



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

## **Universitätsbibliothek Paderborn**

### **Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften**

**Natorp, Paul**

**Leipzig [u.a.], 1910**

§ 7. Die Metaphysik der nichteuklidischen Räume. "Metageometrie"

**urn:nbn:de:hbz:466:1-35817**

Wissenschaft, daß sie vielmehr fast bei jedem ihrer Vertreter eine andere und nirgends in auch nur erträglicher Strenge begründet, sondern in der Regel bloß einfach behauptet ist. Gemeinsam ist diesen Behauptungen nur zweierlei: die im schlechten Sinne apriorische Voraussetzung des Empirismus und Realismus überhaupt, und, in seltsamem Kontrast dazu, die Behauptung von Möglichkeiten als realen, die aller empirischen Entscheidung ihrer Natur nach entzogen sind.

Einige kritische Bemerkungen über die Irrungen der Metaphysik der nichteuklidischen Räume mögen denn wohl hier am Platze sein.

§ 7. (*Die Metaphysik der nichteuklidischen Räume. „Metageometrie“.*) Es ist eine bei Mathematikern und Philosophen noch immer nicht selten begegnende Meinung, daß durch die nichteuklidische Geometrie Kants Apriorismus der Raumanschauung widerlegt, der Empirismus endgültig bewiesen sei. Ich habe zu Anfang gesagt, daß und weshalb ich in der apriorischen Raumanschauung Kants das letzte Wort in der Raumfrage nicht sehe. Aber durch das Faktum der nichteuklidischen Geometrie wäre sie nicht widerlegt. Wenn es des Beweises noch bedurfte, daß die Euklidische Vorstellung des Raumes eine absolute Denknötwendigkeit nicht ist, so ist dieser Beweis durch die Aufzeigung und den Ausbau widerspruchloser, also denkmöglicher nichteuklidischer Raumsysteme freilich erbracht. Aber so wichtig dieser Beweis sonst sein mag, für Kant bedurfte es seiner nicht, da eben der Satz, daß der Euklidische Raum eine absolute Denknötwendigkeit nicht sei, eine der wesentlichen Voraussetzungen seiner These ist, daß er eine dem Menschen eigentümliche, für andere denkende Wesen vielleicht nicht bestehende Anschauungsnotwendigkeit sei. Daß wir aber die nichteuklidischen Räume uns sogar zur Anschauung zu bringen vermöchten, hat zwar Helmholtz beweisen

wollen, aber dieser Beweis — der mit der Mathematik der nichteuklidischen Räume nichts zu tun hat, vielmehr eine rein psychologisch-physiologische Frage betrifft — ist heute wohl allgemein als mißglückt erkannt und dürfte kaum noch ernstliche Verteidigung finden. Die „Anschauung“ sphärischer und pseudosphärischer Räume, die uns Helmholtz hat verschaffen wollen, ist ganz ersichtlich nichts als eine „Abbildung“ oder Projektion derselben auf den Euklidischen Raum; und dasselbe gilt ausnahmslos von allen Veranschaulichungen nichteuklidischer Räume, die je versucht worden sind oder versucht werden konnten. Daß solche „Abbildungen“ möglich sind, hat die große Bedeutung, daß die Gesetze der nichteuklidischen Geometrien einen Wert und eine unzweifelhafte Anwendbarkeit besitzen für viele komplexere Probleme des Euklidischen Raumes; wie besonders schön und vielseitig Wellstein [181] gezeigt hat. Damit gewinnt die nichteuklidische Mathematik, rein als solche, ohne Zweifel eine hohe und sehr reelle Bedeutung. Nur sind ihre Grundgebilde dann etwas gänzlich anderes, als man sonst unter Punkten, Geraden, Ebenen verstanden hat; es können irgendwelche räumlichen Gebilde von beliebig hoher Komplexion sein, unter denen nur (vollständig oder teilweise) dieselben Beziehungen nochmals gelten wie unter den Punkten, Geraden, Ebenen, für die sie ursprünglich aufgestellt wurden. Es ist technisch zweifellos von sehr großer Bedeutung, daß auf solche Weise die ganze Geometrie auf höheren Stufen nochmals und noch unendlich vielmals gilt. Aber es sind durchaus nur komplexere Gebilde des Euklidischen Raumes, von denen sie gilt, nicht solche einer überhaupt anders gearteten Räumlichkeit. Als alleinige für uns anschauliche Raumordnung ließe sich darum nicht minder die Euklidische festhalten. Also mit dem Sachbestand der Geometrie, nicht bloß, wie er zu seiner Zeit vorlag, sondern auch, wie er heute bekannt ist, wäre Kants These an sich nicht unvereinbar.

Unhaltbar ist diese These, in der soeben ausgesprochenen, übrigens noch aus seiner vorkritischen Zeit (der Dissertation von 1770) stammenden Fassung, vielmehr gerade zufolge der berichtigten Grundsätze der von demselben Kant geschaffenen transzendentalen Methode. Daß der Raum nur die „subjektive Bedingung der Sinnlichkeit“ sei, „unter der allein uns äußere Anschauung möglich“ ist; daß er an der besonderen „Beschaffenheit unserer Sinnlichkeit“, an der „Rezeptivität des Subjekts, von Gegenständen affiziert zu werden“ hänge, somit „*a priori* im Gemüte gegeben“ sei; daß man daher „nur aus dem Standpunkte eines Menschen“ von diesem Raume reden könne, während wir „von den Anschauungen anderer denkender Wesen gar nicht urteilen können, ob sie an die nämlichen Bedingungen gebunden seien“<sup>1)</sup>, sind Thesen, die auf dem Wege transzendentaler Begründung nicht nur nicht erwiesen oder je erweislich, sondern dem reinen Sinne der transzendentalen Methode geradezu widersprechend sind, indem die Bedingungen zur Möglichkeit wissenschaftlicher Erfahrung (Mathematik und mathematischer Naturwissenschaft) nicht in dieser selbst, als tatsächlich in ihr wirkend und zugrunde liegend aufgewiesen, in rein inhaltlichen Bestimmungen festgelegt und auf ihre letzten, nicht minder rein inhaltlichen Voraussetzungen reduziert, sondern gleichsam hinter der Erfahrung, in der eigenartigen Beschaffenheit eines erst wie außer der Welt stehend, dann in sie eintretend gedachten „Subjekts“ unserer Anschauungen gesucht werden. Auch als bloß psychologische Hypothese wäre eine solche Aufstellung nicht brauchbar; während die allgemeine Voraussetzung der Ursprünglichkeit der Raumvorstellung überhaupt sich allerdings auch psychologisch wohl bewährt.

Dagegen bleiben die begründenden Sätze nach unseren methodischen Voraussetzungen in voller Kraft: 1. Der

1) Kr. d. r. V. § 3. „Schlüsse aus den obigen Begriffen“, b.

Raum ist „kein empirischer Begriff, der von äußeren Erfahrungen abgezogen“, „aus den Verhältnissen der äußeren Erscheinungen durch Erfahrung erborgt“ wird, sondern „diese äußere Erfahrung ist selbst nur durch gedachte Vorstellung allererst möglich“; 2. er ist „kein diskursiver . . . Begriff von Verhältnissen der Dinge überhaupt“, sondern eine „wesentlich einige“ Vorstellung und in diesem, rein objektiv bestimmten Sinne ursprüngliche „Anschauung“; und 3. die Sätze von ihm haben nicht bloß „komparative Allgemeinheit“ durch Induktion, sondern besitzen eine strenge, obwohl nicht analytisch, nach dem Satze des Widerspruchs zu begründende, sondern synthetische Notwendigkeit — deren transzendenten Grund aufzuweisen aber nun erst die Aufgabe ist; eine Aufgabe, die durch alle diese wenn noch so richtigen tatsächlichen Festsetzungen erst gestellt, nicht gelöst ist.

Die Lösung, die wir fanden, bestätigt Kants Auffassung insoweit, als auch nach unserem Ergebnis der Euklidische Raum weder eine absolute Denknötwendigkeit noch eine reine Erfahrungstatsache, oder etwa eine Hypothese ist, deren Wahrheit oder Unwahrheit der Entscheidung der Erfahrung unterläge; sondern eine „notwendige“ Voraussetzung in dem bestimmten Sinne, daß er bedingend ist für „mögliche Erfahrung“, bestimmter: für die eindeutige gesetzmäßige Bestimmbarkeit von Existenz in der Erfahrung. Er beruht also nicht auf einer Notwendigkeit des Denkens überhaupt, wohl aber des Erfahrungsdenkens, des Denkens von Existenz. Das Unterscheidende liegt in dem Hinzutritt der Bedingung der Einzigkeit, nicht irgendwelcher besonderer räumlicher Bestimmungen, sondern des Zusammenhanges aller der Bestimmungen, die mitsammen die Koexistenz der Dinge gesetzmäßig darstellbar machen. Sofern in Kants Begriff der „Anschauung“ oder Gegebenheit diese Forderung der Einzigkeit der Bestimmung wesentlich zugrunde lag, bleibt auch richtig, daß der Euklidische

Raum eine notwendige Bedingung nicht des (allgemeinen, diskursiven) Denkens, sondern der „Anschauung“ sei. Aber die Forderung der Einzigkeit ist selbst eine Forderung des Denkens, nur eben nicht des Denkens überhaupt, sondern des bestimmtesten Denkens, des Denkens der Existenz, welches beruht auf dem Zusammentritt aller in besonderen Richtungen des Denkens waltenden Grundgesetzlichkeiten, die je für sich nur für einen besonderen Bereich von Denkgegenständen, nicht aber, ohne die anderen, für den Gesamtgegenstand des Denkens die zureichenden Voraussetzungen bieten. So bleiben wesentliche, man darf vielleicht sagen, die wesentlichen Züge der Kantischen Lehre bestehen; aber jene ursprüngliche — wie gesagt, noch aus der Zeit vor der Entdeckung der transzendentalen Methode stammende, nachher von Kant nicht genügend dieser gemäß nachgeprüfte und berichtigte — Formulierung derselben ist ohne künstliche Umdeutung nicht haltbar, wird also besser ganz aufgegeben.

Dagegen ist die dieser gegenüberstehende These des Empirismus und Realismus nicht etwa ein bewiesenes Ergebnis der nichteuklidischen Raumtheorien, sondern eine Voraussetzung — nicht dieser mathematischen Theorien, sondern einiger der Forscher, die diese Theorien begründet haben. Sie konnten es nicht wohl vermeiden, sich auch über die Metaphysik des Raumes Gedanken zu machen, und diese Gedanken bewegten sich zunächst in der Richtung des Empirismus. Nicht das ist sehr zu verwundern; eher das andere: daß man gerade mit den Argumenten den nur empirischen Charakter der Euklidischen Raumvorstellung hat begründen wollen, aus denen in Wahrheit das Gegenteil folgt. Sollten unsere Begriffe vom Raum nur empirisch sein, so müßten sie nicht bloß aus der Erfahrung uns erwachsen, sondern durch Erfahrung zu bestätigen oder zu widerlegen sein. Nun ist zwar „daran gar kein Zweifel“, daß diese, wie überhaupt alle unsere theoretischen Grund-

begriffe allein in der Erfahrung ihren Gebrauch haben und allein durch diesen Gebrauch sich in uns haben entwickeln und zu bestimmtem, gesichertem Bewußtsein erheben können. Aber das gilt ebenso von den letzten Voraussetzungen der Arithmetik und selbst der allgemeinen Logik, die man doch darum nicht für bloß empirisch ansehen kann. Ihre Gültigkeit kann offenbar nicht von der Erfahrung abhängen, weil die Erfahrung, die sie beweisen oder widerlegen sollte, selbst ohne sie nicht möglich wäre. Es fragt sich aber, ob nicht ebendies auch von der Gesetzlichkeit der Raumordnung gilt.

Wie sollte über die Euklidische oder nichteuklidische „Beschaffenheit“ des Raumes unserer Erfahrung — diese Erfahrung selbst entscheiden? Die Erfahrungen, welche diese Entscheidung erbringen sollten, könnten doch nur empirische Messungen im Raume sein. Solche aber fußen unvermeidlich auf Voraussetzungen physikalischer, also selbst empirischer Art, wie Starrheit der Körper, Geradheit der Trägheitsbahnen derselben sowie der Bahnen der Lichtfortpflanzung. Aber diese Voraussetzungen setzen schon ihrerseits eine bestimmte Geometrie, in ihrer gewöhnlichen Fassung die Euklidische voraus; wie sollten also solche Messungen entscheiden können über die Gültigkeit einer Geometrie, die ihre eigene Voraussetzung ist? — Man denkt sich, es sei dies in der Weise möglich, daß die Voraussetzungen der Euklidischen Geometrie, weil selbst aus unserer gewöhnlichen physikalischen Empirie geschöpft, im Bereiche der gewöhnlichen physikalischen Empirie zwar sich bewähren, über gewisse Grenzen hinaus aber, namentlich auf sehr große räumliche und zeitliche Entfernungen sich nicht mehr richtig erweisen könnten, indem, wenn wir sie auch da noch unserer Theorie der Erscheinungen zugrunde legen würden, Widersprüche oder wenigstens Unzuträglichkeiten zutage treten würden. In der Tat ist der Fall zwar bisher nicht eingetreten, aber an sich wohl denk-

bar, daß z. B. auf Fixsternweiten die Winkelsumme in Dreiecken, die unter den sonst geltenden Voraussetzungen gemessen würden, sich ungleich zwei Rechten fände. Aber es wären dann doch nicht die Eigenschaften des Raumes, welche die Messung festgestellt hätten, sondern die Eigenschaften physikalischer Körper oder ihre Bewegungen. Also wären nach den Ergebnissen solcher Messungen nicht die Voraussetzungen über die Raumesetze zu ändern, sondern es wäre das einzig richtige Vorgehen, vielmehr über die Bewegungen der physikalischen Körper andere Aufstellungen als die bisherigen zu machen. Und zwar würde man, da wiederum die Gesetze der Mechanik fundamentaler sind als die der Optik, am ehesten die optischen Voraussetzungen zu ändern, etwa die Lichtfortpflanzung als nur annähernd, nicht exakt geradlinig anzunehmen haben. In jedem Fall würde durch geeignete physikalische Annahmen das Ergebnis der Messung sich mit den Voraussetzungen der Euklidischen Geometrie in Einklang bringen lassen.

Allerdings ist auch der Fall denkbar, daß gewisse durchgängig nach bestimmtem Gesetz von den bisherigen Annahmen abweichende physikalische Beziehungen sich am bequemsten durch Modifikation der geometrischen Voraussetzungen repräsentieren ließen. In der Macht der Rechnung liegt das eine wie das andere, und wenn der letztere Weg irgendwelche technischen Vorteile bietet, so wäre es ja töricht, ihn nicht zu benutzen. Aber über eine „wirklich“ nichteuklidische Beschaffenheit des Raumes wäre dadurch dennoch nicht entschieden. Durch bloßes Umrechnen kann einmal über Wirklichkeiten nichts ausgemacht werden. Über Wirklichkeit entscheidet Beobachtung und Experiment; aber der reine Raum der Geometrie ist eben keine Wirklichkeit, an die Beobachtung und Experiment überhaupt herankönnten. Er selbst unterliegt nicht empirischer Messung; er ist für jede Art empirischer Bestimmung schlechterdings unfind-

bar<sup>1)</sup>, ein echtes Demokritëisches  $\mu\eta\ \delta\upsilon$ . Aber er ist nur um so mehr eine reine Denkgrundlegung, welche selbst erst Beobachtung und Experiment an ihrem Teile möglich macht, Voraussetzungen dafür schafft, die eben darum selbst nicht der Bestätigung oder Widerlegung durch Beobachtung und Experiment unterliegen können. In eben dieser seiner Funktion muß der Raum selbst nicht bloß überhaupt gesetzmäßig, sondern in dieser Gesetzmäßigkeit auch schlechthin eindeutig konstruiert werden; dieser Forderung aber genügen, wie gezeigt, nicht die Bestimmungen nichteuklidischer Räume, die zuletzt alles in unendlicher Unbestimmtheit zurücklassen würden, sondern ihr genügt allein, eben kraft seines Einzigkeitscharakters, der Euklidische Raum.<sup>2)</sup>

Vermag man von dem selbständigen Gesetzescharakter des Raumes sich auch etwa nicht aus allgemeinen, erkenntniskritischen Gründen zu überzeugen, doch müßte man zugeben, daß eine Entscheidung über die Raumgesetze durch Erfahrung aus dem eben besagten allgemeinen Grunde von Haus aus unmöglich ist: weil an sich jede physikalische Empirie mit jeder Geometrie durch geeignete Voraussetzungen rechnerisch in Einklang gebracht werden kann. Ist dem aber so, so muß hier entweder für immer alles unentschieden bleiben (wobei vielleicht die Mathematik, nicht

1) Vgl. Poincaré, [147] 86: „Die Experimente beziehen sich nicht auf den Raum, sondern auf die Körper.“ Vgl. oben S. 302, Anm. 1.

2) Dies ist neuerlich wieder durch M. C. Mott-Smith ([121], S. 189 u. ö.) betont worden. (Einiges in gleicher Richtung auch bei Russell [153] 78, 88; vgl. [128] 374.) Ich stimme mit Mott-Smith in der Kritik der Metaphysik der nichteuklidischen Geometrien vielfach überein und finde auch in seiner positiven (auf Kroman gestützten) Deutung Richtiges. Nur bleibt daneben die unhaltbare Hypothese einer auf besonderer subjektiver Organisation beruhenden „Zwangsläufigkeit“ unserer Anschauung (nach einem Ausdruck Wellsteins, [181] 143) als müßige und störende Annahme stehen.

aber Physik und Philosophie sich beruhigen könnten), oder die Entscheidung muß irgendwie nach Gründen *a priori* getroffen werden.

Und hier greift nun die sehr alte Beobachtung ein, daß es empirische Daten, welche die geometrischen Grundgebilde: Punkt, Gerade, Ebene adäquat darstellten, ein für allemal nicht gibt noch geben könnte. Man braucht gar nicht dem zu widersprechen, daß diese Begriffe dennoch aus empirischen Gegebenheiten durch einen Prozeß idealisierender Abstraktion herausgearbeitet sind; wie namentlich Benno Erdmann zu zeigen versucht und unter den Mathematikern der nichteuklidischen Geometrie Felix Klein als seine Ansicht ausgesprochen hat. Aber idealisierende Abstraktion ist nicht Induktion; die Korrektur der Erfahrung, die sie einschließt, würde in induktiver Wissenschaft schlechterdings unzulässig sein.<sup>1)</sup> Bei den alten Ägyptern war die Geometrie eine induktive Wissenschaft; aber sie war in wesentlichen Stücken falsch. Den Grund zur Geometrie als Wissenschaft haben die Griechen gelegt, indem sie den induktiven Weg bewußt verließen und ihre Begründung in reiner Deduktion suchten. Daß sie dabei gerade die „Euklidischen“ Voraussetzungen zugrunde legten, war, so wenig sie einen Beweis für die alleinige Zulässigkeit dieser Voraussetzungen zu führen auch nur versucht haben und so wenig dieser Beweis überhaupt geführt werden kann, dennoch nicht bloße Willkür. Sondern sie haben in der Sicherheit ihres wissenschaftlichen Instinkts genau die Voraussetzungen getroffen, die eine eindeutige Raumbestimmung allein möglich machen. Sie wußten ganz wohl, daß die Gleichheit, Geradheit usw. ihrer Voraussetzungen durch Erfahrung nicht gegeben war noch je gegeben werden konnte, daß es sich dabei vielmehr um echte und rechte Platonische „Ideen“ handelte, nach denen vielmehr Erfahrung sich

1) Auch dies betont mit Recht Mott-Smith.

richten muß, als sie nach der Erfahrung. Man bezeichnet sie jetzt oft als „Grenzbegriffe“<sup>1)</sup>; z. B. der Punkt ist die Grenze der ins Unendliche abnehmenden Distanz. Aber diese Grenzen sind ebensowenig in Erfahrung gegeben wie Cantors Überendliches oder Veroneses aktuell Unendlichkleines. Solche Begriffe an die Stelle der empirischen Daten setzen und diese vielmehr ihnen unterwerfen, ist das volle Gegenteil davon, diese Begriffe aus der Erfahrung zu entnehmen, sie nach Erfahrung zu richten. Kant war also ganz im Rechte, wenn er behauptete, daß die Geometrie auf Voraussetzungen faktisch fuße und zu fußen gar nicht umhin könne, die nicht durch Erfahrung gegeben sind, sondern ihr vielmehr zugrunde gelegt werden müssen, indem sie es sind, welche eine Erfahrung als Wissenschaft überhaupt nur möglich machen. Nur, wie und in welchem Sinne sie sie „allererst möglich machen“, bedurfte einer strengeren Bestimmung, als Kant sie gegeben hat; für welche strengere Bestimmung übrigens, wie wir gesehen haben, fast alle Voraussetzungen bei Kant selbst mehr oder weniger bestimmt vorliegen.

§ 8. (*Josef Wellstein über die Grundlagen der Geometrie.*) Wenn wir aussprachen, daß an sich jede physikalische Empirie mit jeder Geometrie durch geeignete Grundannahmen in Einklang gebracht werden könne, so ist damit anerkannt, daß, abstrakt logisch und rechnerisch angesehen, nicht die Euklidische Geometrie die einzige ist, mit der eine Naturwissenschaft sich widerspruchlos aufbauen läßt.

Im letzteren Sinne hatte Kants These Wellstein sich gedeutet, dessen anregungsreiche Darlegung (1871, bes. S. 129 ff.) schon darum unsere Beachtung fordert, weil sie sich tiefer, als es von Mathematikern sonst zu geschehen pflegt, in die Untersuchung auch der philosophischen Seite

1) So Max Simon z. B. [1862], S. 21, mit öfterer Berufung auf B. Kerry [92].