Dimension gemessenen hergeleitet auf Grund voraus gegebener Beziehungen unter den Dimensionen, von denen die gewöhnliche Multiplikation an sich nichts weiß. Es erfolgt also auf diese Weise die Entwicklung in die Dimensionen nicht durch die Zahl.

Nun aber haben wir einen Sinn der Multiplikation kennen gelernt, der unmittelbar die Mehrheit der Dimensionen, und zwar sofort in voller Allgemeinheit einführt. In der multiplikativen Entwicklung der relativen Zahl ist, wie sich gezeigt hat, die Überschreitung der einzigen Dimension der Zahl dem Grundsatz nach schon vollzogen und faktisch in Gebrauch genommen; daher denn auch das Imaginäre sich unabweislich ergibt, sobald die multiplikativen Beziehungen der relativen Zahlen folgerecht weiterentwickelt werden. Das Vorzeichen setzt eben schon die Richtung, und zwar sofort eine Zweiheit von Beziehungsrichtungen und einen möglichen Austausch unter diesen. Damit ist die Eindimensionalität grundsätzlich überschritten, so daß für eine folgerechte Weiterentwicklung der Zahlbeziehungen schon kein anderer Weg übrig bleibt als, die Mehrdimensionalität allgemein zur Voraussetzung zu erheben.

Die bloße Wertbetrachtung war auf mehr Dimensionen, wie gesagt, nur anwendbar, wenn diese anderweitig gegeben waren. Auch aus der bloßen Reihenfolge, solange diese einseitig als Sonderung verstanden wird (indem zwar die Verbindbarkeit überhaupt festgehalten, aber nach irgendeiner unterschiedlichen Art der Verbindung nicht gefragt wird) würde eine Mehrheit von Dimensionen nicht folgen. Und denkt man sich auch eine Reihenfolge wiederum solcher Reihenfolgen (selbst unendlicher, was sich als zulässig erwies), und Reihenfolgen dritter, vierter, $n$ter Stufe, doch käme man nicht aus der einzigen Dimension heraus, sondern nur zu den Cantorschen oder Veroneseschen Unendlichen. Dagegen mit der Multiplikation als Relation der Relation, sofern diese auf die Positionsbeziehung, zunächst ganz abgesehen von Wertbeziehungen, sich erstreckt, tritt sofort die mehrdimensionale Betrachtung in ihr volles Recht.

Nicht nur Wertbeträge haben, auf Grund des Mehr und Weniger, gegeneinander eine Lagebeziehung, sondern Lagebeziehungen selbst haben untereinander eine Lagebeziehung. Damit ist unmittelbar die Positionsbetrachtung selbst zur zweiten Dimension erhoben. Die Potenz, als Potenz der Lageänderung, ist unmittelbar ihrem Begriff nach die Dimension.

Die Einzigkeit unserer Urreihe bleibt dabei übrigens unangetastet. Sie gerade ist gefordert als Vergleichsgrundlage für jede über eine Dimension hinausgehende Positionsbeziehung. Die Urreihe wird damit zur Nullreihe, im Sinne des festen Ausgangs für die Positionsbetrachtung. Eben als solche mußte sie absolut eindeutig konstruiert werden, damit dann die ganze, nunmehr unbeschränkte Mannigfaltigkeit der Positionsbeziehungen auf ihr sich aufbauen könne. Nämlich auch die ungeänderte Lage wird, im Hinblick auf die nun als möglich erkannte Änderung, zum Lageverhältnis, dem Verhältnis einer gegebenen Lage zu sich selbst, welche als nullte Potenz der Grundänderung der Lage folgerecht ausgedrückt wird. Die „gerade“ Reihe positiven Vorzeichens wird mit anderen Worten zur Reihe vom Winkel 0, während die gerade reelle, d. i. positiv-negative Reihe dem gestreckten Winkel oder dem Winkel 1, nämlich der Fundamentaländerung der Positionsbeziehung, von Plus in Minus oder umgekehrt, entspricht. Die Übertragung der Einheitsstrecke aus dem Plus- in den Minussinn drückt sich dann folgerecht aus als Änderung des (-1) von der nullten zur ersten Potenz. Dann entspricht $(-1)^{\frac{1}{2}}$ der Halbierung des gestreckten Winkels, also der Normale, die beliebigen gebrochenen Potenzen von (-1) der beliebigen Winkelteilung zwischen 0 und 1, wobei die n verschiedenen Werte der $n$ten Einheitswurzel in bekannter Weise ihre (wie man sagt) „geometrische“ Deutung finden.

Eine rein mathematische Ausführung in diesem Sinne, auf Grund einer Erweiterung der goniometrischen Funktionen, welche diesen statt des Winkels $\frac{1}{2}\pi$ den beliebigen Winkel $\frac{1}{n}\pi$ zugrunde legt, woraus zugleich eine entsprechende Erweiterung der Hamiltonschen Quaternionen folgt, findet man in einer Arbeit von Unverzagt (*174*, 1876; vgl. auch Drobisch, *38*[a], 1848). Besonders auch darin entspricht diese Darlegung ganz unseren eben entwickelten Voraussetzungen, daß sich die Längenbeziehung bei ungeänderter Beziehungsrichtung als bloßer Sonderfall der goniometrischen, nämlich für den Winkel 0, ergibt. Mit Recht sieht Unverzagt in der so begründeten Rechnungsart, die nur der konsequente Ausbau der von Möbius, Hamilton und Graßmann angebahnten ist, eine der möglichen Erfüllungen der Leibnizschen Forderung einer Analysis, welche die Lagebeziehungen in gleicher Weise wie die Größenbeziehungen und auf gleicher Linie mit diesen zu behandeln gestatte (*Analysis situs*); welche Forderung ebenso für die Entdeckung der projektivischen Geometrie durch Poncelet, für Riemanns Gebietsrechnung und für Graßmanns Ausdehnungslehre wegweisend gewesen ist. Bei diesen allen erwies sich die Positionsbetrachtung fundamentaler und daher umfassender als die bloße Wertbetrachtung; so wie die komplexe Zahl die gewöhnliche zugleich umfaßt. Die Zahl existiert eben nicht ohne die Richtung, und nur so lange erscheint die in Abstraktion von der Richtung betrachtete Zahl einfacher, als man unterläßt, die Positionsbeziehung in vollem Umfang in Betracht zu ziehen; während jeder Ausdruck der letzteren durch die erstere 1. nicht ohne gewisse Minimalvoraussetzungen aus dem Gebiete der Position (zum wenigsten das Verhältnis von Plus und Minus) möglich ist, 2. notwendig komplizierter und weniger direkt ausfällt als ein solcher, der die Positionsbeziehung von Anfang an auf gleicher Linie mit der auf die bloße Extension erstreckten Maßbeziehung, daher direkt und ihrem vollen Umfange nach ins Auge faßt. Vor allem behält jede Art der Zurückführung der Lage- auf Wertbeziehungen unvermeidlich in den Voraussetzungen etwas Willkürliches, was dagegen ganz wegfällt, sobald die Lagebeziehung in gleichberechtigter Stellung mit der Wertbeziehung vom ersten Anfang an berücksichtigt wird. Die Vergleichung irgendeiner Cartesianischen Behandlung der Richtungen in Verbindung mit den Längen mit der Streckenrechnung von Möbius, Graßmann, Hamilton oder Unverzagt läßt den Unterschied sofort in die Augen fallen. Freilich mußten die Zahlbeziehungen im engeren Bereich bis zu einem gewissen Punkte entwickelt sein, ehe sie diese umfassendere Bedeutung frei entfalten konnten. Man braucht die ganzen Zahlen, selbst um die Potenzen, auch als Potenzen der Richtung, ausdrücken zu können. Der Richtungsunterschied hat selbst einen Betrag; es gibt gleiche, also auch doppelte usw. Änderungen der Richtung, die sich als solche notwendig durch Zahlbeträge ausdrücken. Dagegen ist die Richtungsverschiedenheit auf keine Weise aus irgendeiner bloßen Verschiedenheit von Größenbeträgen konstruierbar, vielmehr jede Änderung der

Größenbeziehung unterliegt von Anfang an zugleich der Richtungsbeziehung; nur wird zur größtmöglichen Vereinfachung die Richtungsbeziehung zunächst ohne andere Änderung als die einfachste (von Plus in Minus und umgekehrt) angenommen und läßt so in den Rechnungen ihre umfassendere Bedeutung nicht sofort erkennen. Diese müßte in logisch-radikaler Betrachtung auch schon in der gewöhnlichen Zahl irgendwie mit zum Ausdruck gebracht werden. So geschieht es in der Tat auf die angegebene Weise bei Unverzagt; und so geschah es auch schon bei Graßmann, indem die Zahlgröße zur Ausdehnungsgröße nullter Stufe (ebenso wie als diskrete zum bloßen Quotienten stetiger Größen) wurde; womit der Sache nach gesagt ist, daß die Ausdehnungsgröße als stetige n-dimensionale Zahl der gewöhnlichen (diskreten eindimensionalen) Zahl (d. h. Menge von Einheiten) sich logisch überordnet und sie als Sonderfall einschließt. Durch diese Überordnung aber stellt nun die Einheit des Systems sich erst vollständig her. Es kann sich der Schein nicht länger behaupten, als sei diese durch die Zulassung von mehr Dimensionen durchbrochen und der Weg willkürlicher Erweiterungen beschritten, den ein logisch-genetischer Aufbau der Zahl streng meiden muß. Die eindimensionale Zahl vielmehr bliebe der Position nach unstetig; also mangelte gerade ihr die wesentliche logische Einheit, welche unbedingt Kontinuität erfordert.

§ 5. (*Verhältnis der Begriffe Dimension und Richtung.*) Nur eines bedarf hier noch der weiteren Aufhellung, nämlich das innere Verhältnis der Begriffe Dimension und Richtung untereinander. Ich glaubte in meinen ersten auf diese Frage bezüglichen Untersuchungen (*127*, *128*) unbedenklich die Mannigfaltigkeit der Dimensionen erst durch die der Richtungen einführen zu können. Hiergegen wurde von mehreren Seiten eingewendet: es leuchte nicht ein, mit welchem Recht überhaupt aus der Grundreihe hinausgegangen werde. Zumal