Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften

Natorp, Paul

Leipzig [u.a.], 1910

§ 5. Verhältnis der Begriffe Dimension und Richtung.

urn:nbn:de:hbz:466:1-35817

Größenbeziehung unterliegt von Anfang an zugleich der Richtungsbeziehung; nur wird zur größtmöglichen Vereinfachung die Richtungsbeziehung zunächst ohne andere Änderung als die einfachste (von Plus in Minus und umgekehrt) angenommen und läßt so in den Rechnungen ihre umfassendere Bedeutung nicht sofort erkennen. Diese müßte in logisch-radikaler Betrachtung auch schon in der gewöhnlichen Zahl irgendwie mit zum Ausdruck gebracht werden. So geschieht es in der Tat auf die angegebene Weise bei Unverzagt; und so geschah es auch schon bei Graßmann, indem die Zahlgröße zur Ausdehnungsgröße nullter Stufe (ebenso wie als diskrete zum bloßen Quotienten stetiger Größen) wurde; womit der Sache nach gesagt ist, daß die Ausdehnungsgröße als stetige n-dimensionale Zahl der gewöhnlichen (diskreten eindimensionalen) Zahl (d. h. Menge von Einheiten) sich logisch überordnet und sie als Sonderfall einschließt. Durch diese Überordnung aber stellt nun die Einheit des Systems sich erst vollständig her. Es kann sich der Schein nicht länger behaupten, als sei diese durch die Zulassung von mehr Dimensionen durchbrochen und der Weg willkürlicher Erweiterungen beschritten, den ein logisch-genetischer Aufbau der Zahl streng meiden muß. Die eindimensionale Zahl vielmehr bliebe der Position nach unstetig; also mangelte gerade ihr die wesentliche logische Einheit, welche unbedingt Kontinuität erfordert.

§ 5. (*Verhältnis der Begriffe Dimension und Richtung.*) Nur eines bedarf hier noch der weiteren Aufhellung, nämlich das innere Verhältnis der Begriffe Dimension und Richtung untereinander. Ich glaubte in meinen ersten auf diese Frage bezüglichen Untersuchungen (*127*, *128*) unbedenklich die Mannigfaltigkeit der Dimensionen erst durch die der Richtungen einführen zu können. Hiergegen wurde von mehreren Seiten eingewendet: es leuchte nicht ein, mit welchem Recht überhaupt aus der Grundreihe hinausgegangen werde. Zumal wenn die Grundreihe von vornherein die Zahlreihe sein (die Zahl vor den Richtungen und Dimensionen für sich feststehen) sollte, so war in der Tat diese Berechtigung nicht gegeben. Zählen (durfte man einwenden) heißt in eine Reihe ordnen, also gibt es insoweit nichts außer der einen Reihe. Diesem Bedenken suchte ich dann (*130*, *133*[1]) dadurch zu begegnen, daß ich die Mehrdimensionalität der Zahl unabhängig von der Richtungsbetrachtung einführte auf Grund der Erwägung, daß ja unsere Grundreihe nicht ein Ding, sondern ein reines Verfahren bedeute. Daher lasse sich diese Reihe nicht bloß einmal, sondern beliebig vielfach setzen; es lassen sich Reihen solcher Reihen bilden, jede für sich von gleichem Aufbau wie die ursprüngliche, alle aber verbunden durch ein System von Beziehungen, in jeder Hinsicht entsprechend dem der Einzelglieder der Grundreihe; nicht also als gleichartige Fortsetzung derselben Reihe, sondern in neuer Funktion, indem die Glieder der Reihe jetzt weder Einzelglieder noch irgendwie begrenzte Reihen solcher, sondern ganze, unendliche Reihen, ebenso wie die Grundreihe, sein sollen. Es ließen sich dann auch wiederum Reihen solcher Reihen von Reihen bilden, und so unbeschränkt weiter. So ergaben sich die Dimensionen — scheinbar — vor den Richtungen, und zwar sofort unendliche; und damit schien die vorher vermißte Grundlage für eine Mannigfaltigkeit auch der Richtungen gewonnen. Nämlich es ließ sich nunmehr leicht zeigen, daß es in sämtlichen, der Voraussetzung nach durchaus identisch konstruierten Reihen z. B. ein Glied 0, ein Glied 1 usf. gab, also, wenn man die einander entsprechenden Glieder der verschiedenen Reihen durch Indices unterschied, Reihen:

$$\begin{array}{c} 0_0\ 1_0\ 2_0 \ldots \\ 0_1\ 1_1\ 2_1 \ldots \\ 0_2\ 1_2\ 2_2 \ldots \\ \text{usf.} \end{array}$$

Es bildeten aber dann z. B. die Nullglieder sämtlicher Reihen (o_0 o_1 o_2 . . .) auch unter sich eine Reihe, welche mit der Grundreihe das Glied o_0 gemein hat. Und zwar bildeten die Nullglieder eine gerade Reihe; denn da die übrigens in jeder Hinsicht identisch konstruierten Reihen auch in derselben, nicht bloß von Glied zu Glied gleichen, sondern zugleich schlechthin einfachen Art der Relation zueinander geordnet sein sollten, wie die Glieder der Grundreihe, so konnte in der Tat auch zwischen den identischen Gliedern sämtlicher Reihen (z. B. den Nullgliedern) nur dieselbe einfache, immer identische Relationsart (die als Geradheit schon definiert war) stattfinden. Diese Reihe hatte sofort auch für sich einen Plus- und Minussinn; es fragte sich nur noch, wie dieser sich zum Plus- und Minussinn der Grundreihe verhalten müsse. Die Frage entschied sich mit Notwendigkeit dahin, daß beide sich zu beiden (im Grundfall) gleich verhalten, d. h. die Relation Plus zu Minus oder Minus zu Plus der Grundreihe durch die Querreihe, ebenso die Relation Plus zu Minus oder Minus zu Plus der Querreihe durch die Grundreihe halbiert gedacht werden mußte. Für diese, immerhin nicht unmittelbar einleuchtende und schwer als unerläßlich zu beweisende Annahme sah ich den entscheidenden prinzipiellen Grund darin, daß hier wie stets in genetischer Ableitung der Fall der Gleichheit zugrunde zu legen sei. Eine ungleiche Beziehung nämlich würde, wenn keine Unbestimmtheiten bleiben sollen, anderweitige Bestimmungsstücke fordern, was der genetische Aufbau verbietet. Gilt aber die Voraussetzung, so ist durch eine so konstruierte Querreihe (z. B. die der Nullglieder sämtlicher Reihen) die Senkrechte dargestellt; man hat also zunächst die Normalrichtung, die der gewöhnlichen Imaginärzahl $(-1)^{\frac{1}{2}}$ entspricht. Es machte dann keine besondere Schwierigkeit mehr, die Winkelgröße allgemein, in zwei Dimensionen zunächst, ferner aber, da die einmal eingeführte Dimensionsbetrachtung ohne weiteres für eine beliebige Zahl von Dimensionen zureicht, auch für beliebige Dimensionen einzuführen.

Diese Deduktion scheitert schwerlich an dem Einwand von Max Simon[1]) (dem die obige Darstellung implicite schon begegnet ist), daß man auf die angegebene Art die Cantorschen transfiniten Zahlen, aber nicht die qualitative Verschiedenheit der Richtungen in der Ebene oder die komplexen Zahlen erhalte. Es war doch Voraussetzung, daß der ursprünglichen Reihe alle Werte angehören, die in der gleichen Relation (Nullbeziehung) überhaupt setzbar sind. Für die Cantorschen Transfiniten aber gilt dieselbe Art der Nullbeziehung, und zwar als Beziehung auf eine und dieselbe, soweit überhaupt einzige Null der Urreihe; sie gehören also, wofern sie überhaupt angenommen werden, notwendig derselben, ursprünglich einzigen Reihe an. Wird nun diese Reihe wiederholt gesetzt und unter den so gesetzten Reihen eine neue Beziehung angenommen, so ergibt sich nicht eine Fortsetzung der ursprünglichen Reihe in ein Transfinites nur höherer Ordnung, sondern, wenn überhaupt etwas, dann notwendig der Überschritt in eine neue Dimension.

Aber allerdings wird die Überschreitbarkeit der ursprünglichen, als einzig angenommenen Richtung der Zählung überhaupt hierbei stillschweigend schon vorausgesetzt, und das ist es wohl, was der Einwand wesentlich besagen wollte. So berührt sich dieser Einwand nahe mit dem, welchen Jonas Cohn (*28*, S. 212 ff.) gegen Russells der meinigen nahestehende wenn nicht äquivalente Einführung der Dimensionen[2]) erhebt. Russell machte nämlich die Bemerkung, die auch mir zu meiner Aufstellung den Anstoß gegeben hatte, daß in Graßmanns Darstellung der Dimensionen durch die komplexen Zahlen beliebiger Ordnung die

1) Zeitschr. f. Math. u. math. Unterricht, XXXIII, S. 125.
2) [*154*] Ch. 44, §§ 351 ff.

Verschiedenheit der Einheiten und damit die Mehrheit der Dimensionen nicht wirklich abgeleitet, sondern ohne Begründung eingeführt wird. Aus den Gesetzen der bloßen Zahl scheint sie überhaupt nicht abgeleitet werden zu können, da eine derartige qualitative Unterscheidbarkeit der Einheiten (so sagt Cohn) „unter den Voraussetzungen der Arithmetik nicht vorkommt". Russell glaubte nun diese Lücke zu schließen durch eine Konstruktion ähnlich der oben angegebenen, von mir zuerst 1901 vorgetragenen, nämlich durch Bildung von Reihen zweiter, dritter, *n*ter Ordnung, d. h. Reihen von Reihen (oder Beziehungen von Beziehungen), Reihen wieder solcher Reihen, und so unbeschränkt weiter. Auch Russell denkt indessen nicht daran, die so entstehenden Systeme als reine Entwicklungen der Zahl anzusehen. Sie gehen nicht hervor durch eine Erweiterung von Zahlbeziehungen auf *n* Dimensionen, sondern geben, wie er sagt, dieser Erweiterung (d. h. den komplexen Zahlen) wo nicht den „Ursprung", doch den „Seinsgrund" [1]); d. h. man bildet die Systeme komplexer Zahlen, um die Elemente der *n* dimensionalen Mannigfaltigkeit dadurch darstellbar zu machen, nachdem diese unabhängig von der Zahl — nämlich, wie Russell meint, rein logisch und nicht arithmetisch — begründet sind.[2]) Insofern wird Russell wohl nicht getroffen durch den Einwand Cohns [3]), daß die Möglichkeit von mehr Dimensionen bedingt sei durch eine inhaltliche Verschiedenheit von Gegenständen, die aus rein arithmetischen Bestimmungen nicht zu schöpfen sei; denn die reine Arithmetik schließe durch ihre Voraussetzungen eine solche Verschiedenheit gerade aus. „Wenn also Russell glaubt, mehrdimensionale Systeme arithmetisch erzeugt zu haben, so irrt er." Nach dem Gesagten scheint

1) Couturat [*31*] S. 145.
2) Russell a. a. O., Couturat S. 141, 145.
3) a. a. O. S. 215.

es nicht, daß dies der Glaube Russells überhaupt gewesen sei. Dagegen war es allerdings mein Glaube, unmittelbar durch die Zahl selbst, nämlich als komplexe, die Mehrheit der Dimensionen einzuführen. Somit ist meine Aufstellung von der Russells prinzipiell verschieden. Aber gerade so scheint eher sie als die Russells dem Einwande Cohns ausgesetzt, der dem Kern der Sache nach offenbar auf das alte Bedenken zurückkommt, daß die Zahl als solche überhaupt nur von einer Dimension, daher aus sich einer Erweiterung auf mehr Dimensionen unfähig sei.

Aber darauf ist oben die Antwort schon gegeben worden; und in wiederholter, gründlicher Erörterung der Frage auch in unserem philosophischen Seminar sind wir auf dieselbe Antwort immer zurückgekommen: die Überschreitung der einzigen Dimension ist damit gegeben, daß schon in der ursprünglichen Zahlreihe nicht bloß ein Unterschied der Beziehungsart, sondern auch eine neue Beziehungsart dieser Beziehungsarten, also eben eine Relation von Relationen, d. h. aber, das Fundament einer zweidimensionalen, überhaupt mehrdimensionalen Betrachtung eingeschlossen liegt. Nur das bleibt zu entscheiden, ob diese Überschreitung ursprünglich durch die Positionsbeziehung selbst, d. h., wie schon oben ausgesprochen wurde, durch die direkte Einführung der Winkelgröße in die Zahl, oder durch die von verschiedenen Einheiten zu geschehen habe. Welche von beiden Betrachtungen man auch zum Ausgang wählt, in jedem Fall muß hernach die andere hinzutreten, und es lassen sich an sich gleichgut unter Voraussetzung des Winkels die Reihen von Reihen begründen, wie jener unter Voraussetzung dieser; faktisch sind in der Entwicklung der mathematischen Wissenschaft beide Betrachtungsarten hervorgetreten und auch sofort miteinander verbunden worden. Nach wiederholter Überlegung aber will es mir scheinen, daß die erstere Betrachtungsart die fundamentale, meine ursprüngliche Ableitung also in sich wohlbegründet gewesen ist, obgleich ich die zureichende Begründung damals nicht finden konnte und deshalb zunächst den anderen Weg glaubte wählen zu sollen. Die Reihen von Reihen nämlich verlangen für die neue Anordnung (die der Reihen selbst) schon eine neue Richtung, wie auch immer deren Beziehung zur Richtung der Urreihe angenommen wird. Also kann man nicht die Richtungsverschiedenheit überhaupt durch die Reihen von Reihen (d. h. die ausgeführte Dimensionsbetrachtung) erst einführen wollen. Dagegen werden umgekehrt durch die neuen Richtungen unmittelbar auch neue Reihen, mithin Reihen von Reihen hergestellt; denn die Richtungen sind Richtungen der Zahl; eben für sie steht das Verfahren des Zählens, wie es zunächst als eindimensionales aufgestellt wurde, fortan zu unbeschränkter Wiederholung bereit, nachdem sich erwiesen hat, daß die Richtungen überhaupt nicht durch den an sich etwa von ihnen unabhängig vollziehbaren Aufbau der Zahl bedingt, sondern vielmehr für diesen ihrerseits bedingend sind. In diesem bestimmteren Sinne behält mein früheres Argument: daß die Zahlreihe nicht ein Ding, sondern ein Verfahren bedeute und darum nicht bloß für ein einziges Mal, sondern zu beliebig wiederholter Anwendung zu Gebote stehe, volle Geltung und findet gerade in der eben angegebenen Verbindung mit der Richtungsbetrachtung uneingeschränkte und einwandfreie Anwendung. Schon die ursprüngliche Zahlreihe wird, wie schon gesagt, durch die Doppelheit des Beziehungssinns zur zweifachen Zählung; es ist also die Einzigkeit der Zählung schon durch die relative Zahl überschritten, ganz im Einklang mit unserer Behauptung, daß durch die Richtungsbetrachtung unmittelbar die Mehrheit der Zählungen, also auch der Einheiten herbeigeführt werde. Der ferneren Erweiterung der Richtungsbetrachtung muß daher auch die Erweiterung der Zählung, mithin der Einheiten, und damit die Dimensionsbetrachtung, unweigerlich folgen.