Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften

Natorp, Paul

Leipzig [u.a.], 1910

§ 5. Die Gerade als Grundgebilde des Raumes.

jizieren; die Zeit ist darum (wie wiederum Kant hervorgehoben hat) durch sich selbst nicht meßbar, eben weil ihre Teile nicht zugleich sind, Messung aber eine Zusammenfassung erfordert, die nur als räumliche möglich ist. Hier besonders beweist sich, daß dies ganze eigenartige Wechselverhältnis des Zeit- und Raumvorstellens nicht etwa bloß psychologische Bedeutung hat (in welchem Falle es uns hier nicht zu interessieren brauchte), sondern auf den Aufbau der Wissenschaft seine weittragenden Konsequenzen erstreckt. Wir werden bald zu zeigen haben, wie die Gestalt des Koordinatensystems für die Darstellung der Naturvorgänge in den Gleichungen der Physik durch dies Verhältnis (die räumliche Bedingtheit der Zeitmessung selbst und andererseits die nur zeitliche Darstellbarkeit der Raumänderung) gänzlich bedingt ist.

§ 5. (*Die Gerade als Grundgebilde des Raumes.*) Zufolge eben dieser Wechselbeziehung also müssen dieselben Grundbestimmungen, die wir an der Zeit nachwiesen, soweit sie rein mathematische sind, sich, einzig mit dem besagten begrifflichen Unterschied, beim Raume nochmals ergeben, während nicht umgekehrt alle Bestimmungen des Raumes sich zugleich auf die Zeit übertragen müssen. Nämlich es werden alle die Merkmale der Reihenordnung, die aus der Sonderung des Mannigfaltigen fließen, für Zeit und Raum gemeinsam gelten, alle die dagegen, die aus der Verbindung als solcher hervorgehen, den Raum allein angehen, oder auf die Zeit wenigstens nur durch eine Übertragung anwendbar sein, die immer als Übertragung bewußt bleibt. Das erstere gilt von den Gesetzen der Zahl bloß als eindimensionaler, einzig gerichteter Stellenordnung, das letztere von allem, was darüber hinausliegt.

Daher treffen alle für die Zeit oben festgestellten Merkmale: Einzigkeit, Unverrückbarkeit, Unendlichkeit, Homogeneïtät und Stetigkeit, ebenfalls zu auf das

Grundgebilde, auf dem alle Raumbeziehungen sich aufbauen: das eindimensionale räumliche Urgebilde, die gerade Linie.

Der Begriff des Geraden ist von uns im vorigen Kapitel festgelegt worden; als das radikal begründende Merkmal ergab sich die absolute Eindeutigkeit der Relation von Glied zu Glied in der Reihe. Diese Forderung wird von den Mathematikern im allgemeinen anerkannt. Besonders Veronese, der fast überall unter den lebenden Mathematikern das stärkste Gefühl für die Unerläßlichkeit rein logischer Grundlagen für die Aufstellung der Fundamentalgebilde der Mathematik beweist, stellt diese Forderung in bestimmter Fassung in seinem Begriff der „Grundform"; man möchte die Übersetzung „Grundgebilde" vorziehen. Darunter versteht er: diejenige „Form" (d. h. Einheit eines Mannigfaltigen, welche Ganzes und Teil, Ordnung und Art der Position enthält), welche zur Bestimmung aller anderen dient und eben darum als nur einzig angenommen werden muß. Als diese Grundform ergibt sich zunächst das „in der Lage seiner Teile identische System einer Dimension" [1]); dann, auf Grund der vollen Entwicklung der mathematischen Grundbegriffe, besonders der Einführung der Stetigkeit: das kontinuierliche, in der Lage seiner Teile identische System einer Dimension, welches durch die geringste Anzahl von Elementen bestimmt ist [2]). Durch eben diese Merkmale wird dann [3]) die Gerade definiert und als Axiom aufgestellt: es gibt diese Grundform.

Hiermit ist ihm indessen die Gerade wirklich nicht eindeutig bestimmt, wie es doch gefordert war. Das in der Lage seiner Teile identische System kann nämlich, wie man sich erinnert, offen oder geschlossen sein. Und so ist auch

---

1) Einl. § 71; vgl. oben S. 226 f. 2) § 122, Hyp. IX.
3) I. Teil, § 4, Def. I.

die Gerade jener Definition „einfach geschlossen oder offen". Der Unterschied ist der, daß das einfach geschlossene homogene System zwar auch durch zwei Punkte, nicht aber, wie das einfach offene, durch beliebige zwei seiner Punkte bestimmt ist. Die erstere Bestimmung aber, meint Veronese, sei deshalb wissenschaftlich vorzüglicher, weil sie eine kleinere Zahl von Erfordernissen enthalte und — die sphärische Geometrie nicht ausschließe. Aber so bleibt doch die Bedingung der Einzigkeit der Grundform unerfüllt. Das zirkuläre System ist durch zwei seiner Punkte überhaupt nur dann bestimmt, wenn ein bestimmtes Gesetz der Anordnung schon vorausgesetzt ist, für dessen Aufstellung zwei Punkte nicht genügen; sonst sind mit der bloßen Forderung, zwei gegebene Punkte zu enthalten, unendlich viele stetige und homogene, in der Lage ihrer Teile identische zirkuläre Systeme vereinbar. Ein einziges System ergibt sich nur dann, wenn die zwei Punkte allein als ausreichend gelten, eine denkbare Art der Positionsbeziehung vor allen anderen und als grundlegend für alle anderen auszuzeichnen; das aber geschieht allein durch den Begriff des Geraden in unserem bestimmteren Sinne, der diese Einzigkeit der Beziehungsart nicht nur mitbedeutet, sondern wesentlich bedeutet. Daß dieser Begriff des Geraden bestimmter ist (mehr einschließt) als der Veroneses, kann nicht gegen ihn entscheiden. Denn nicht überhaupt nur auf die Mindestzahl von Voraussetzungen kann es in dieser Frage ankommen, sondern allein darauf, welche Voraussetzungen notwendig und hinreichend sind, eine eindeutige Bestimmung zu ermöglichen. Die zirkuläre Anordnung aber läßt eben einen unendlichen Spielraum von Bestimmungsmöglichkeiten, sie taugt also nicht zur letzten Voraussetzung eindeutiger Bestimmung, da sie vielmehr selbst, wofern dieser Spielraum überhaupt bestimmt sein soll, wieder einer anderen Voraussetzung, als letzter, bedarf. Diese kann nur die Gerade im absoluten Sinne sein, welche die Identität der Richtung, als Richtungsverschiedenheit gleich Null, zugrunde legt aller Bestimmung irgendwelcher Richtungsverschiedenheit ungleich Null, und damit irgendwelcher möglichen, sei es homogenen oder nichthomogenen Richtungsänderung, durch die erst die zirkuläre Anordnung zu sicherem Begriff gebracht wird.

Der eigentliche Grund, der nicht nur Veronese, sondern die große Mehrzahl der Mathematiker zu der Meinung verleitet hat, daß man sich an diesen, im Aufbau der mathematischen Begriffe wirklich fundamentalen Begriff des (absolut) Geraden nicht zu binden brauche und nicht binden dürfe, ist wohl der, der sich bei Veronese in der „empirischen Bemerkung I" (S. 229 f.) ausspricht: „Wenn das System durch die Punktepaare, welche den Enden geradliniger in dem Bereich unserer Beobachtung gelegener Gegenstände entsprechen, bestimmt wird, so bedeutet dies nicht, daß es durch zwei beliebige seiner Punkte bestimmt wird. Denn mit Hilfe (auf Grund) der Anschauung oder Beobachtung kann man nicht behaupten, daß diese Eigenschaft auch für die Paare von Punkten des Systems gelte, von denen wenigstens einer einem nicht in dem Bereich unserer Beobachtung gelegenen Gegenstand entspricht." Die Frage sei also durch die Anschauung nicht zu entscheiden; abstrakt aber müsse man von Anfang an die Möglichkeit offen halten, daß zwei Punkte die Gerade nicht bestimmen. Das heißt: die Voraussetzung — und nicht etwa die Folge — jener Unbestimmtheit, die Veronese im Begriffe seiner „Grundform" bestehen läßt, ist keine mathematische, sondern die metaphysische des Empirismus und Realismus in Hinsicht des Raumes. Nach unseren, nicht metaphysischen, sondern logischen, d. h. methodischen Voraussetzungen, ist die Raumordnung ganz so wenig wie die Zeitordnung oder die Ordnung der Zahl ein „Gegenstand", der empirisch gegeben und durch Beobachtung festzustellen wäre, sondern es gelten für sie mit Notwendigkeit die Bestimmungen, die aus dem reinen Denken eines einzigen Systems der Ordnungsbestimmung fließen. Ausschließlich auf Grund der Forderungen dieses reinen Denkens, wenn schon unter der „Führung" der Anschauung, hat Veronese selbst sämtliche übrigen Grundvoraussetzungen seiner Geometrie aufgestellt; es erscheint daher vom logischen Standpunkt lediglich als Inkonsequenz, wenn er an diesem einzigen letzten Punkte die Entscheidung darin sucht, was durch Beobachtung feststellbar sei oder nicht. Beobachtung vermöchte wahrlich auch nicht die Veronesesche Stetigkeit zu begründen, und doch zögert er keinen Augenblick, sie seiner „Grundform" zuzuschreiben und sie damit wie durch einen Machtspruch auf alle räumlichen Konstruktionen auszudehnen, ohne die geringste Sorge um die mögliche oder nicht mögliche Bestätigung durch Beobachtung. Und doch würde die Auslassung dieser so viel einschließenden Bedingung seine Voraussetzungen sehr vereinfachen, gewiß auch neue Möglichkeiten sogenannter „Geometrien" eröffnen, die sicher auch irgendwelchen technischen Wert haben oder noch gewinnen könnten. Die Rücksicht auf die nichteuklidischen Geometrien dürfte übrigens in dieser Frage für Veronese um so weniger ausschlaggebend sein, da er selbst gar kein Bedenken trägt, durch seine Voraussetzungen über die Grundform das Lobatschefskijsche System von vornherein auszuschließen. Das Riemannsche System aber bleibt genau nur dann möglich, wenn die Gerade einfach geschlossen angenommen wird (285); und dieser Annahme gibt Veronese einzig darum den Vorzug, weil sie die beiden Fälle der euklidischen und der sphärischen Geometrie zusammenfaßt, die sphärische aber für das Studium der euklidischen gewisse Hilfen bietet; also nur aus einer technischen Rücksicht.

Eine solche kann für uns hier den Ausschlag nicht geben. Sondern uns müssen die Eigenschaften des Grundgebildes

des Raumes rein logisch aus den fundamentalen Voraussetzungen hervorgehen, die überhaupt nur eine streng einzige Gesetzesordnung des Miteinander möglich machen. Nun erwies sich schon bei der reinen Zahl und der Zeit die Positionsbeziehung als nicht minder reiner und eindeutiger Urbegriff einer gesetzlich bestimmten Ordnung wie die Maßbeziehung. Die große Mehrzahl der Mathematiker sieht die letztere als *a priori* bestimmbar an, weil die vollkommene Identität der Gesetze des Maßes mit denen der reinen Zahl nicht leicht übersehen werden konnte; das Messen ist geradezu ein Zählen. Die Positionsbeziehung dagegen hält man, wie es scheint, ebenso allgemein für abhängig von Beobachtung und Erfahrung, also *a priori* nicht eindeutig festgelegt, unter bloß logischem Gesichtspunkt also frei verfügbar. Wir behandeln beide streng auf gleicher Linie, nicht weil wir „Böotier" sind, die es nicht über sich bringen, von der mehr als 2000jährigen Tradition des Euklid, oder von dem sinnlichen Bilde der beiderseits ins Unendliche fortlaufenden Geraden, sich zu befreien; sondern weil für Richtung und Abstand, Positions- und Maßbeziehung die logischen Bedingungen völlig gleich liegen. Die Bestimmbarkeit von Abständen fordert einen Grundabstand, der folglich als einziger bestimmt sein muß durch das bloße Gegebensein zweier Punkte als Anfangs- und Endpunkt; nicht anders als die Bestimmbarkeit der Zahl eine eindeutig bestimmte Grundzahl, die Eins, erfordert, deren Maßwert als unverrückbar fest bestimmt angenommen werden muß bloß damit, daß die Endpunkte der Zahldistanz, die sie vertritt (0 und 1 als Endpunkte der Zahlstrecke $\overline{0\,1}$) bestimmt sind. Aber schon in dieser Grundrelation selbst, auf der alle Zahlbeziehung sich aufbaut, liegt zugleich und mit gleichem logischem Zwang die Einzigkeit der Positionsbeziehung zwischen denselben und überhaupt zwischen irgendwelchen zwei Punkten, deren Ausdruck im Zeichensystem der Mathematik das Plus und

Minus ist. Diese Einzigkeit der Positionsbeziehung also, behaupten wir, gilt eben damit notwendig auch für das Grundgebilde des Raumes, wie ebenfalls der Zeit. Denn alle Möglichkeit der Bestimmung von Position wird aufgehoben, wenn nicht eine Grundbeziehung der Position gesetzt wird, die als einzige bestimmt sei durch das bloße Gegebensein von zwei Bezugspunkten, ebenso wie alle Bestimmbarkeit der Distanz aufgehoben wird, wenn nicht eine Grunddistanz angenommen wird als einzig bestimmt durch das bloße Gegebensein zweier Endpunkte. Warum gerade zweier? Nicht weil zwei die wenigsten sind, wenn überhaupt eine Relation stattfinden soll, und diese Sparsamkeit in Voraussetzungen an sich ein unbedingter Vorzug wäre; allgemein nicht erst aus einem teleologischen Grunde; teleologische Erwägungen können keine Geltung beanspruchen vor den logischen; auch hat eine Minimumaufgabe in Hinsicht der Voraussetzungen der Geometrie erst einen Sinn, wenn wenigstens die letzten Voraussetzungen, die eine Geometrie überhaupt nur möglich machen, schon feststehen, nicht aber, wenn selbst nach den letzten ihrer Voraussetzungen erst die Frage ist. Sondern das allein kann hier entscheiden, daß eine gesetzmäßige und zwar einzige Ordnung verlangt ist, die aber sich allein aufbauen kann auf dem Prinzip des Fortbestandes immer derselben letzten Grundrelation. Diese muß durch zwei Elemente bestimmt gedacht werden, weil jede größere Anzahl von Elementen, um selbst ihrer Relation nach bestimmt zu sein, die durch zwei Elemente bestimmte Grundrelation voraussetzen würde. Darum ist es in letzter, grundlegender Betrachtung nicht angängig, die zirkuläre Anordnung zugrunde zu legen und dann die lineare etwa als deren Grenzfall (so wie die Euklidische Geometrie als Grenzfall der sphärischen) hinterherkommen zu lassen. Das läßt sich übrigens auch direkt einsehen: die zirkuläre Anordnung stellt die Forderung, Relationen *ab*, *ba* zugleich als einander wie

Plus und Minus entgegengerichtet (weil in *b* zusammenstoßend) und auch gleichgerichtet anzusehen. Das muß wohl überhaupt möglich sein, da sonst die zirkuläre Änderung überhaupt wegfiele; aber es ist nur als abgeleiteter Fall, unter Voraussetzung einer Richtungsänderung verständlich, als Urfall dagegen unverständlich, denn für diesen muß unter denselben Elementen die Positionsbeziehung (der Plus- und Minussinn) auf einzige, ausschließende Weise feststehen, weil, ehe von einer Mehrheit oder Änderung der Positionsbeziehung die Rede sein kann, der Einheits-, der Identitätssinn der Position feststehen muß.

Es wäre für die Verständigung über diese Frage schon viel gewonnen, wenn man sich allgemein davon überzeugen würde, daß doch der Begriff der Richtung ebenso wie der aller sonstigen Merkmale der Zahl und Größe der Bestimmung des reinen Denkens unterliegt; daß man also, um ihn auf bestimmte Weise aufstellen zu können, ja zu müssen, nicht auf besondere Erfahrungen oder eine denkfremde „reine Anschauung" zu warten hat, deren vermeinte Bezeugungen, um verstanden zu werden, doch die Grundbegriffe des reinen Denkens verlangen würden. Die Richtung ist so gut wie der Abstand ein reiner Denkbegriff; auch der Abstand könnte es nicht sein, ohne daß zugleich die Richtung es ist. Denn ein Abstand ist nur bestimmt, indem zugleich die Richtung bestimmt ist. Galt dies schon für die reine Zahl, so muß es erst recht für die Zeit und den Raum gelten. Setzt man, wie am auffälligsten Helmholtz [*74, 75*], an die Stelle des Begriffs des Geraden den des Kürzesten, so spricht man entweder nicht mehr vom Raume, sondern von Konstruktionen im Raum, wobei der Raum selbst schon vorausgesetzt werden müßte, oder man führt einen nicht bestimmten, ohne die Grundlage der Richtungsbestimmtheit überhaupt nicht bestimmbaren Begriff räumlicher Entfernung ein. Es gibt kein logisch gegründetes Urteil über Distanz ohne Voraussetzung der Richtungsbestimmtheit. Man versucht dann, sich eine Zahl ohne Richtung zu denken. Der Versuch muß mißlingen; Zahl ohne Richtung ist nach unseren Begriffen überhaupt nichts, vor allem nicht Größe; der Abstand aber soll Größe sein.

Das ist, solange man sich, von metaphysischen Skrupeln unbeirrt, allein an die Begriffe selbst hält, so klar, daß es gar nicht zu verstehen wäre, wie es hat übersehen werden können, wenn man nicht die Macht eben jener metaphysischen Vorurteile kennte, durch die allein diese Frage hat verwirrt werden können: der alten, schier unausrottbaren Vorurteile des Empirismus und Realismus. Man kommt nicht davon los, daß doch die Dinge an sich existieren und unsere Begriffe auf dem Wege der Erfahrung von ihnen abgelernt sein müßten. Wo es zumal, wie beim Raume, um die „Dinge außer uns" zu tun ist, erscheint es dem natürlichen Dogmatismus als etwas Ungeheuerliches, daß wir ihre Eigenschaften von uns aus voraus sollten festsetzen und gar die Gesetze unseres Denkens den Dingen selbst aufzwingen können. Aber ist es denn so schwer, sich klar zu machen, daß Existenz ein Begriff, das Existenzurteil ein Urteil ist wie jedes andere, daß folglich beide keinen anderen letzten Gesetzen unterstehen können als denen des Begriffs und des Urteils überhaupt, mit einem Worte, des Denkens? Hat denn schon jemand Existenz gesehen oder getastet? Ich weiß von ihr nur, daß sie ausgesagt wird; und wenn ich den Inhalt dieser Aussage nicht soll denken dürfen, so bleibt mir nichts als ein Schall ohne Sinn. Besonders irreleitend mußte hier das Beispiel so großer, zweifellos philosophisch gerichteter mathematischer Denker wie Gauß, Riemann und Helmholtz wirken, welche alle den Raum der Geometrie ganz und gar als ein Objekt der Physik ins Auge fassen, dessen Eigenschaften durch Experiment festgestellt werden müßten; ohne auch nur zu fragen, ob dies Experiment denn anders als im Raum, somit unter Voraussetzung eben der Grundeigenschaften des Raumes, die das

Experiment feststellen soll, ausführbar wäre. Aber die Wissenschaft ist doch auch über jene Großen hinausgeschritten. Wenigstens heute müßte endlich volle Klarheit darüber gewonnen sein, daß auf dem Wege des Experiments hier eine Entscheidung schlechthin ausgeschlossen ist, nachdem über und über bewiesen ist[1]), daß nach geeigneter Wahl der physikalischen Voraussetzungen jede physikalische Empirie mit jeder Geometrie in Einklang gebracht werden kann. Also muß die Wahl der Voraussetzungen für die Geometrie jedenfalls unabhängig von physikalischer Empirie getroffen werden. Ist aber das einmal klar, so muß man auch begreifen, daß der Raum, desgleichen die Zeit, ganz so wenig wie die Zahl eine gegebene Existenz, sondern vielmehr eine grundlegende Bedingung der Existenzbestimmung bedeutet, über deren Eigenschaften allein nach den Gesetzen des Denkens von Existenz zu entscheiden ist. Existenz nun bedeutet Einzigkeit der Bestimmung; diese überhaupt zu ermöglichen, war die erste Voraussetzung die einzige, allbefassende Zeit; die zweite ist der aus gleicher Notwendigkeit nur einzig und allbefassend zu denkende Raum. Wie nun die Eigenschaften der Zeit sich rein aus der Forderung einer einzigen, gesetzmäßig bestimmten Ordnung des Nacheinander ergaben, so müssen mit gleicher Notwendigkeit die Eigenschaften des Raumes hervorgehen aus den logischen Erfordernissen einer einzigen, gesetzmäßig bestimmten Ordnung des Miteinander. Diese Gleichheit der letzten Begründung erklärt die völlige Gleichartigkeit der logischen Gestalt des Grundgebildes des Raumes, der geraden Linie, mit dem der Zeit und der Zahl. Es bleibt nur übrig, auf derselben Grundlage die Gesetze

---

1) Es ist ein großes Verdienst von H. Poincaré (*147*, S. 54ff., 72, 82, 86 und durchweg), dies nachdrücklich ausgesprochen und hell beleuchtet zu haben. Nach ihm ist es „unmöglich, mit dem Empirismus in der Geometrie einen vernünftigen Sinn zu verbinden“ (81).

abzuleiten für das, was wir bisher bei Seite gelassen haben: die Richtungen und Dimensionen des Raumes.

§ 6. (*Der dreidimensionale Euklidische Raum.*) Aus den Untersuchungen des vorigen Kapitels ergab sich, daß die Mehrheit der Richtungen und Dimensionen kraft gedanklicher Notwendigkeit an sich besteht. Folglich ist sie auch für das Denken der Existenz, und zwar von dessen ersten Voraussetzungen an, zugrunde zu legen. Warum sie für die Zeit nicht, dagegen notwendig für den Raum besteht, dafür haben wir den logischen Grund bereits aufgewiesen: die Zeit entspricht, nach ihrer Urbedeutung der Auseinanderstellung, der nur einzig gerichteten Reihenordnung, also der bloßen Stellenzahl, der Raum, nach seiner Urbedeutung der Zusammenordnung, der Zahl in ihrer vollen Entfaltung, d. h. der komplexen Zahl. Also findet die Mehrheit der Richtungen und Dimensionen, es findet der Begriff der Richtungsverschiedenheit und Richtungsänderung (oder des Winkels) mit gleicher Notwendigkeit wie der der Größenverschiedenheit und Größenänderung auf den Raum Anwendung. Es handelt sich nur noch darum, das genaue Gesetz und die etwaige obere Grenze für die damit gegebene Erweiterung des Raumbegriffs festzusetzen.

Die Aufgabe ist, mit anderen Worten: zu zeigen, wie, nachdem durch irgendwelche zwei Elemente (0 und 1) eine einzige als Grundrichtung bestimmt ist, von dieser aus die Allheit der Richtungen im Raum und damit zugleich der räumlichen Dimensionen gegeben ist.

Nun scheint in abstrakter Erwägung der Fortgang ins Unendliche hier nicht ausgeschlossen werden zu dürfen. Die bloßen Begriffe der Richtung und Dimension setzen rein aus sich dem Fortgang eine obere Grenze nicht. Daher ist es verständlich, daß die Mathematik, sobald sie darüber hinauskam, an eine bestimmte Zahl von Dimensionen als die durch die Dinge allein gegebene und darum