

UNIVERSITÄT PADERBORN

DISSERTATION

---

**Nichtlineare optische Eigenschaften  
und spontane Musterbildung in  
Halbleitermikrokavitäten**

---

*Autor:* Przemyslaw Lewandowski

*Betreuer:* Jun.-Prof. Dr. Stefan Schumacher

Theoretische Optoelektronik und Photonik  
Department Physik

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades  
der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.).  
Dem Department Physik der Fakultät für  
Naturwissenschaften der Universität Paderborn  
vorgelegt von Przemyslaw Lewandowski

Paderborn, den 16. Dezember 2015



## Erklärung der Eigenständigkeit

Hiermit erkläre ich, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst habe und keinerlei unerlaubte Hilfsmittel verwendet habe. Zitate sowie Beiträge anderer Forscher habe ich deutlich gekennzeichnet.

Paderborn, den 16. Dezember 2015

---

Przemyslaw Lewandowski

## Promotionskommission

*Vorsitzender:* Prof. Dr. Cedrik Meier

*Erster Gutachter:* Jun.-Prof. Dr. Stefan Schumacher

*Zweiter Gutachter:* Prof. Dr. Torsten Meier

*Beisitzer:* Dr. Uwe Gerstmann

Eingereicht am 16. Dezember 2015



## Kurzfassung

Mit der Entwicklung moderner Epitaxieverfahren haben hochqualitative, planare Halbleitermikrokavitäten ein breites Anwendungsgebiet in der nichtlinearen Optik erschlossen. Die in diesen Strukturen anregbaren Exziton-Polaritonen, halb photonische, halb exzitonische Quasiteilchen, zeichnet eine starke Nichtlinearität sowie eine lange Kohärenzdauer aus. Die Möglichkeit, ihre Parameter nach Bedarf maßschneidern zu können, macht sie darüber hinaus zu einem Kandidaten für eine Integration in optoelektronische Anwendungen. Zu diesem Zweck ist allerdings ein detailliertes Verständnis ihrer komplexen Wechselwirkungen und Dynamik erforderlich.

Die vorliegende Dissertation behandelt eine Vielzahl linearer und nichtlinearer optischer Effekte, die in einem System kohärenter Polaritonen auftreten können. Basierend auf einer mikroskopischen Halbleitertheorie, werden im Rahmen dieser Arbeit zwei qualitativ unterschiedliche Anregungsfälle modelliert und untersucht. Unsere Theorie wird dabei gestützt durch die Ergebnisse verschiedener experimentell-theoretischer Kollaborationen [1-3].

Im ersten Anregungsfall - einer beinahe resonanten und kohärenten Anregung - untersuchen wir insbesondere stimulierte, phasenangepasste Streuprozesse, die oberhalb einer kritischen Dichte zu einem spontanen Anwachsen nichtaxialer Felder führen können. Einhergehend mit einem Symmetriebruch des Systems kommt es durch eine Wechselwirkung dieser nichtaxialen Moden zur Bildung transversaler, optischer Muster [1, 4]. Insbesondere für eine linear polarisierte Anregung präsentieren wir interessante polarisationsabhängige Effekte, die über die Behandlung in einem skalaren Feld hinausgehen. Wir zeigen, dass der Polarisationsfreiheitsgrad auch einen entscheidenden Einfluss auf die Musterbildung hat, wie u.a. das Auftreten einer räumlichen Orientierungsrichtung senkrecht zur Polarisationsebene und ihrer so möglichen, rein optischen Kontrolle.

Im zweiten hier behandelten Anregungsfall - einer stark verstimmtten Anregung - bildet sich ein kohärentes Polaritonkondensat indirekt über ein inkohärentes Exzitonreservoir. Obgleich diese Anregungsart weniger Feinabstimmung bedarf, ist ein offensichtlicher Nachteil der Verlust der Phaseninformationen (Frequenz und Impuls) des anregenden Lichts. Für ein skalares Feld zeigen wir, dass es durch die räumliche Verteilung der Anregungsgeometrie trotzdem möglich ist, so entstehende Kondensate rein optisch zu steuern, da die inkohärenten Exzitonen nicht nur als Quelle, sondern auch als ein abstoßendes Potential fungieren. Durch geeignete Anregungsgeometrien lässt sich so z.B. ein Kondensatfluss erzeugen, der mit Hilfe weiterer Potentiallandschaften rein optisch manipuliert werden kann [3]. Die simultane, potentiell kaskadenartige Verstärkung dieses Flusses macht dieses System zu einem vielversprechenden Kandidaten für rein optische Schaltkreise.



## Abstract

Accompanied by modern epitaxy methods, high-quality semiconductor-microcavities provide a wide range of applications in nonlinear optics. Exciton-polaritons excited in these structures - half-photonic, half-excitonic quasiparticles - are distinguished by a strong nonlinearity and coherence on a long time scale. Furthermore, the possibility of tailoring the parameters for specific purposes makes them a candidate for opto-electronic devices. To this end, a detailed comprehension of their non-trivial interactions and dynamics is required.

This dissertation deals with a variety of linear- and non-linear optical effects, which can arise in a system of coherent polaritons. Here, two qualitatively different kinds of excitation are modelled and investigated based on a microscopic semiconductor-theory. Our theory is proven by results of various experimental-theoretical collaborations [1–3].

In the first case of excitation - an almost resonant and coherent excitation - we deal in particular with stimulated, phase-conjugated scattering-processes, which give rise to a spontaneous growth of off-axis fields above a certain density-threshold. Accompanied by spontaneous symmetry breaking, a formation of optical patterns [1, 4] arises as consequence of interaction between these off-axis modes. In particular for a linearly polarized excitation we present interesting polarization-dependent effects, which are beyond the scope of the description of a scalar field. We show that the polarization degree of freedom has a crucial influence on the pattern formation, as among others a spatial orientation perpendicular to the polarization-plane, allowing an all-optical control of these patterns.

The second case of excitation presented here is a distinct off-resonant excitation: Here, a coherent polariton condensate arises indirectly driven by an incoherent exciton-reservoir. Despite this kind of excitation requires less fine-tuning, an obvious disadvantage is the loss of the phase-information (i.e. frequency and momentum) of the exciting light. For a scalar field, we demonstrate that it is still possible to control such condensates all-optically, since the incoherent excitons do not only provide a gain-medium, but a repulsive potential, too. Using suitable spatial excitation geometries allows for example to direct a condensate flow, which can be controlled all-optically once more with further potential landscapes [3]. The simultaneous, potentially cascable amplification of this flow makes this system a promising candidate for all-optical circuits.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Nichtlineare optische Eigenschaften und spontane Musterbildung in einem skalaren Polaritonfeld</b>	<b>5</b>
2.1	Theoretische Grundlagen zur Untersuchung von Exziton-Polaritonen . . . . .	6
2.2	Lineare Polariton-Optik . . . . .	10
2.3	Nichtlineare Polariton-Optik und Vierwellenmischen . . . . .	12
2.3.1	Die Gross-Pitaevskii-Gleichung . . . . .	13
2.3.2	Nichtlineare Abhängigkeit der stationären Polaritondichte . . . . .	13
2.3.3	Entartetes Vierwellenmischen . . . . .	15
2.3.4	Nichtentartetes Vierwellenmischen . . . . .	17
2.3.5	Quadratisches Vierwellenmischen als optisches UND-Gatter . . . . .	23
2.4	Lineare Stabilitätsanalyse (LSA) . . . . .	23
2.4.1	LSA anhand der Gross-Pitaevskii-Gleichung . . . . .	24
2.4.2	LSA für die gekoppelten Bewegungsgleichungen . . . . .	26
2.4.3	Bistabilität . . . . .	29
2.5	Nichtaxiale Instabilität und Musterbildung . . . . .	29
2.5.1	Störstellen und resonante Rayleigh-Streuung . . . . .	30
2.5.2	Musterbildung als Folge optischer Instabilität . . . . .	31
2.5.3	Instabilität des Musters und Übergang in den oberen Ast der S-Kurve . . . . .	33
2.6	Zusammenfassung . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Nichtlineare optische Eigenschaften und spontane Musterbildung in einem Polariton-Spinorfeld</b>	<b>37</b>
3.1	Theorie polarisationsabhängiger Polaritonen . . . . .	38
3.2	Musterbildung in einem zirkular polarisierten Polaritonfeld . . . . .	41
3.3	Lineare Optik und optischer Spin-Hall-Effekt . . . . .	42
3.4	Vierwellenmischen in einem Polariton-Spinorfeld . . . . .	46
3.4.1	Die Polarisationsabhängige Gross-Pitaevskii-Gleichung . . . . .	47
3.4.2	Entartetes und nichtentartetes Vierwellenmischen . . . . .	47
3.5	Lineare Stabilitätsanalyse im Spinorfeld . . . . .	51
3.5.1	LSA mit der polarisationsabhängigen GPE . . . . .	54
3.6	Musterbildung in einem linear polarisierten Spinorfeld . . . . .	55
3.6.1	Musterbildung ohne TE-TM-Aufspaltung . . . . .	56
3.6.2	Musterbildung mit TE-TM-Aufspaltung . . . . .	58

3.7	Experimente zu Vierwellenmischen und Musterbildung . . . . .	61
3.7.1	Doppelkavitäten . . . . .	62
3.7.2	Entartetes Vierwellenmischen im Experiment . . . . .	63
3.7.3	Quadratisches Vierwellenmischen im Experiment . . . . .	66
3.7.4	Musterbildung in Experiment und Theorie . . . . .	67
3.7.5	Rotation des Musters durch Rotation der Polarisationssebene . . .	69
3.7.6	Phasenübergänge infolge externer Anisotropie . . . . .	70
3.7.7	Schaltprozesse . . . . .	72
3.8	Zusammenfassung . . . . .	73
<b>4</b>	<b>Rein optisches Steuern von Polaritonkondensaten unter stark verstimmter Anregung</b>	<b>75</b>
4.1	Bose-Einstein-Kondensation von Polaritonen . . . . .	75
4.2	Rein optisches Einfangen und Steuern von Polaritonkondensaten . . . . .	79
4.3	Dynamik der Polaritonkondensation in rein optischen Fallen . . . . .	84
4.4	Interferenzeffekte kohärenter Polaritonen . . . . .	86
4.5	Streuung von Polaritonkondensaten an Potentialhindernissen . . . . .	87
4.6	Zusammenfassung . . . . .	90
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>91</b>
<b>A</b>	<b>Details zur Analyse</b>	<b>95</b>
A.1	Herleitung der Gross-Pitaevskii-Gleichung . . . . .	95
A.2	Auftreten einer S-Kurve infolge kubischer Nichtlinearität . . . . .	96
A.3	Herleitung der LSA . . . . .	96
<b>B</b>	<b>Numerische Details</b>	<b>99</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>101</b>
<b>C</b>	<b>Danksagung</b>	<b>111</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Die Erfindung des Lasers leitete 1960 das Zeitalter der nichtlinearen Optik ein. Mit starken optischen Feldern lassen sich seither Effekte in einer Vielzahl nichtlinearer Medien untersuchen, die über das ledigliche “Abtasten” des Materials durch eine schwache Anregung hinausgehen [5]. So wurden über die vergangenen Jahrzehnte auch die nichtlinearen optischen Eigenschaften von auf Halbleiterheterostrukturen basierenden Quantenfilmen (“quantum wells”, QWs) intensiv erforscht [6], die aufgrund vieler Anwendungsmöglichkeiten, z.B. in Diodenlasern [7], aus dem Alltag nicht mehr wegzudenken sind. Die Licht-Materie-Wechselwirkung in nichtlinearen Medien ermöglicht prinzipiell auch die Realisierung rein optischer Schalter, wie bereits 2005 in einem Gas aus Rubidiumatomen gezeigt werden konnte [8]. Eine starke Nichtlinearität und die mechanischen Vorteile eines QW warfen die Frage auf, ob sich diese Strukturen nicht auch als passives Medium für die Realisierung rein optischer Schalter eignen könnten [9, 10]. Die Licht-Materie-Wechselwirkung in einem QW erfolgt bei Anregungsenergien nahe der Bandlücke maßgeblich durch die Anregung von Wannier-Mott-Exzitonen. Jedoch führt bei resonant angeregten Exzitonen eine hohe Dichte zu einer anregungsinduzierten Dephasierung (“excitation induced dephasing”, EID) und somit zu einem Verlust der Kohärenz, die für den oben genannten Zweck jedoch benötigt wird.

Eine Lösung dieses Problems bietet eine Einbettung der QWs in planare Mikrokavitäten: Die Kopplung der Exzitonen an die Photonen führt zur Bildung neuer Quasiteilchen, den Exziton-Polaritonen. Diese können spektral deutlich unterhalb des Exzitonenbandes angeregt werden, wodurch die EID im Vergleich zu einem QW ohne Kavität deutlich reduziert wird [11, 12], was Kohärenz auf einer langen Zeitskala ermöglicht. Bestehend aus einem photonischen und exzitonischen Anteil, erfolgt die Anregung und die Detektion der Polaritonen rein optisch über die photonische Komponente, während die nichtlinearen

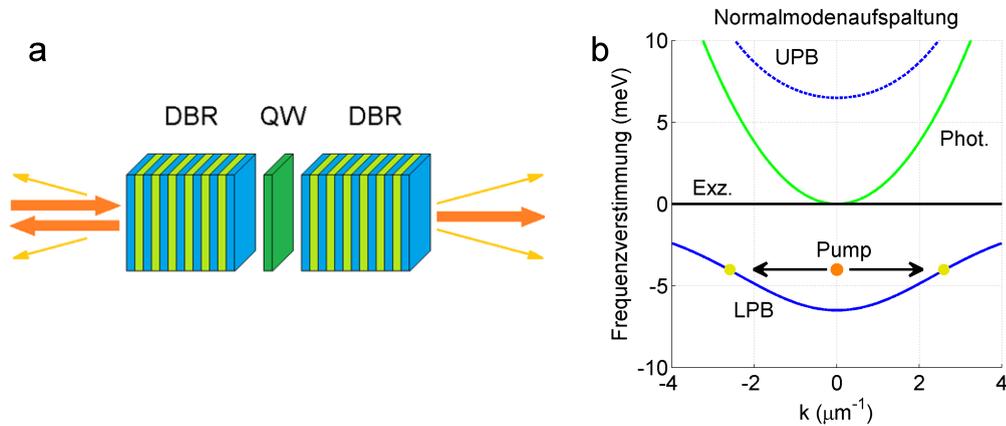


ABBILDUNG 1.1: a: Schema einer Mikroka­vität in Transmissionsgeometrie. Zur Veranschaulichung ist nur ein einziger Halbleiterquantenfilm illustriert. Im Falle einer OPO wird der optische Pump (orange) mit nichtaxialen Moden überlagert (gelb), die die Kavität unter endlichem Austrittswinkel verlassen. b: Normalmodenaufspaltung im Fall einer starken Exziton-Photon-Kopplung. Im Rahmen einer OPO streuen verstimmt angeregte Pump­polaritonen paarweise und resonant auf den LPB, wie durch die Pfeile markiert. Der Energienullpunkt wurde auf das als dispersionslos genä­herte Exzitonenband gelegt.

optischen Effekte auf der Wechselwirkung zwischen den Exzitonen basieren. Die spezifischen Parameter des Systems, z.B. die photonische und exzitonische Zusammensetzung, lassen sich durch gezieltes Probenwachstum (Material und Schichtdicken) der Halbleitermikroka­vität mit modernen Epitaxieverfahren kontrollieren, wodurch sie für ihren Anwendungszweck maßgeschneidert werden können. Diese und weitere Vorteile, die im Verlauf dieser Arbeit deutlich werden, machen Exziton-Polaritonen in Halbleitermikroka­vitäten zu einem eigenständigen Themengebiet in der nichtlinearen Optik [13, 14].

Die in dieser Arbeit untersuchten, planaren Mikroka­vitäten bestehen im Wesentlichen aus zwei gegenüberliegenden Bragg-Spiegeln (“distributed Bragg reflector”, DBR), die sich wiederum aus vielen planaren Schichten mit alternierendem Brechungsindex zusammensetzen [14], wie in Abb. 1.1 a gezeigt ist. Diese Anordnung modifiziert die photonische Zustandsdichte im Inneren in einer Dimension auf diskrete Moden, sodass die Mikroka­vität effektiv als zweidimensionales System beschrieben werden kann. Innerhalb des so entstandenen Resonators können zusätzlich in die Antiknoten der optischen Grundmode Halbleiterquantenfilme eingebettet werden, in denen durch einen kohärenten Energieaus­tausch mit dem optischen Feld Heavy-Hole-Exzitonen angeregt werden. Die Theorie, die im Rahmen dieser Arbeit vorgestellt wird, lässt sich prinzipiell für jedes Halbleitermaterial adaptieren, allerdings werden aufgrund einer weitgehend störstellenfreien Epitaxie in der Praxis häufig GaAs-Heterostrukturen bevorzugt. Einhergehend mit einer schmalen Bandlücke dieser Strukturen ist die exzitonische Bindungsenergie jedoch gering (nur wenige meV). Dies macht für den Betrieb eine Kühlung auf wenige Kelvin, z.B. mit

flüssigem Helium, notwendig, da die Exzitonen sonst rasch thermisch dissoziiert werden würden. In Zukunft wäre jedoch auch der Einsatz ZnO-basierter Strukturen [15] oder gar organischer Halbleiter [16] denkbar, die durch eine höhere Bindungsenergie einen Betrieb auch bei Raumtemperatur und somit auch Anwendungen in der Praxis ermöglichen könnten. Das optische Feld innerhalb der Mikrokavität ist an die Interbandpolarisation der Exzitonen gekoppelt. Ist diese Kopplung nicht zu stark, lässt sich auf Grundlage dieses Systems ein Oberflächenemitter (“vertical-cavity surface-emitting laser”, VCSEL) realisieren, bei dem die Halbleiterquantenfilme als aktives Medium fungieren [17, 18]. Übersteigt die Kopplung jedoch die natürliche Linienbreite, verlieren Photonen und Exzitonen ihre Identität als eigenständige Teilchen - es kommt zu einer Normalmodenaufspaltung der Dispersionen in zwei Polaritonzweige, einen energetisch tiefer (“lower polariton branch”, LPB) und höher gelegenen (“upper polariton branch”, UPB, siehe Abb. 1.1 b). Aufgrund der parabolischen Dispersion der Photonen in zwei Dimensionen ergibt sich für die Polaritonen in der Mikrokavität ein Energiegrundzustand, wodurch sich diese von Bulk-Polaritonen wesentlich unterscheiden.

Die vorliegende Arbeit behandelt neben den linearen vor allem die nichtlinearen optischen Eigenschaften kohärenter Polaritonen. Ein Fokus liegt dabei auf der optischen parametrischen Oszillation (OPO) [19–25], der phasenangepasste Wellenmischprozesse zu Grunde liegen. Das Prinzip einer OPO ist in Abb. 1.1 b veranschaulicht: Mit einer Pumpfrequenz oberhalb des Energiegrundzustandes wird ein Ensemble wechselwirkender Polaritonen bei  $k = 0$  verstimmt angeregt. Diese Polaritonen können aufgrund ihrer Wechselwirkung zu einer paarweisen, resonanten Streuung auf den unteren Polaritonzweig stimuliert werden. Ab einer kritischen Exzitonendichte kann dieser Prozess spontan eintreten, was in der Regel zu einem Symmetriebruch des Systems führt. Da das ursprüngliche Feld durch die OPO nun mit nichtaxialen Moden überlagert wird und diese Moden durch Streuprozesse höherer Ordnung zusätzlich untereinander wechselwirken, kommt es zur Bildung eines transversalen, optischen Musters [4, 9, 10, 26–28]. Die nichtaxialen Polaritonen verlassen die Kavität über ihre photonische Komponente unter einem endlichem Winkel (Abb. 1.1 a) und sind dadurch als Fernfeldmuster nachweisbar. Im Rahmen einer mikroskopischen Theorie [11, 12, 29, 30] für die Exzitonen, die alle Nichtlinearitäten bis zur dritten Ordnung umfasst, und der klassischen Lichttheorie für die Photonen [14] wird diese Musterbildung in Kap. 2 für skalare Polaritonfelder untersucht. Damit einher geht auch die Analyse anderer nichtlinearer Effekte, u.a. des bekannten Vierwellenmischens [31]. Bezieht man den Polarisationsfreiheitsgrad in das System mit ein, erhält das Polaritonfeld sowohl durch die photonische (TE-TM-Aufspaltung [32]) als auch durch die exzitonische Komponente (spinabhängige Wechselwirkung [11, 12]) einen Spinorcharakter, der in Kap. 3 untersucht wird. Hierbei führt

insbesondere eine linear polarisierte Anregung zu interessanten Phänomenen, die in einem skalaren Feld nicht auftreten: Unter anderem kann es bereits im optisch linearen Fall zum optischen Spin-Hall-Effekt [33–37] kommen - einem Spinfluss, der aufgrund der TE-TM-Aufspaltung senkrecht zur Propagationsrichtung der Polaritonen eintritt. Im nicht-linearen Fall führt die spinabhängige Wechselwirkung zu unterschiedlichen Signaturen - Präferenzen und Auswahlregeln - bei entarteten und nichtentarteten Wellenmischprozessen. Beide Effekte wirken sich bei einer spontanen OPO erheblich auf die Musterbildung aus. Das spontane Muster orientiert sich an der Polarisations Ebene des anregenden Lichts, wodurch es von außen steuerbar wird: Die Orientierung der Polarisation wird auf diese Weise direkt in einen räumlichen Freiheitsgrad übersetzt. Ferner kommt es zu einem neuartigen Symmetriebruch des Systems [27], der sich sowohl auf die Polarisation als auch auf die Frequenz der nichtaxialen Felder bezieht. Abschließend präsentiert Kap. 3 die Ergebnisse einer theoretisch-experimentellen Zusammenarbeit [1, 2]. Diesbezüglich wird auch auf eine rein optische Kontrolle der Muster eingegangen.

Die in Kap. 2 und 3 behandelten Effekte beruhen auf einer kohärenten Anregung. Ein resonantes (oder beinahe resonantes) Pumpen der Polaritonen setzt jedoch eine aus experimenteller Sicht aufwendige Feinabstimmung voraus. Eine Alternative zu dieser Art der Anregung ist ein stark verstimmtes Pumpen von Elektron-Loch-Paaren, die zunächst zu einem inkohärenten Exzitonenreservoir abkühlen. Daraufhin streuen die Exzitonen durch phononassistierte Streuprozesse stimuliert in ein kohärentes Polaritonkondensat ein, das sich dadurch spontan im Grundzustand des Systems bildet [38–40]. Bei dieser Art der Anregung geht allerdings die Phaseninformation des anregenden Lichts verloren, was eine direkte Kontrolle so entstehender Polaritonen erschwert. Als Ergebnis einer weiteren experimentell-theoretischen Zusammenarbeit [3] zeigen wir in Kap. 4 für ein skalares Feld, dass sich ein so entstandenes Kondensat durch eine geeignete räumliche Verteilung der simultan erzeugten Exzitonen rein optisch manipulieren lässt. Die Eigenschaften des inkohärenten Reservoirs sowohl als Quellterm für die Polaritonen, als auch als abstoßendes Potential, führen zu einer interessanten Dynamik [41], die sich durch die spezifische Potentiallandschaft steuern lässt. Experimentell lassen sich verschiedene Anregungsgeometrien mit Hilfe eines “Spatial-Light Modulators” verwirklichen. Mit Hilfe von Simulationen, die die Experimente qualitativ gut wiedergeben, demonstrieren wir wahlweise das Einfangen des Kondensates in einer rein optischen Potentialfalle wie auch einen gerichteten Kondensatfluss aus einer halboffenen Falle hinaus. Weiterhin kann durch zusätzliche, simultan angeregte Potentialformen der so entstandene Fluss erneut rein optisch manipuliert und potentiell kaskadenartig verstärkt werden, was eine Verwendung dieser Kondensate in rein optischen Schaltkreisen ermöglichen könnte.

## Kapitel 2

# Nichtlineare optische Eigenschaften und spontane Musterbildung in einem skalaren Polaritonfeld

Bevor in Kap. 3 die polarisationsabhängigen optischen Eigenschaften eines Systems wechselwirkender Exziton-Polaritonen behandelt werden, bietet dieses Kapitel einen Überblick über die optischen Eigenschaften eines skalaren Polaritonfeldes ohne Polarisationsfreiheitsgrad. Wie in Kap. 3 gezeigt wird, ist diese Vereinfachung in guter Näherung für eine Anregung mit zirkular polarisiertem Licht gültig. Die Dynamik der Polaritonen beschreiben wir in Abschn. 2.1 durch ein semiklassisches Modell mit gekoppelten Bewegungsgleichungen für Photonen und Exzitonen. Das Lichtfeld wird hierbei klassisch, das Polarisationsfeld der Exzitonen mikroskopisch beschrieben. Aus den Bewegungsgleichungen leiten wir in Abschn. 2.2 optisch lineare Eigenschaften - wie die Normalmodenaufspaltung in Polaritonzweige - und in Abschn. 2.3 nichtlineare Eigenschaften her. Zu letzteren zählen ein kubischer Zusammenhang zwischen Polaritondichte und Pumpintensität (S-Kurve), blauverschobene Resonanzen, vor allem aber phasenangepasstes Wellenmischen, das bei hohen Dichten spontan auftreten und damit eine optische Instabilität des Polaritonfeldes hervorrufen kann. Mit einer linearen Stabilitätsanalyse präsentieren wir in Abschn. 2.4 eine Methode, mit der die optische Stabilität eines Feldes analytisch beurteilt werden kann. Im Falle optischer Instabilität führt das Anwachsen bestimmter Moden zu einem spontanen Symmetriebruch und zur Bildung transversaler Muster, wie sie in Abschn. 2.5 diskutiert werden.

## 2.1 Theoretische Grundlagen zur Untersuchung von Exziton-Polaritonen

Die Wechselwirkung eines äußeren optischen Feldes mit einer Halbleitermikrokavität lässt sich unterteilen in (i) die Kopplung des externen Feldes an das Feld innerhalb der Kavität und (ii) die Kopplung dieses internen Feldes an die Polarisierung in den eingebetteten Halbleiterquantenfilmen (folglich in eine Licht-Materie-Wechselwirkung). Für das externe Feld bewirkt die Kavität, ähnlich einer Polarisierung, eine Inhomogenität in der mikroskopischen Wellengleichung [4]:

$$\frac{n_s^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathcal{E} - \nabla^2 \mathcal{E} = \frac{\hbar t_c}{\epsilon_0 c^2} \delta(z) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}_{cav}. \quad (2.1)$$

Hierbei ist  $\mathcal{E}$  das mikroskopische, externe  $E$ -Feld,  $c$  die Lichtgeschwindigkeit,  $n_s$  der Brechungsindex des Substrates, das die Mikrokavität umgibt und  $\epsilon_0$  die Dielektrizitätskonstante im Vakuum. Das Feld innerhalb der Kavität,  $\mathbf{E}_{cav}$ , ist über die Kopplungskonstante  $t_c$  an das externe Feld gekoppelt. Die Kavität wird in diesem Modell als unendlich dünne Struktur angenommen, welche sich über die gesamte  $x$ - $y$ -Ebene erstreckt.

Im  $k$ -Raum lässt sich die Dynamik des internen Feldes  $E_{\mathbf{k}}$  in Quasimodennäherung beschreiben, bei der ein von außen eindringendes, effektives Feld  $E_{\mathbf{k},\text{eff}}$  als Quellterm wirkt. Für eine Kavität ohne Halbleiterquantenfilme gilt [4, 9, 10]:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} E_{\mathbf{k}} = \hbar \omega_{\mathbf{k}}^c E_{\mathbf{k}} + \hbar t_c E_{\mathbf{k},\text{eff}}. \quad (2.2)$$

Die Amplitude  $E_{\mathbf{k}}$  ist hierbei ein skalares, mikroskopisches Feld, dessen Betragsquadrat gerade der Photonendichte entspricht.  $\hbar \omega_{\mathbf{k}}^c = \frac{\hbar c}{n_b} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$  ist die photonische Dispersion, wobei  $n_b$  der Brechungsindex des Materials innerhalb der Kavität ist. Durch die Bragg-Spiegel wird die photonische Zustandsdichte in  $z$ -Richtung auf diskrete Moden  $k_z$  eingeschränkt [14]. Die Wellenzahlen<sup>1</sup>, die die Ebene der Kavität aufspannen,  $k_x$  und  $k_y$ , bleiben indes kontinuierlich, wodurch das System effektiv zweidimensional wird. Mit  $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$  bzw.  $k^2 = k_x^2 + k_y^2$  wird im Folgenden nur der zweidimensionale Anteil bezeichnet. Für ein festes  $k_z$  ist  $\hbar \omega_{\mathbf{k}}^c = \hbar \omega_0^c \cos^{-1} \vartheta$  vom polaren Einfallswinkel  $\vartheta$  abhängig, wobei  $\hbar \omega_0^c = \hbar c k_z n_b^{-1}$  dem Scheitelpunkt der Dispersion entspricht. Für kleine Einfallswinkel ergibt eine Taylor-Entwicklung bis zur zweiten Ordnung:

$$\hbar \omega_{\mathbf{k}}^c \approx \hbar \omega_0^c \left( 1 + \frac{1}{2} \vartheta^2 \right) \approx \hbar \omega_0^c \left( 1 + \frac{k^2}{2k_z^2} \right) \equiv \hbar \omega_0^c + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_c}. \quad (2.3)$$

<sup>1</sup>Nachfolgend auch Impulse genannt.

Aufgrund der näherungsweise parabolischen Dispersion  $\hbar\omega_{\mathbf{k}}^c$  lässt sich den Photonen die effektive Masse  $m_c = \hbar n_b k_z c^{-1}$  zuordnen.

Nehmen wir des Weiteren an, dass das anregende Licht<sup>2</sup> nur aus einer Richtung auf die Kavität einfallt. Das effektive Feld  $E_{\mathbf{k},\text{eff}} = E_{\mathbf{k},\text{inc}} - E_{\mathbf{k},\text{refl}}$  entspricht dann als transmittiertes Feld gerade der Differenz aus einfallendem  $E_{\mathbf{k},\text{inc}}$  und reflektiertem Feld  $E_{\mathbf{k},\text{refl}}$ . Mit Hilfe von Gleichung 2.1 lässt sich ein Zusammenhang zwischen  $E_{\mathbf{k},\text{refl}}$  und  $E_{\mathbf{k}}$  herleiten, es gilt:

$$E_{\mathbf{k},\text{refl}} = -\frac{\hbar t_c}{2\epsilon_0 c n_s} \frac{\partial}{\partial t} E_{\mathbf{k}}. \quad (2.4)$$

Die ausführliche Herleitung von Gl. 2.4 ist in Quelle [4] zu finden. Unter der Annahme, dass  $E_{\mathbf{k}}$  sehr viel schneller mit der Pumpfrequenz  $\omega_p$  oszilliert, als sich die Einhüllende ändert, kann die zeitliche Ableitung in Gl. 2.4 genähert werden zu  $\frac{\partial}{\partial t} E_{\mathbf{k}} \approx -i\omega_p E_{\mathbf{k}}$ . Für das effektive Feld folgt daraus:

$$E_{\mathbf{k},\text{eff}} = E_{\mathbf{k},\text{inc}} - i\frac{\hbar t_c \omega_p}{2\epsilon_0 c n_s} E_{\mathbf{k}}. \quad (2.5)$$

Mit Gl 2.5 lässt sich Gl. 2.2 schreiben als

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} E_{\mathbf{k}} = (\hbar\omega_{\mathbf{k}}^c - i\gamma_c) E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k},\text{pump}}, \quad (2.6)$$

wodurch sich mit  $E_{\mathbf{k},\text{pump}} \equiv \hbar t_c E_{\mathbf{k},\text{inc}}$  ein Quell- und mit  $\gamma_c \equiv \frac{\hbar^2 t_c^2 \omega_p}{2\epsilon_0 c n_s}$  ein Zerfallsterm für  $E_{\mathbf{k}}$  ergibt. Klassisch lässt sich  $\gamma_c$  als Dämpfung eines Oszillators interpretieren, mikroskopisch als die Zerfallsrate der Photonen: Sie stehen dem System durch das Entweichen aus der Kavität nicht mehr zur Verfügung. Aus dem Zerfallsterm lässt sich ein einheitliches Maß für die Güte einer Kavität ableiten, der  $Q$ -Faktor  $Q = \hbar\omega_p (2\gamma_c)^{-1}$ . Er setzt die Energie eines Photons  $\hbar\omega_p$  in Bezug zu der Linienbreite  $\gamma_c$  und steht somit für die Anzahl der Schwingungen, die ein Photon bis zu seinem Zerfall durchläuft. Auf dem heutigen technologischen Stand lassen sich Kavitäten mit  $Q$ -Faktoren von bis zu  $10^5$  herstellen [13].

Berücksichtigt man nun die Licht-Materie-Wechselwirkung innerhalb der Kavität über die Kopplung des Feldes  $E_{\mathbf{k}}$  an die Polarisation  $p_{\mathbf{k}}$  in einem eingebetteten Halbleiterquantenfilm<sup>3</sup>, wird Gl. 2.6 erweitert zu [4, 9, 10]:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} E_{\mathbf{k}} = (\hbar\omega_{\mathbf{k}}^c - i\gamma_c) E_{\mathbf{k}} - \Omega_{\mathbf{k}} p_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k},\text{pump}}. \quad (2.7)$$

<sup>2</sup>Auch Pump genannt.

<sup>3</sup>Vereinfachend wird nur ein einzelner Quantenfilm in der Kavität betrachtet.

Die mikroskopische Interbandpolarisation

$$p_{\mathbf{k}}(t) = \phi_{1s}^*(0) \langle a_h(-\mathbf{k}, t) a_c(\mathbf{k}, t) \rangle \quad (2.8)$$

entsteht im Halbleiterquantenfilm durch das Anregen eines Valenzbandelektrons in das Leitungsband [11, 12]. Bei Energien von ungefähr  $\hbar\omega_p \approx 1.5$  eV geht diese Polarisation mit der Anregung von Wannier-Mott-Exzitonen [42] einher. Ferner werden nur Heavy-Hole-Exzitonen im Grundzustand (1s) betrachtet. In Gl. 2.8 ist  $\phi_{1s}^*(0)$  die exzitonische 1s-Wellenfunktion bei  $\mathbf{r} = 0$ .  $a_h$  und  $a_c$  bezeichnen die Vernichtungsoperatoren von Löchern im Valenzband bzw. Elektronen im Leitungsband. Die Dichte der Exzitonen im  $k$ -Raum beträgt gerade  $|p_{\mathbf{k}}|^2$ . Der Kopplungsparameter  $\Omega_{\mathbf{k}}$  in Gl. 2.7 ist durch

$$\Omega_{\mathbf{k}} = e \langle r \rangle_{eh} \phi_{1s}^*(0) f_{\gamma}(z_{\text{QW}}) \sqrt{\hbar\omega_{\mathbf{k}}^c / \epsilon_0 \epsilon_b} \quad (2.9)$$

gegeben [4]. Hierbei ist  $e \langle r \rangle_{eh}$  das Interband-Dipolmatrixelement und  $\epsilon_b$  die Permittivität im Halbleitermaterial. Der Term  $f_{\gamma}(z_{\text{QW}})$  ist ein einheitenloser Normierungsfaktor, der von der  $z$ -Position  $z_{\text{QW}}$  des planaren Quantenfilms innerhalb der Kavität abhängt. Dieser (und somit  $\Omega_{\mathbf{k}}$ ) wird maximal, wenn der Quantenfilm gerade auf einem Wellenbauch des internen Feldes positioniert ist, während  $f_{\gamma}(z_{\text{QW}})$  für eine Position auf einem Wellenknoten verschwindet. Weiterhin fließt in  $\Omega_{\mathbf{k}}$  die photonische Dispersion  $\hbar\omega_{\mathbf{k}}^c$  ein. Da diese für kleine polare Einfallswinkel nur schwach variiert, wird die  $\mathbf{k}$ -Abhängigkeit von  $\Omega_{\mathbf{k}}$  vernachlässigt und  $\Omega_{\mathbf{k}}$  durch  $\Omega_x \equiv \Omega_{\mathbf{k}=0}$  genähert.

Eine Bewegungsgleichung für  $p_{\mathbf{k}}$  lässt sich über die Heisenberggleichung herleiten:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} p_{\mathbf{k}} = \phi_{1s}^*(0) \langle [a_h(-\mathbf{k}, t) a_c(\mathbf{k}, t), \mathbb{H}] \rangle. \quad (2.10)$$

Der Hamiltonoperator  $\mathbb{H} = \mathbb{H}_0 + \mathbb{H}_{\text{opt}} + \mathbb{H}_{\text{int}}$  umfasst hierbei die Einteilchenbeiträge von Löchern und Leitungsbandelektronen  $\mathbb{H}_0$ , den Beitrag  $\mathbb{H}_{\text{opt}}$  durch Kopplung an das optische Feld  $E_{\mathbf{k}}$  sowie die gesamten Vielteilchen-Wechselwirkungen (Loch-Loch, Elektron-Elektron, Elektron-Loch)  $\mathbb{H}_{\text{int}}$ . Dieser Wechselwirkungsbeitrag führt in Gl. 2.10 zu einem Hierarchieproblem, eine Lösung ist somit nur noch näherungsweise möglich.

Eine Abbruchbedingung für diese Hierarchie bietet die Methode ‘‘Dynamics controlled truncation’’ (DCT), die in Quelle [43] beschrieben wird. Diese Methode berücksichtigt alle auftretenden kubischen ( $\chi^{(3)}$ ) Nichtlinearitäten in  $p_{\mathbf{k}}$ . Für eine ausführliche Herleitung und Diskussion der Bewegungsgleichung von  $p_{\mathbf{k}}$  sei auf die Quellen [11] und [12] verwiesen. Unter Vernachlässigung des Spins in der Exziton-Exziton-Wechselwirkung

und in Mean-Field-Näherung ergibt sich die Bewegungsgl. [4, 9, 10]:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} p_{\mathbf{k}} &= (\epsilon_{\mathbf{k}}^x - i\gamma_x) p_{\mathbf{k}} - \Omega_x E_{\mathbf{k}} \\ &+ \frac{1}{\mathcal{L}^2} \sum_{\mathbf{k}' \mathbf{k}''} p_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''-\mathbf{k}}^* p_{\mathbf{k}'} (\alpha_{\text{PSF}} \Omega_x E_{\mathbf{k}''} + V_{\text{HF}} p_{\mathbf{k}''}). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Hierbei ist  $\epsilon_{\mathbf{k}}^x = \epsilon_0^x + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_x}$  die Einteilchen-Dispersion der Exzitonen, die aufgrund der hohen Masse der Exzitonen  $m_x$  im Vergleich zu  $\hbar\omega_{\mathbf{k}}^c$  sehr flach ist. Der phänomenologische Zerfallsterm  $\gamma_x$  vernachlässigt eine dichteabhängige Dephasierung [12, 44]. Der Koppelungsparameter  $\Omega_x$  wird wie in Gl. 2.7 konstant angenommen. Über die Kopplung findet ein kohärenter Energieaustausch zwischen dem exzitonischen Feld  $p_{\mathbf{k}}$  und dem optischen Feld  $E_{\mathbf{k}}$  statt. Die nichtlinearen Terme in Gl. 2.11 umfassen die Summe über alle möglichen, impulserhaltenden Streuprozesse. Getrieben werden diese einerseits von der auf dem Pauli-Blocking basierenden Phasenraumfüllung ( $\alpha_{\text{PSF}}$ ), andererseits von einer abstoßenden Coulomb-Wechselwirkung ( $V_{\text{HF}}$ ) auf Hartree-Fock-Ebene.  $\mathcal{L}^2$  ist die Normalisierungsfläche der Kavität. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird dieser Term im  $k$ -Raum vor Streumatrixelementen weggelassen. Die hier verwendeten Parameter betragen  $\alpha_{\text{PSF}} = 4\pi a_0^2/7$  und  $V_{\text{HF}} = 2\pi (1 - 315\pi^2/4096) a_0^2 E_b$  [10], wobei  $a_0$  den exzitonischen Radius und  $E_b$  die exzitonische Bindungsenergie bezeichnet. Typische (GaAs-)Parameter sind diesbezüglich  $E_b = 13$  meV und  $a_0 = 17$  nm, damit beträgt  $V_{\text{HF}} = 5.69 \cdot 10^{-3}$  meV  $\mu\text{m}^2$  und  $\alpha_{\text{PSF}} = 5.188 \cdot 10^{-4}$   $\mu\text{m}^2$ . Die Wechselwirkung mit inkohärenten Exzitonen wird in Gl. 2.11 vernachlässigt.

Gln. 2.7 und 2.11 bilden zusammen ein gekoppeltes Gleichungssystem für  $E_{\mathbf{k}}$  und  $p_{\mathbf{k}}$ . Nach einer Fouriertransformation in den Ortsraum ergibt sich:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} E(\mathbf{r}, t) = (\mathbb{H}_c - i\gamma_c) E(\mathbf{r}, t) - \Omega_x p(\mathbf{r}, t) + E_{\text{pump}}(\mathbf{r}, t) \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} p(\mathbf{r}, t) &= (\mathbb{H}_x - i\gamma_x) p(\mathbf{r}, t) - \Omega_x (1 - \alpha_{\text{PSF}} |p(\mathbf{r}, t)|^2) E(\mathbf{r}, t) \\ &+ V_{\text{HF}} |p(\mathbf{r}, t)|^2 p(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Hierbei ist  $\mathbf{r} = (x, y)$  der Ortsraumvektor in zwei Dimensionen. Die Dispersionen im  $k$ -Raum,  $\hbar\omega_{\mathbf{k}}^c$  und  $\epsilon_{\mathbf{k}}^x$ , werden im Ortsraum jeweils zu den Operatoren  $\mathbb{H}_c = \hbar\omega_0^c - \frac{\hbar^2}{2m_c} \Delta$  und  $\mathbb{H}_x = \epsilon_0^x - \frac{\hbar^2}{2m_x} \Delta$  mit dem zweidimensionalen Laplaceoperator  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ . Nähert man die exzitonische Dispersion als ein dispersionsloses Band (da  $m_x$  vier Größenordnungen schwerer ist als  $m_c$  [13]), ist  $\mathbb{H}_x \approx \epsilon_0^x$ . Die kubischen Nichtlinearitäten in Gl. 2.11 werden in Gl. 2.13 lokal im Ortsraum und hängen nur noch von der Exzitonendichte  $|p(\mathbf{r}, t)|^2$  ab, was eine numerische Implementierung erheblich erleichtert. In dieser Form wird bereits auch ein Sättigungseffekt sichtbar:

Die Phasenraumfüllung führt für hohe Pumpintensitäten zu einer Sättigung von  $p(\mathbf{r}, t)$ , sodass die Exzitonendichte auf einen Wert von ca.  $|p(\mathbf{r}, t)|^2 \approx 20 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2}$  beschränkt wird, weil dann  $1 - \alpha_{\text{PSF}}|p(\mathbf{r}, t)|^2 = 0$  beträgt.

## 2.2 Lineare Polariton-Optik

Im Grenzfall schwacher Anregung können die nichtlinearen Terme in Gl. 2.11 vernachlässigt werden, was die gekoppelte Bewegungsgl. für Photonen und Exzitonen zu einer linearen Schrödingergleichung im  $k$ -Raum vereinfacht:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} E_{\mathbf{k}} \\ p_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hbar\omega_{\mathbf{k}}^c - i\gamma_c & -\Omega_x \\ -\Omega_x & \epsilon_{\mathbf{k}}^x - i\gamma_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\mathbf{k}} \\ p_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_{\mathbf{k}, \text{pump}} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Für eine starke Kopplung  $\Omega_x \gg \gamma_c, \gamma_x$  verlieren Photonen und Exzitonen ihre Merkmale als eigenständige Teilchen und formen stattdessen Exziton-Polaritonen [13, 14], die sich aus einer photonischen und einer exzitonischen Komponente zusammensetzen. Die Energie der Polaritonen erhält man durch die Diagonalisierung der Matrix<sup>4</sup> in Gl. 2.14. Hierbei kommt es für jedes  $\mathbf{k}$  zu einer Normalmodenaufspaltung in einen energetisch tiefer (LPB) und höher gelegenen Polaritonenzweig (UPB) mit den Dispersionen:

$$\epsilon_{\mathbf{k}}^{\text{LPB/UPB}} = \frac{1}{2} (\epsilon_{\mathbf{k}}^x + \hbar\omega_{\mathbf{k}}^c) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\epsilon_{\mathbf{k}}^x - \hbar\omega_{\mathbf{k}}^c)^2 + 4\Omega_x^2}. \quad (2.15)$$

Experimentell beobachtet wurde diese Normalmodenaufspaltung erstmals 1992 von Weisbuch et al. [45].

Der photonische und exzitonische Anteil der Polaritonen lässt sich über die zu  $\epsilon_{\mathbf{k}}^{\text{UPB}}$  und  $\epsilon_{\mathbf{k}}^{\text{LPB}}$  gehörenden Eigenvektoren  $(C_{\mathbf{k}}^{\text{UPB}}, X_{\mathbf{k}}^{\text{UPB}})^{\text{T}}$  und  $(C_{\mathbf{k}}^{\text{LPB}}, X_{\mathbf{k}}^{\text{LPB}})^{\text{T}}$  bestimmen.  $C_{\mathbf{k}}^{\text{UPB}}$ ,  $X_{\mathbf{k}}^{\text{UPB}}$ ,  $C_{\mathbf{k}}^{\text{LPB}}$  und  $X_{\mathbf{k}}^{\text{LPB}}$  werden auch als Hopfield-Koeffizienten bezeichnet. Nach Quelle [39] gilt auf dem unteren Polaritonenzweig für den photonischen  $|C_{\mathbf{k}}^{\text{LPB}}|^2$  und exzitonischen Anteil  $|X_{\mathbf{k}}^{\text{LPB}}|^2$ :

$$|C_{\mathbf{k}}^{\text{LPB}}|^2 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}^x - \hbar\omega_{\mathbf{k}}^c}{\sqrt{(\epsilon_{\mathbf{k}}^x - \hbar\omega_{\mathbf{k}}^c)^2 + 4\Omega_x^2}} \right) \quad (2.16)$$

$$|X_{\mathbf{k}}^{\text{LPB}}|^2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}^x - \hbar\omega_{\mathbf{k}}^c}{\sqrt{(\epsilon_{\mathbf{k}}^x - \hbar\omega_{\mathbf{k}}^c)^2 + 4\Omega_x^2}} \right). \quad (2.17)$$

Abb. 2.1 zeigt die Polaritonenzweige  $\epsilon_{\mathbf{k}}^{\text{UPB}}$  und  $\epsilon_{\mathbf{k}}^{\text{LPB}}$  sowie die Zusammensetzung der Polaritonen auf dem LPB,  $|C_{\mathbf{k}}^{\text{LPB}}|^2$  und  $|X_{\mathbf{k}}^{\text{LPB}}|^2$ , für drei verschiedene Verstimmungen.

<sup>4</sup>Unter Vernachlässigung der Zerfallsterme

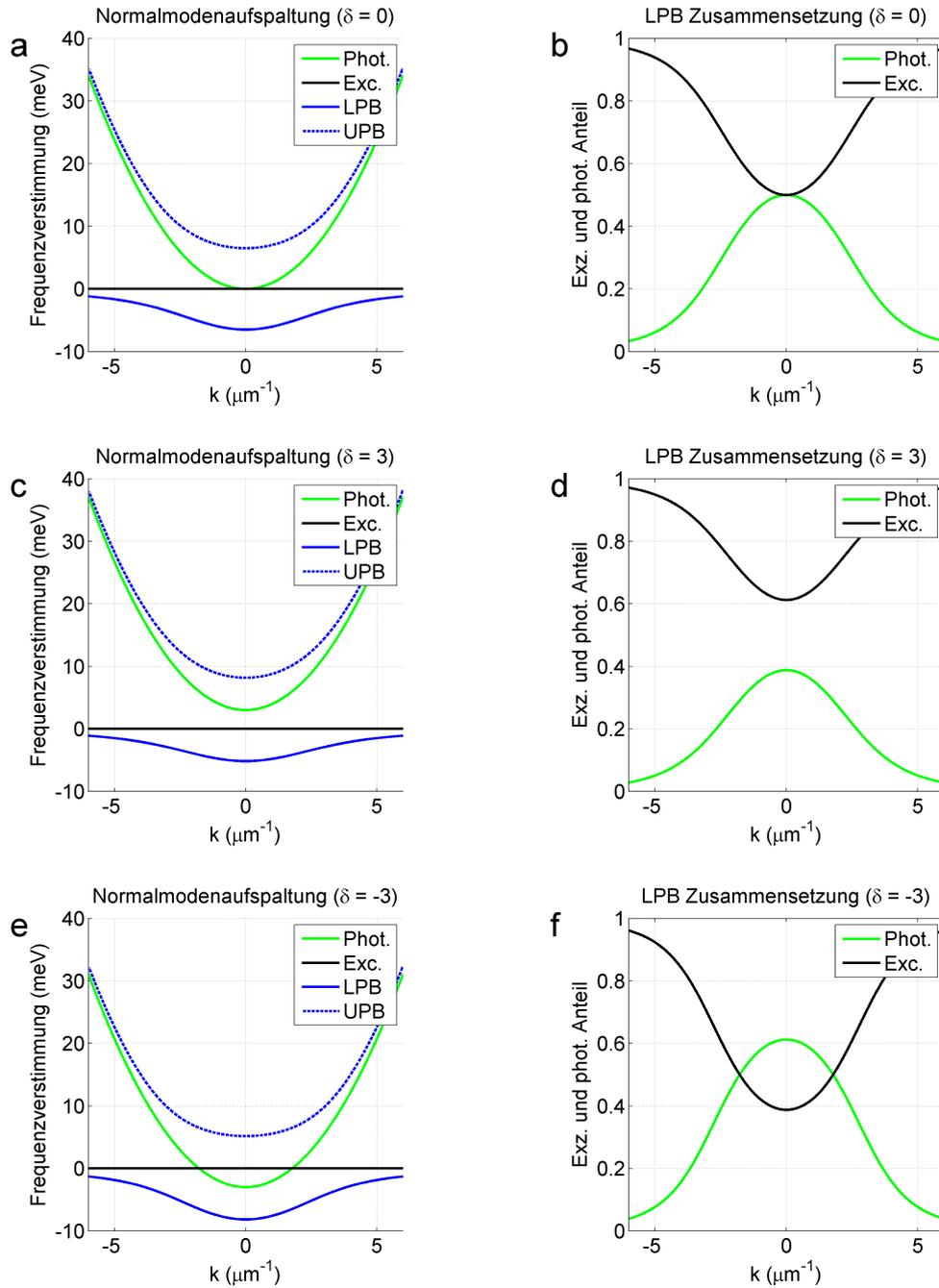


ABBILDUNG 2.1: Die linke Spalte (a,c,e) zeigt die Normalmodenaufspaltung in LPB und UPB für eine bei  $k = 0$  resonante photonische Dispersion  $\hbar\omega_0^c = \epsilon_0^x$  (a) und eine um jeweils 3 meV positiv (c) und negativ (e) verstimmt. Die rechte Spalte (b,d,f) zeigt die photonische und exzitoniche Zusammensetzung der LPB-Polaritonen.

Hierbei wurde mit einer Kopplung von  $\Omega_x = 6.5$  meV und einer effektiven Masse von  $m_c = 3.78 \cdot 10^{-5} m_e$  gerechnet, wobei  $m_e$  die Elektronenmasse ist.

Abb. 2.1 a zeigt die Dispersionen einer resonanten Kavität, d.h. der Scheitelpunkt von  $\hbar\omega_k^c$  berührt bei  $k = 0$  das als dispersionslos genäherte Band  $\epsilon_k^x$ . Der energetische Nullpunkt wurde dabei gerade auf  $\epsilon_k^x = \text{const.}$  gelegt. Die Normalmodenaufspaltung in LPB und UPB beträgt bei  $k = 0$  jeweils  $\pm\Omega_x$  und die Polaritonen sind zu gleichen Anteilen photonisch und exzitonisch (Abb. 2.1 b). Ist die Kavität jedoch entweder positiv (Abb. 2.1 c) oder negativ (Abb. 2.1 e) verstimmt, überwiegt bei  $k = 0$  der exzitonische (Abb. 2.1 d) bzw. photonische Anteil (Abb. 2.1 f). Die Verstimmung zum Exzitonband hängt vom spezifischen Probenwachstum ab, sodass die Polaritonen im Grundzustand durch die Epitaxie je nach Bedarf entweder mehr exzitonisch oder mehr photonisch gestimmt werden können. Diese Arbeit wird sich in Kap. 2 und Kap. 3 auf eine resonante Kavität beschränken.

Für  $k \rightarrow \infty$  nähert sich in allen drei Fällen  $\epsilon_k^{\text{UPB}}$  asymptotisch  $\hbar\omega_k^c$ , während  $\epsilon_k^{\text{LPB}}$  gegen  $\epsilon_k^x$  konvergiert. Der LPB<sup>5</sup> wird mit ansteigendem  $k$  somit immer exzitonischer, wie man in Abb. 2.1 b,d,f am verschwindenden photonischen und am zunehmenden exzitonischen Anteil erkennt.

Wird Gl. 2.14 für ein monochromatisches cw-Pumpfeld  $E_{\mathbf{k},\text{pump}}(t) = E_{\mathbf{k},\text{pump}} \exp(-i\omega_p t)$  numerisch gelöst, pendeln sich nach wenigen Pikosekunden stationäre Dichten für  $|E_{\mathbf{k}}|^2$  und  $|p_{\mathbf{k}}|^2$  ein. Die Felder  $E_{\mathbf{k}}$  und  $p_{\mathbf{k}}$  übernehmen, da kohärent angeregt, sowohl die Frequenz  $\omega_p$  als auch den Impuls  $\mathbf{k}$  des anregenden Lichtes. Ferner bilden die drei Felder  $E_{\mathbf{k},\text{pump}}$ ,  $E_{\mathbf{k}}$  und  $p_{\mathbf{k}}$  eine feste Phasenbeziehung zueinander aus. Der Zusammenhang zwischen der Pumpintensität  $|E_{\mathbf{k},\text{pump}}|^2$  und den Dichten  $|E_{\mathbf{k}}|^2$  und  $|p_{\mathbf{k}}|^2$  ist linear. Löst man, unter Vernachlässigung der nichtlinearen Terme, Gln. 2.12 und 2.13 simultan für ein vorgegebenes, räumliches Anregungsprofil  $E_{\text{pump}}(\mathbf{r})$ , erben zudem die stationären Felder  $E(\mathbf{r})$  und  $p(\mathbf{r})$  die gleiche räumliche Verteilung, sofern sich  $E_{\text{pump}}(\mathbf{r})$  auf einer  $\mu\text{m}$ -Skala nicht zu abrupt ändert und somit die Wirkung des Differenzialoperators  $\mathbb{H}_c$  vernachlässigbar wird.

## 2.3 Nichtlineare Polariton-Optik und Vierwellenmischen

Für größer werdende Exzitondichten  $|p(\mathbf{r})|^2$  gilt der lineare Zusammenhang zur Pumpintensität nicht mehr. Um die nun auftretenden nichtlinearen Effekte analytisch zu beschreiben, bietet es sich an, die Gln. 2.12 und 2.13 in die Eigenbasis des Systems, d.h.  $\Psi^{\text{LPB}}$  und  $\Psi^{\text{UPB}}$ , zu transformieren: Damit einhergehend lässt sich das System

<sup>5</sup>Für den UPB nehmen exzitonischer und photonischer Anteil jeweils die vertauschten Rollen ein.

näherungsweise mit einer einkomponentigen Bewegungsgleichung, der Gross-Pitaevskii-Gleichung, beschreiben.

### 2.3.1 Die Gross-Pitaevskii-Gleichung

Für eine resonante Kavität lassen sich die Polaritonen des unteren bzw. oberen Polariton-zweiges für  $k = 0$  schreiben als  $\Psi_{\text{UPB}}^{\text{LPB}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(E \pm p)$ , sodass für  $E = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi^{\text{LPB}} + \Psi^{\text{UPB}})$  und für  $p = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi^{\text{LPB}} - \Psi^{\text{UPB}})$  gilt. Liegt die Pumpfrequenz  $\hbar\omega_p$  energetisch nah am LPB-Scheitelpunkt, lassen sich die auf dem UPB angeregten Polaritonen vernachlässigen. Mit dieser Näherung lässt sich über eine Basistransformation von Gl. 2.12 und 2.13 für die Polaritonen auf dem unteren Zweig  $\Psi(\mathbf{r}, t) \equiv \Psi^{\text{LPB}}(\mathbf{r}, t)$  die Bewegungsgleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = (\mathbb{H}_p - i\gamma_p) \Psi(\mathbf{r}, t) + \alpha |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \Psi(\mathbf{r}, t) + \Psi_{\text{pump}}(\mathbf{r}, t) \quad (2.18)$$

herleiten (Anhang A.1). Der Operator  $\mathbb{H}_p = \epsilon_0^x - \Omega_x - \frac{\hbar^2}{2m_p} \Delta$  entspricht im Ortsraum der Dispersion des unteren Polaritonzweiges, der - aufgrund von  $\hbar\omega_k^c$  - am Scheitelpunkt ebenfalls näherungsweise parabolisch ist. Diesem lässt sich daher eine effektive Polaritonmasse  $m_p = 2m_c$  zuordnen, wobei hier  $m_x \gg m_c$  angenommen wurde. Die Zerfallsrate der Polaritonen  $\gamma_p = \frac{1}{2}(\gamma_c + \gamma_x)$  ist gerade das arithmetische Mittel zwischen photonischem und exzitonischem Zerfallsterm. Die abstoßende Polariton-Polariton-Wechselwirkung  $\alpha = \frac{1}{4}(V_{\text{HF}} + \alpha_{\text{PSF}}\Omega_x)$ , die sich aus der Coulomb-Wechselwirkung und der Phasenraumfüllung zusammensetzt, erbt das Polaritonfeld aus der exzitonenischen Komponente. Der Quellterm  $\Psi_{\text{pump}} = \frac{1}{\sqrt{2}}E_{\text{pump}}$  stammt hingegen aus dem photonischen Anteil. Die Abhängigkeit dieser neu eingeführten Parameter von der Zusammensetzung der Polaritonen (den Hopfield-Koeffizienten) - und somit von  $\mathbf{k}$  - wird hierbei vernachlässigt.

Gl. 2.18 ist auch als Gross-Pitaevskii-Gleichung (GPE) bekannt und wird - in dieser oder in erweiterter Form - häufig in der Literatur verwendet [13, 39, 41, 69, 76–79, 87, 88, 92, 93, 96]. Die Reduktion auf diese einfache Form bietet die Möglichkeit, die nichtlinearen Eigenschaften eines Polaritonfeldes auch analytisch zu behandeln, was für das komplette und gekoppelte Gleichungssystem rasch unübersichtlich werden würde.

### 2.3.2 Nichtlineare Abhängigkeit der stationären Polaritondichte

Auf der Suche nach stationären Lösungen von Gl. 2.18 wird nun vereinfachend angenommen, dass der optische Pump  $\Psi_{\text{pump}}(\mathbf{r}, t) = \Psi_{\text{pump},0} \exp(i\mathbf{k}_p \cdot \mathbf{r} - i\omega_p t)$  homogen über die gesamte  $x$ - $y$ -Ebene ausgedehnt ist und senkrecht auf die Kavität einfallt ( $\mathbf{k}_p = 0$ ).

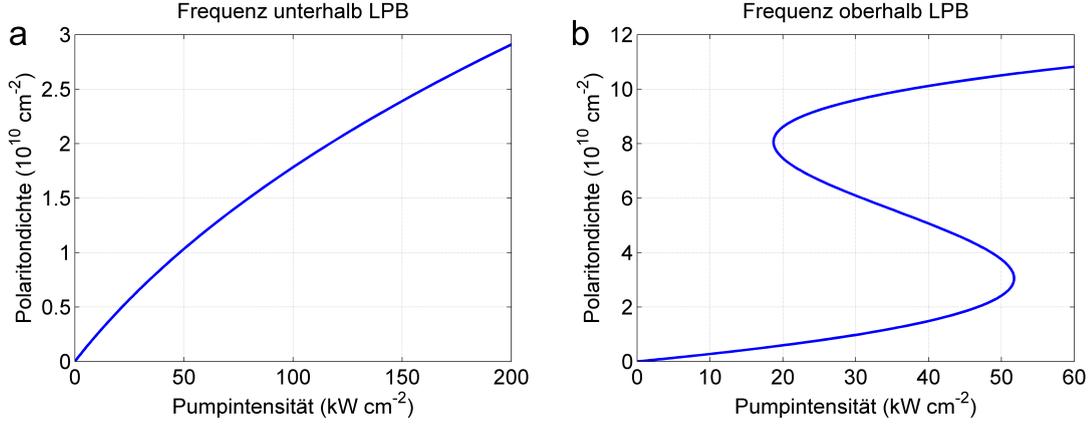


ABBILDUNG 2.2: Gezeigt ist die Abhängigkeit der Polaritondichte  $|\Psi_0|^2$  von der Pumpintensität  $I_{\text{pump}}$  für eine Frequenz, die 2 meV unterhalb (a) bzw. oberhalb (b) des unteren Polaritonzweiges liegt. Letzterer Verlauf bildet eine S-Kurve.

Dieser regt das Polariton-Feld  $\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi_0 \exp(-i\omega_p t)$  an, das ebenfalls über die gesamte Kavität ausgedehnt ist und mit der gleichen Frequenz  $\omega_p$  oszilliert. Für die stationäre Amplitude  $\Psi_0$  ergibt sich, eingesetzt in Gl. 2.18, die kubische Gleichung

$$(\hbar\omega_p - \epsilon_0^p + i\gamma_p - \alpha|\Psi_0|^2) \Psi_0 = \Psi_{\text{pump},0}. \quad (2.19)$$

Hierbei ist  $\epsilon_0^p = \epsilon_0^x - \Omega_x$  gerade das Energieminimum des LPB. Je nach Parameterwahl, sind für  $\Psi_0$  maximal drei verschiedene Lösungen möglich. Der Verlauf der Polaritondichte  $|\Psi_0|^2$  in Abhängigkeit von der Pumpintensität  $I_{\text{pump}}$  ist in Abb. 2.2 für zwei Pumpfrequenzen dargestellt, gerechnet wurde hierbei mit typischen GaAs-Parametern ( $\alpha = 0.0024 \text{ meV}\mu\text{m}^2$ ,  $\gamma_c = 0.8 \text{ meV}$  und  $\gamma_x = 0.2 \text{ meV}$ ). Für eine Frequenz unterhalb von  $\epsilon_0^p$  ( $\hbar\omega_p = \epsilon_0^p - 2 \text{ meV}$ ) steigt  $|\Psi_0|^2$  monoton mit  $I_{\text{pump}}$  (Abb. 2.2 a). Oberhalb von  $\epsilon_0^p$  ( $\hbar\omega_p = \epsilon_0^p + 2 \text{ meV}$ ) kann dieser Verlauf jedoch eine S-Kurve bilden (Abb. 2.2 b), die Zuweisung  $I_{\text{pump}} \rightarrow |\Psi_0|^2$  ist daher nicht mehr eindeutig: Einer einzigen Intensität  $I_{\text{pump}}$  können innerhalb der S-Kurve bis zu drei verschiedene Dichten  $|\Psi_0|^2$  zugeordnet werden. Dieser spezielle Verlauf tritt ab einer Frequenz  $\hbar\omega_p > \epsilon_0^p + \sqrt{3}\gamma_p$  auf [13], wie sich durch eine Analyse von Gl. 2.19 zeigen lässt (Anhang A.2). Der mittlere Ast der S-Kurve in Abb. 2.2 b ist stets instabil, weshalb dieser Verlauf auch als Bistabilität bezeichnet wird [98] (die Stabilität der Lösungen  $|\Psi_0|^2$  wird allgemein in Abschn. 2.4.2 diskutiert).

Diejenige Dichte, die das System tatsächlich annimmt, folgt einer Hystere [13]: Nähert man sich mit der Intensität vom unteren Ast der S-Kurve, verbleibt  $|\Psi_0|^2$  auf dem unteren Ast, und springt nach dessen Ende (oder, wenn die Lösungen auf dem unteren Ast ebenfalls nicht mehr stabil sind) abrupt in den oberen. Befindet sich  $|\Psi_0|^2$  jedoch auf dem oberen Ast, bleibt die Dichte auch bei sinkender Intensität auf dem oberen Ast, und springt bei dessen Ende abrupt in den unteren. In der Optoelektronik bietet diese Bistabilität eine Anwendung als rein optischer Transistor [46]: Für eine Anregung unter

einem bestimmten Winkel ( $\mathbf{k}_p \neq 0$ ) und für eine Pumpintensität innerhalb der S-Kurve kann durch ein zusätzliches, schwaches Eingangssignal zwischen unterem und oberem Ast geschaltet werden.

Für die in Abb. 2.2 gezeigte Pumpintensität  $I_{\text{pump}}$  gilt nach [4]:

$$I_{\text{pump}} = 2\epsilon_0 c n_s |E_{0,\text{inc}}|^2, \quad (2.20)$$

wobei  $E_{0,\text{inc}} = (\hbar t_c)^{-1} E_{\text{pump}}$  dem in die Kavität eindringenden  $E$ -Feld entspricht (siehe Abschn. 2.1). Durch Umstellen von  $\gamma_c = \frac{\hbar^2 t_c^2 \omega_p}{2\epsilon_0 c n_s}$  nach  $\hbar^2 t_c^2$  und Einsetzen in Gl. 2.20, lässt sich zwischen der physikalischen Pumpintensität  $I_{\text{pump}}$  und dem mikroskopischen Quellterm  $|\Psi_{\text{pump}}|^2$  der Zusammenhang

$$I_{\text{pump}} = 2 \frac{\omega_p}{\gamma_c} |\Psi_{\text{pump}}|^2 \quad (2.21)$$

herstellen. Benutzt wurde hierbei, dass  $|E_{\text{pump}}|^2 = 2|\Psi_{\text{pump}}|^2$ .

### 2.3.3 Entartetes Vierwellenmischen

Berücksichtigt man über  $k = 0$  hinaus noch weitere Moden, können die Polaritonen aufgrund ihrer abstoßenden Wechselwirkung untereinander phasenangepasst streuen. Innerhalb unserer  $\chi^{(3)}$ -Halbleiterttheorie [30] führt dies zu dem in der nichtlinearen Optik bekannten Vierwellenmischen (“four-wave mixing”, FWM) [31, 47–50], das experimentell u.a. dazu verwendet werden kann, die Lebensdauer einer kohärenten Polarisation in einem nichtlinearen Medium zu bestimmen. Im Rahmen dieser Arbeit ist das Vierwellenmischen jedoch der grundlegende Mechanismus für optische Instabilität und Musterbildung, weshalb es hier - vorerst in einem optisch stabilen Feld - ausführlich untersucht wird.

Beim Vierwellenmischen bilden drei überlagerte, optische Felder mit den Impulsen  $\mathbf{k}_1$ ,  $\mathbf{k}_2$ , und  $\mathbf{k}_3$  ein viertes Feld mit  $\mathbf{k}_{\text{fwm}} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3$ . Voraussetzung ist hierbei eine Kohärenz der Polarisation in dem nichtlinearen Medium. Sind zwei der auftretenden Felder identisch, spricht man auch von entartetem Vierwellenmischen. Ein Spezialfall, der in diesem Abschnitt behandelt wird, ist die Anwesenheit eines optischen Pumpfeldes  $\mathbf{k}_{\text{pump}}$ , das eine starke Polarisation anregt, und eines wesentlich schwächeren Probefeldes mit  $\mathbf{k}_{\text{probe}}$ . Die Überlagerung beider erzeugt ein Vierwellenmisch-Signal mit  $\mathbf{k}_{\text{fwm}} = 2\mathbf{k}_{\text{pump}} - \mathbf{k}_{\text{probe}}$ .

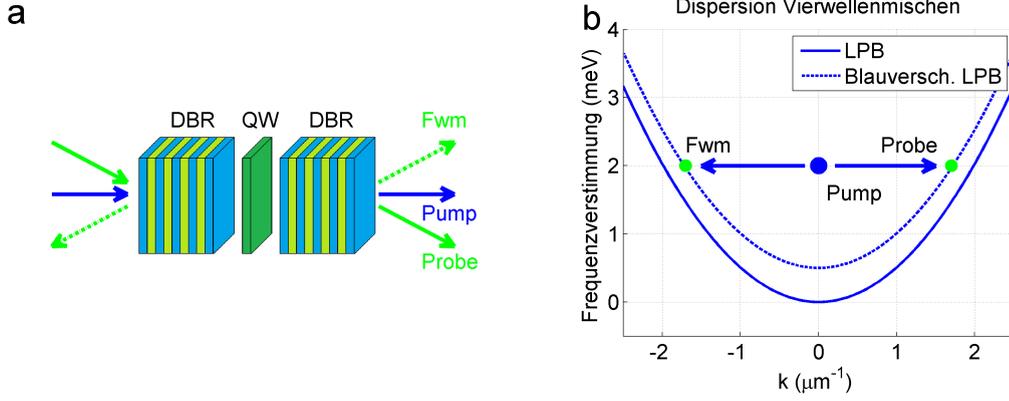


ABBILDUNG 2.3: a zeigt den optischen Aufbau zur Untersuchung von Vierwellenmischen für einen Pump im axialen und einen Probe im nichtaxialen Einfall. Die Reflexionen von Pump und Probe an der Beschichtung wurden vernachlässigt. b zeigt den als parabolisch genäherten LPB und den durch die Pump polaritonen blauverschobenen LPB mit Pump, resonantem Probe und FWM.

Um diesen Fall bei Exziton-Polaritonen zu untersuchen, bietet es sich an, Gl. 2.18 im  $k$ -Raum zu betrachten. Nach einer Fouriertransformation folgt:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_{\mathbf{k}} = (\epsilon_{\mathbf{k}}^p - i\gamma_p) \Psi_{\mathbf{k}} + \alpha \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}''} \Psi_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''-\mathbf{k}}^* \Psi_{\mathbf{k}'} \Psi_{\mathbf{k}''} + \Psi_{\mathbf{k}, \text{pump}}, \quad (2.22)$$

wobei  $\epsilon_{\mathbf{k}}^p = \epsilon_0^p + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_p}$  der als parabolisch genäherten Dispersion des LPB entspricht. Die lokale Nichtlinearität in Gl. 2.18 wird, vgl. Gl. 2.11, zu einer Doppelsumme über alle besetzten Moden  $\mathbf{k}'$ ,  $\mathbf{k}''$ . Diese beinhaltet alle möglichen phasenangepassten (impulserhaltenden) Streuprozesse von  $\mathbf{k}'$  und  $\mathbf{k}''$  nach  $\mathbf{k}' + \mathbf{k}'' - \mathbf{k}$  und  $\mathbf{k}$ .

Ein starker cw-Pump, der senkrecht in die Kavität eindringt ( $\mathbf{k}_{\text{pump}} = 0$ ) und ein schwacher cw-Probe unter schrägem Einfall mit einem endlichen Impuls  $\mathbf{k}_{\text{probe}}$  regen nun die Felder  $\Psi_0$  und  $\Psi_{\mathbf{k}_{\text{probe}}}$  an. Für das Vierwellenmisch-Feld  $\Psi_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}$  bei  $\mathbf{k}_{\text{fwm}} = 2\mathbf{k}_{\text{pump}} - \mathbf{k}_{\text{probe}} = -\mathbf{k}_{\text{probe}}$  ergibt sich die Bewegungsgl.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}} = \left( \epsilon_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}^p + 2\alpha |\Psi_0|^2 - i\gamma_p \right) \Psi_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}} + \alpha \Psi_0^2 \Psi_{\mathbf{k}_{\text{probe}}}^*, \quad (2.23)$$

wobei die Doppelsumme aus Gl. 2.22 für die Impulse  $\mathbf{k}_{\text{pump}} = 0$ ,  $\mathbf{k}_{\text{probe}}$  und  $\mathbf{k}_{\text{fwm}}$  ausgewertet wurde. Unter der Annahme  $|\Psi_0| \gg |\Psi_{\mathbf{k}_{\text{probe}}}|$  wurden in Gl. 2.23 alle auftretenden quadratischen und kubischen Terme in  $\Psi_{\mathbf{k}_{\text{probe}}}$  und  $\Psi_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}$  vernachlässigt. Die hohe Dichte an Pump polaritonen  $|\Psi_0|^2$  bildet ein abstoßendes Potential, aufgrund dessen die Dispersion  $\epsilon_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}^p$  eine Blauverschiebung um  $2\alpha |\Psi_0|^2$  erfährt.

Der Term  $\alpha \Psi_0^2 \Psi_{\mathbf{k}_{\text{probe}}}^*$  ist der Quellterm für das Feld  $\Psi_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}$ , das für stationäre Dichten mit der Frequenz  $\omega_{\text{fwm}} = 2\omega_p - \omega_{\text{probe}}$  oszilliert. Nachfolgend nehmen wir an, dass Pump- und Probefrequenz identisch sind, sodass auch  $\omega_{\text{fwm}} = \omega_{\text{pump}} = \omega_{\text{probe}}$ . Da der Quellterm

$\alpha\Psi_0^2\Psi_{\mathbf{k}_{\text{probe}}}^*$  quadratisch mit dem Pump, jedoch linear mit Probe skaliert, nennen wir den hier untersuchten Prozess auch ‐Lineares Vierwellenmischen‐ (LFWM).

Abb. 2.3 a zeigt den optischen Aufbau eines Vierwellenmisch-Experiments mit einem auf die Kavität senkrecht einfallenden (axialen) Pump und einem schräg einfallenden (nichtaxialen) Probe. Das FWM verlässt die Kavität über die photonische Komponente der Polaritonen in entgegengesetzter Richtung zum Probe. Abb. 2.3 b zeigt ein Beispiel für Pump, Probe und FWM im  $\omega$ - $k$ -Raum, auf das wir uns im Nachfolgenden beschränken werden: Der Pump bei  $k = 0$  liegt hier oberhalb des Energieminimums  $\epsilon_0^p$ . Probe und FWM haben die gleiche Energie (in der Abb.:  $\hbar\omega_p = \epsilon_0^p + 2 \text{ meV}$ ), liegen aber resonant und entgegengesetzt auf der blauverschobenen Polaritondispersion.

Der Probe stimuliert die Pumppolaritonen zu paarweiser energie- und impulserhaltender Streuung, wie sie mit den horizontalen Pfeilen in Abb. 2.3 b dargestellt ist. Bei diesem Prozess streut ein axiales Polariton in die Mode  $\mathbf{k}_{\text{fwm}}$  und erzeugt das FWM-Signal  $\Psi_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}$ , während ein zweites nach  $-\mathbf{k}_{\text{fwm}} = \mathbf{k}_{\text{probe}}$  streut, um den Probe  $\Psi_{\mathbf{k}_{\text{probe}}}$  zu verstärken. Diese Verstärkung wird an der Rückkopplung von  $\Psi_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}$  in der Bewegungsgl. von  $\Psi_{\mathbf{k}_{\text{probe}}}$  deutlich:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi_{\mathbf{k}_{\text{probe}}} = \left(\epsilon_{\mathbf{k}_{\text{probe}}}^p + 2\alpha|\Psi_0|^2 - i\gamma_p\right)\Psi_{\mathbf{k}_{\text{probe}}} + \alpha\Psi_0^2\Psi_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}^* + \Psi_{\text{probe}}. \quad (2.24)$$

Wie in Gl. 2.23 wurden auch hier alle quadratischen und kubischen Terme in  $\Psi_{\mathbf{k}_{\text{probe}}}$  und  $\Psi_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}$  vernachlässigt. Ebenso wie für  $\Psi_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}$  wird die Polaritondispersion  $\epsilon_{\mathbf{k}}^p$  durch die Pumppolaritonen blauverschoben. Abgesehen von der externen Quelle  $\Psi_{\text{probe}}$ , wird  $\Psi_{\mathbf{k}_{\text{probe}}}$  durch den Term  $\alpha\Psi_0^2\Psi_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}^*$  verstärkt - und somit über das eigene FWM. Diese Verstärkung des Probefeldes führt zu einer weiteren Verstärkung des Vierwellenmischens, was wiederum zu einer stärkeren Rückkopplung führt, usw. Innerhalb der  $\chi^{(3)}$ -Theorie treten darum immer auch Nichtlinearitäten beliebig hoher Ordnung auf, wenn die Gln. 2.23 und 2.24 konsistent gelöst werden.

### 2.3.4 Nichtentartetes Vierwellenmischen

Für den Fall eines nichtentarteteten Vierwellenmischens betrachten wir wieder einen optischen Aufbau mit einem starken Pump bei  $\mathbf{k}_{\text{pump}} = 0$ , mit allerdings nicht nur einem, sondern zwei Probes in verschiedenen Moden  $\mathbf{k}_{\text{probe1}}$  und  $\mathbf{k}_{\text{probe2}}$ . Durch den zweiten Probe werden für das Vierwellenmischen auch Kombinationen höherer Ordnung, z.B.  $\mathbf{k}_{\text{fwm}} = \mathbf{k}_{\text{probe1}} + \mathbf{k}_{\text{probe2}} - \mathbf{k}_{\text{pump}} = \mathbf{k}_{\text{probe1}} + \mathbf{k}_{\text{probe2}}$  möglich.<sup>6</sup>

<sup>6</sup>Hier sind auch andere Kombinationen möglich, z.B. bei  $\mathbf{k}_{\text{fwm}} = \mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_{\text{probe1}} - \mathbf{k}_{\text{probe2}}$ . Aus Gründen der Übersichtlichkeit beschränken wir uns nur auf die hier beschriebene.

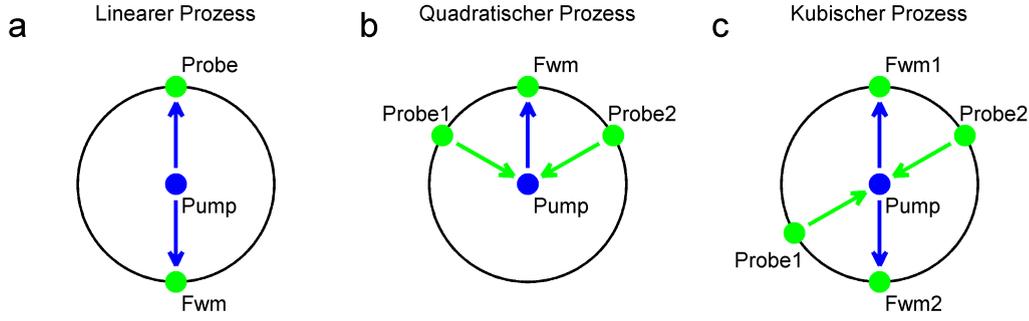


ABBILDUNG 2.4: Schematisch zu sehen sind Streuprozesse verschiedener Ordnungen im Rahmen des  $\chi^{(3)}$ -Modells. Der schwarze Kreis markiert einen Querschnitt des LPB für eine Energie oberhalb des Energieminimums. Die grünen Pfeile symbolisieren einen Einstreu-, die blauen einen Ausstreuvorgang in dem jeweiligen Prozess. Eine ähnliche Grafik findet sich in Quelle [4].

Analog zu Gl. 2.23 lässt sich für diese Art des Vierwellenmischens eine Bewegungsgl. für  $\Psi_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}$  herleiten:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}} = \left( \epsilon_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}^p + 2\alpha |\Psi_0|^2 - i\gamma_p \right) \Psi_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}} + 2\alpha \Psi_0^* \Psi_{\mathbf{k}_{\text{probe1}}} \Psi_{\mathbf{k}_{\text{probe2}}}, \quad (2.25)$$

wobei in der Doppelsumme in Gl. 2.22 nur die Impulse  $\mathbf{k}_{\text{pump}} = 0$ ,  $\mathbf{k}_{\text{probe1}}$  und  $\mathbf{k}_{\text{probe2}}$  und  $\mathbf{k}_{\text{fwm}}$  berücksichtigt wurden. Vernachlässigt wurden bei der Auswertung alle kubischen Terme in  $\Psi_{\mathbf{k}_{\text{probe1}}}$ ,  $\Psi_{\mathbf{k}_{\text{probe2}}}$ ,  $\Psi_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}$  und alle Mischterme der eben genannten. Der Quellterm von  $\Psi_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}$  skaliert linear im Pump, dafür aber bilinear in den schwachen Feldern  $\Psi_{\mathbf{k}_{\text{probe1}}}$  und  $\Psi_{\mathbf{k}_{\text{probe2}}}$ . Deswegen wird  $\Psi_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}$  auch als “sekundäres” [2] oder “quadratisches Vierwellenmischen” [4] (QFWM) bezeichnet. Der Quellterm oszilliert mit einer Frequenz von  $\omega_{\text{fwm}} = \omega_{\text{probe1}} + \omega_{\text{probe2}} - \omega_p$ , wobei wir auch hier desweiteren annehmen, dass alle vier Frequenzen identisch sind.

So wie das lineare Vierwellenmischen als ein stimulierter Streuvorgang zweier Pump polaritonen in zwei nichtaxiale Moden zu verstehen ist, so kann man das quadratische Vierwellenmischen als ein stimuliertes Streuen zweier nichtaxialer Moden in eine andere nichtaxiale und in die axiale Mode verstehen. Abb. 2.4 zeigt einen schematischen Überblick über den in Abschn. 2.3.3 diskutierten linearen Prozess (a), den hier soeben behandelten quadratischen Prozess (b) und einen Prozess kubischer Ordnung (c), bei dem zwei nichtaxiale Polaritonen in zwei andere nichtaxiale Moden streuen.

Während ein resonanter, linearer Streuprozess lediglich durch einen resonanten Probe stimuliert werden kann, herrscht für den quadratischen Prozess eine geometrische Einschränkung: Hier müssen nicht nur die beiden Proben resonant sein, sondern auch aufgrund der Impulserhaltung  $\mathbf{k}_{\text{fwm}} = \mathbf{k}_{\text{probe1}} + \mathbf{k}_{\text{probe2}}$  in einer hexagonalen Geometrie

liegen, damit für  $\mathbf{k}_{\text{fwm}}$  die Resonanzbedingung ebenfalls erfüllt ist. Eine solche hexagonale Geometrie ist in Abb. 2.4 b dargestellt:  $\mathbf{k}_{\text{probe1}}$ ,  $\mathbf{k}_{\text{probe2}}$  und  $\mathbf{k}_{\text{fwm}}$  bilden zusammen drei benachbarte Punkte eines regulären Hexagons. Für den kubischen Prozess gilt eine solche Einschränkung wiederum nicht. Eine ausführliche Beschreibung dieses Streuprozesses findet sich in Quelle [4].

Um das anhand der vereinfachten GPE diskutierte Vierwellenmischen numerisch zu untersuchen, lassen sich die gekoppelten Gln. 2.12 und 2.13 mit Hilfe des Runge-Kutta-Verfahrens vierter Ordnung [51] auf einem Gitter im Ortsraum lösen. Im Falle des linearen Vierwellenmischen setzen wir für den Pump den Ansatz

$$E_{\text{pump}}(\mathbf{r}, t) = \left( E_{\text{pump},0} + E_{\text{probe}} e^{i\mathbf{k}_{\text{probe}} \cdot \mathbf{r}} \right) e^{-i\omega_p t} \quad (2.26)$$

ein, für das quadratische Vierwellenmischen

$$E_{\text{pump}}(\mathbf{r}, t) = \left( E_{\text{pump},0} + E_{\text{probe1}} e^{i\mathbf{k}_{\text{probe1}} \cdot \mathbf{r}} + E_{\text{probe2}} e^{i\mathbf{k}_{\text{probe2}} \cdot \mathbf{r}} \right) e^{-i\omega_p t}. \quad (2.27)$$

Hierbei sind  $E_{\text{pump},0}$ ,  $E_{\text{probe}}$ ,  $E_{\text{probe1}}$  und  $E_{\text{probe2}}$  endliche Ortsraumprofile. Für die Details zur numerischen Implementierung von Gl. 2.12 und 2.13, siehe Anhang B.

Abb. 2.5 zeigt die Ergebnisse für stationäre Dichten im Orts- und  $k$ -Raum in den beiden untersuchten Fällen, ferner die Phase der Felder im  $k$ -Raum zu einem beliebig gewählten Zeitpunkt. Gerechnet wurde auf einem Gitter mit 300 Stützstellen und einer Ausdehnung  $L = 60 \mu\text{m}$  in beiden Richtungen. Die Dichten wurden hierbei in weniger als 100 ps stationär. Die verwendete Kopplungskonstante betrug wie in Abschn. 2.2  $\Omega_x = 6.5 \text{ meV}$ , die Zerfallsraten  $\gamma_c = 0.8 \text{ meV}$  und  $\gamma_x = 0.2 \text{ meV}$ . Die Frequenz  $\hbar\omega_p = \epsilon_0^x - 4.0 \text{ meV}$  wurde  $2.5 \text{ meV}$  über dem LPB-Minimum gewählt, was (inklusive Blauverschiebung) einer Resonanz bei ungefähr  $k \approx 2.3 \mu\text{m}^{-1}$  entspricht. Die Pumpintensität liegt im Maximum des Ortsraumsprofils  $|E_{\text{pump},0}|^2$  bei  $I_{\text{pump}} = 25.52 \text{ kWcm}^{-2}$ , was einer maximalen Exzitondichte von  $|p|^2 = 0.36 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2}$  entspricht.<sup>7</sup> Für die Details der numerischen Implementierung, siehe Anhang B.

Abb. 2.5 a zeigt die Exzitonendichte  $|p|^2$  im Ortsraum für eine Rechnung mit nur einem einzelnen Probe, der in vertikaler Richtung auf die Kavität auftrifft. Die Intensität des Probes beträgt  $|E_{\text{probe}}|^2 = 10^{-4} |E_{\text{pump}}|^2$ . Aufgrund der Interferenz mit dem Pumpfeld bildet sich ein horizontales Streifenmuster. Im  $k$ -Raum (Abb. 2.5 c) ist (in logarithmischer Skala) neben dem Pump bei  $\mathbf{k} = 0$  und dem Probe bei  $\mathbf{k} = (0|2.3) \mu\text{m}^{-1}$  auch das LFWM bei  $\mathbf{k} = (0|-2.3) \mu\text{m}^{-1}$  zu sehen. Um das quadratische Vierwellenmischen zu untersuchen, wurde die Intensität der beiden Probes, Probe1 und Probe2, mit  $|E_{\text{probe1}}|^2 = |E_{\text{probe2}}|^2 = 0.04 |E_{\text{pump}}|^2$  höher gewählt. Die Probes liegen, wie in

<sup>7</sup>Für eine Rechnung ohne Probe.

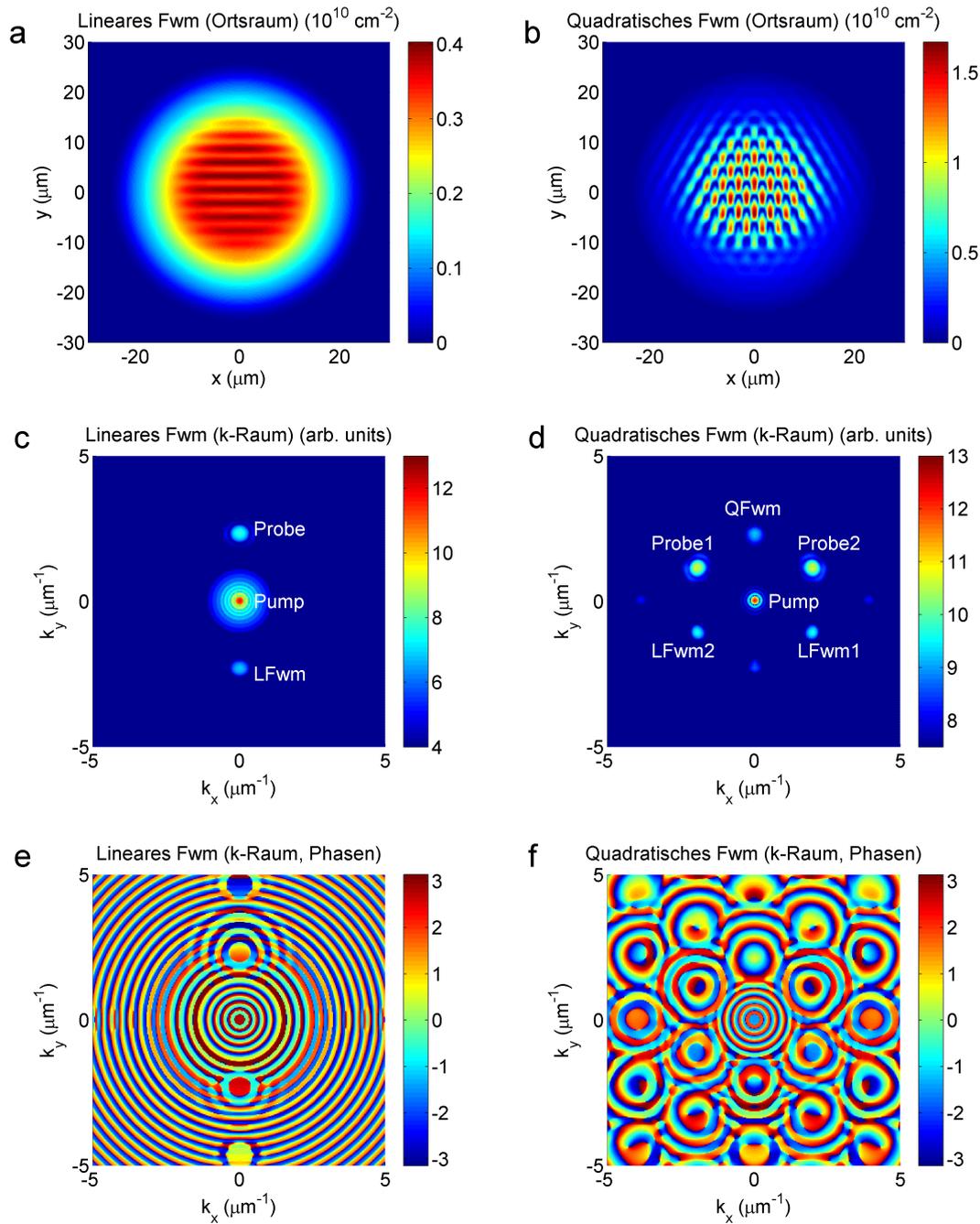


ABBILDUNG 2.5: Simulationen zum linearen (a,c,e) und quadratischen (b,d,f) Vierwellenmischen. Die stationäre Dichte  $|p|^2$  wird zur Zeit  $t = 200 \text{ ps}$  sowohl im Ortsraum (a,b) als auch logarithmisch im  $k$ -Raum (c,d) dargestellt. e und f zeigen die Phase von  $p$ , die eine feste Beziehung zwischen Pump, Probe(s) und FWM ausbildet.

Abb. 2.4 gezeigt, in hexagonaler Geometrie. Im Ortsraum (Abb. 2.5 b) ist als Lösung für diesen Fall nun ein komplizierteres Muster zu erkennen, da sich mehrere Felder überlagern. Im  $k$ -Raum sieht man die beiden Probes bei  $\mathbf{k} = 2.3 (\cos \frac{\pi}{6} | \sin \frac{\pi}{6}) \mu\text{m}^{-1}$  und  $\mathbf{k} = 2.3 (-\cos \frac{\pi}{6} | \sin \frac{\pi}{6}) \mu\text{m}^{-1}$ , dazu die linearen Vierwellenmisch-Felder LFWM1 und LFWM2 in jeweils entgegengesetzter Richtung. Das QFWM liegt wie erwartet bei  $\mathbf{k} = (0|2.3) \mu\text{m}^{-1}$ .

Die Phasenbeziehung zwischen Pump, Probe und FWM wurde bislang noch nicht diskutiert. Diese analysieren wir basierend auf den Gln. 2.23 und 2.25: Für eine stationäre Dichte  $|\Psi_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}|^2$  oszilliert die Phase mit der Pumpfrequenz, daraus folgt  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}} = \hbar\omega_p \Psi_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}$ . Im Falle einer resonanten Anregung entspricht die Frequenz gerade  $\hbar\omega_p = \epsilon_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}^p + 2\alpha|\Psi_0|^2$ . Eingesetzt in Gl. 2.23 und 2.25 ergeben sich die Beziehungen

$$i\gamma_p \Psi_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}^L = \alpha \Psi_0^2 \Psi_{\mathbf{k}_{\text{probe}}}^* \quad (2.28)$$

$$i\gamma_p \Psi_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}^Q = 2\alpha \Psi_0^* \Psi_{\mathbf{k}_{\text{probe1}}} \Psi_{\mathbf{k}_{\text{probe2}}} \quad (2.29)$$

für die Amplitude des linearen ( $\Psi_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}^L$ ) bzw. quadratischen Vierwellenmischens ( $\Psi_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}^Q$ ). Mit  $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$  lassen sich aus den Gleichungen 2.28 und 2.29 die Phasenbeziehungen

$$\Phi_{\text{fwm}}^L = 2\Phi_0 - \Phi_{\text{probe}} - \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad (2.30)$$

$$\Phi_{\text{fwm}}^Q = \Phi_{\text{probe1}} + \Phi_{\text{probe2}} - \Phi_0 - \frac{\pi}{2} + 2\pi n \quad (2.31)$$

herleiten. Hierbei sind  $\Phi_{\text{fwm}}^L$  und  $\Phi_{\text{fwm}}^Q$  jeweils die Phasen von  $\Psi_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}^L$  und  $\Psi_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}^Q$  und die Phasen  $\Phi_0$ ,  $\Phi_{\text{probe}}$ ,  $\Phi_{\text{probe1}}$  und  $\Phi_{\text{probe2}}$  gehören jeweils zu den Feldern  $\Psi_0$ ,  $\Psi_{\mathbf{k}_{\text{probe}}}$ ,  $\Psi_{\mathbf{k}_{\text{probe1}}}$  und  $\Psi_{\mathbf{k}_{\text{probe2}}}$ . Die Phase ist bis auf ein Vielfaches von  $2\pi$  eindeutig, so dass  $n$  in den Gln. 2.31 und 2.31 eine ganze Zahl ist.

In Abb. 2.5 e und f sind die Phasen der Exzitonen im  $k$ -Raum aufgetragen. Für das lineare FWM (Abb. 2.5 e) ergibt sich im Bogenmaß:  $\Phi_0 = 2.75$ ,  $\Phi_{\text{probe}} = 1.33$  und  $\Phi_{\text{fwm}}^L = 2.50$ . Setzt man  $\Phi_0 = 2.75$  und  $\Phi_{\text{probe}} = 1.33$  allerdings in Gl. 2.31 ein, ergibt sich mit  $\Phi_{\text{fwm}}^L = 2.60$  eine leichte Abweichung. Für das quadratische FWM (Abb. 2.5 f) lassen sich die Werte  $\Phi_0 = -1.39$  und  $\Phi_{\text{probe1}} = \Phi_{\text{probe2}} = 3.14$  ablesen. Das quadratische FWM hat eine Phase von  $\Phi_{\text{fwm}}^Q = -0.11$ , wobei sie theoretisch (Gl. 2.31)  $\Phi_{\text{fwm}}^Q = -0.18$  betragen müsste. Die Abweichungen in der Größenordnung von 0.1 in beiden Fällen ergeben sich einerseits aus den Näherungen in der Theorie (Vernachlässigung der quadratischen und kubischen Terme), andererseits in möglichen Abweichungen von der Resonanz. Die in Abschn. 2.3.3 diskutierte Rückkopplung wurde ebenfalls nicht in Betracht gezogen. Eine weitere Fehlerquelle sind speziell im quadratischen Fall die für das QFWM vernachlässigten Beiträge von LFWM1 und LFWM2 (Abb. 2.5 d).

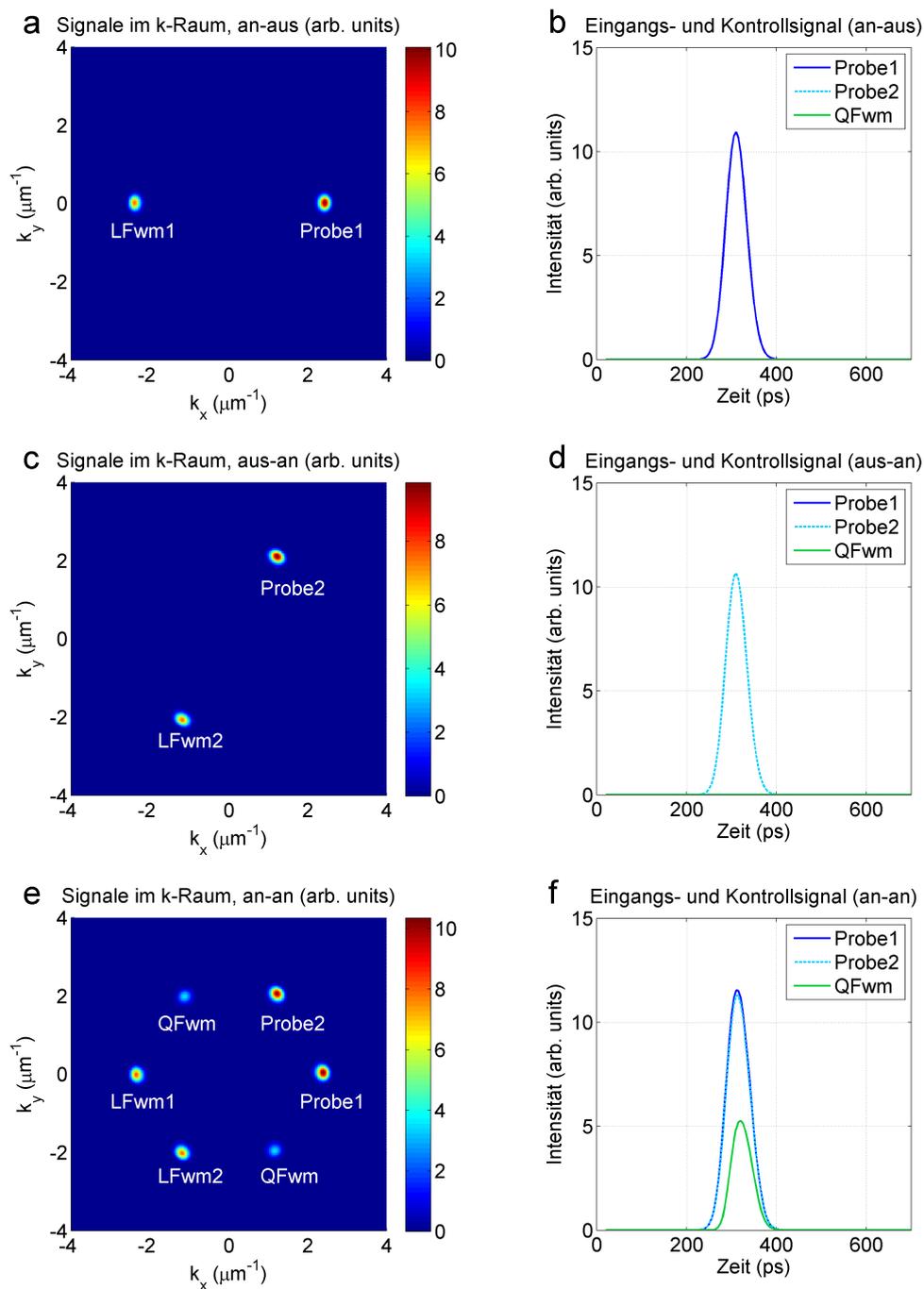


ABBILDUNG 2.6: QFWM als UND-Gatter. Gezeigt sind die drei möglichen Fälle an/aus (a und b), aus/an (c und d) und an/an (e und f). Jeweils links ist eine Momentaufnahme im  $k$ -Raum zu sehen, jeweils rechts der zeitliche Verlauf der Intensität der Ein- und Ausgangssignale.

Abgesehen von einigen quantitativen Abweichungen ist die Gross-Pitaevskii-Gl. (Gl. 2.18) somit sehr geeignet, nichtlineare Effekte analytisch zu beschreiben. Sie wird zu diesem Zweck in dieser Arbeit darum häufiger verwendet, während für die numerischen Rechnungen das gekoppelte System bestehend aus  $E$  und  $p$ -Feld (Gln. 2.12 und 2.13) gelöst wird.

### 2.3.5 Quadratisches Vierwellenmischen als optisches UND-Gatter

Da für das quadratische Vierwellenmischen zwei Probes nötig sind, lässt es sich prinzipiell als Kontrollsignal für die Realisierung eines UND-Gatters in rein optischen Schaltkreisen verwenden. Zu diesem Zweck betrachten wir ein konstant gepumptes Polaritonfeld bei  $k = 0$ , aber zeitlich gepulste Probes als Eingangssignale mit einer Halbwertsbreite von 50 ps. Diese sind in hexagonaler Geometrie angeordnet und können wahlweise vereinzelt oder gemeinsam auf die Kavität auftreffen. Ein durch das quadratische Vierwellenmischen erzeugter Kontrollpuls (QFWM) entsteht jedoch nur für ein gleichzeitiges Auftreffen beider Probes.

Abb. 2.6 (a,c,e) zeigt eine Momentaufnahme der photonischen Komponente von Probe(s) und Fwm im  $k$ -Raum kurz nach Eintreffen der Eingangspulse. Der Pump bei  $k = 0$  ist der Übersicht wegen ausgeblendet. Ist nur ein Eingangssignal an (Probe1 in Abb. 2.5 a oder Probe2 in Abb. 2.5 c) bildet sich nur das lineare Vierwellenmischen (LFWM1 bzw. LFWM2), während das Kontrollsignal ausbleibt.  $\mathbf{k}_{\text{probe1}}$  und  $\mathbf{k}_{\text{probe2}}$  schließen dabei einen Winkel von  $60^\circ$  ein. Im Falle beider Eingangssignale (Abb. 2.5 c) bildet sich ein Hexagon bestehend aus Probe1, Probe2, LFWM1, LFWM2 und zwei Kontrollsignalen (QFWM). Abb. 2.6 (b,d,f) zeigt die zeitabhängigen Intensitäten von Probe1, Probe2 und einem QFWM. Für eine in Vergleich zu Abb. 2.5 höhere axiale Polaritondichte ( $|p|^2 = 0.74 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2}$ ) werden die linearen und quadratischen Streuprozesse stärker. Die Kontrollsignale erreichen dadurch nahezu die selbe Größenordnung wie die Eingangssignale. In dem gezeigten Beispiel ist das QFWM, das sich nur um wenige ps verzögert bildet, nur noch um einen Faktor 2.5 schwächer.

## 2.4 Lineare Stabilitätsanalyse (LSA)

Die durch den linearen Streuprozess verursachte Rückkopplung des LFWM (vgl. Abschn. 2.3.3) kann - abhängig von der Pumpintensität - den Zerfall eines flüchtigen, nichtaxialen Polaritonfeldes relevant verlangsamen. Diese "Verlangsamung" kann auch als eine effektive Reduktion der polaritonischen Zerfallsrate  $\gamma_p$  zu  $\gamma_p^{\text{eff}}$  aufgefasst werden. Dieser Abschnitt stellt, anhand der Gross-Pitaevskii-Gl. für ein homogenes Pumpfeld mit stationärer Dichte, eine quantitative Bestimmung von  $\gamma_p^{\text{eff}}$  vor: Die lineare Stabilitätsanalyse (LSA), die bereits in den Quellen [10, 52, 53] angewandt wurde.

"Stabilitätsanalyse" darum, weil mit ihrer Hilfe auch die optische Stabilität homogener Polaritonfelder bewertet werden kann: Ist der lineare Streuprozess so stark, dass er nichtaxiale Felder über ihren Zerfall hinaus verstärkt, wird  $\gamma_p^{\text{eff}} < 0$ , was zu einem

exponentiellen Anwachsen kleiner Störungen führt. Kann dieser Prozess eintreten, so spricht man von optischer Instabilität [54, 55].

### 2.4.1 LSA anhand der Gross-Pitaevskii-Gleichung

Um die optische Stabilität zu untersuchen, nehmen wir ein axiales und homogenes Polaritonfeld  $\Psi_0$  an, dass durch ein schwaches Rauschen  $\Psi_{\text{noise}}$  mit einem beliebigen, aber festen Impuls  $\mathbf{k}$  gestört wird. Weiterhin nehmen wir an, dass  $\Psi_{\text{noise}}$  mit der selben Frequenz  $\omega_p$  oszilliert. Zusätzlich zu  $\Psi_{\text{noise}}$  wird  $\Psi_0$  auch mit  $\Psi_{\text{fwm}}$  als dem Vierwellenmischen mit einem Impuls  $\mathbf{k}_{\text{fwm}} = -\mathbf{k}$  überlagert (Abschn. 2.3.3).

Folglich gilt für das gesamte Feld:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \left( \Psi_0 + \Psi_{\text{noise}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \Psi_{\text{fwm}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \right) e^{-i\omega t}. \quad (2.32)$$

Setzt man diesen Ansatz in die Gross-Pitaevskii Gl. 2.18 ein, lässt sich unter bestimmten Näherungen eine gekoppelte Bewegungsgl. für  $\Psi_{\text{noise}}$  und  $\Psi_{\text{fwm}}$  herleiten. Diese Näherungen sind: (i) Das homogene Feld  $\Psi_0$  bleibt zeitlich konstant, da es durch das Rauschen nicht wesentlich beeinflusst wird. (ii) Das axiale Feld ist wesentlich stärker als jegliche Störung ( $|\Psi_0|^2 \gg |\Psi_{\text{noise}}|^2$  bzw.  $|\Psi_{\text{fwm}}|^2$ ). Aufgrund dieser Näherung können Terme, die quadratisch oder kubisch in  $\Psi_{\text{noise}}$  und in  $\Psi_{\text{fwm}}$  auftreten und äquivalente Mischterme vernachlässigt werden.

Die Dynamik von  $\Psi_{\text{noise}}$  und  $\Psi_{\text{fwm}}$  lässt sich dann durch die lineare Differentialgleichung

$$\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \Psi_{\text{noise}} \\ \Psi_{\text{fwm}}^* \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} \Delta\epsilon_{\mathbf{k}} & \alpha\Psi_0^2 \\ -\alpha\Psi_0^{*2} & -\Delta\epsilon_{\mathbf{k}}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_{\text{noise}} \\ \Psi_{\text{fwm}}^* \end{pmatrix} \equiv \mathbb{M} \begin{pmatrix} \Psi_{\text{noise}} \\ \Psi_{\text{fwm}}^* \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

beschreiben. Hierbei ist der Realteil von  $\Delta\epsilon_{\mathbf{k}} = \epsilon_{\mathbf{k}}^p + 2\alpha|\Psi_0|^2 - \hbar\omega_p - i\gamma_p$  die Frequenzverstimmung zur blauverschobenen Polaritondispersion, der Imaginärteil entspricht der negativen Zerfallsrate  $-\gamma_p$  der Polaritonen. Für eine Herleitung von Gl. 2.33 siehe Anhang A.3. Die Eigenwerte von  $\mathbb{M} = \mathbb{M}(\mathbf{k})$  lauten:

$$\beta_{\pm}(\mathbf{k}) = -\gamma_p \pm \sqrt{\alpha^2|\Psi_0|^4 - (\Re\Delta\epsilon_{\mathbf{k}})^2}. \quad (2.34)$$

Ein Spezialfall von Gl. 2.33 liegt dann vor, wenn  $(\Psi_{\text{noise}}, \Psi_{\text{fwm}}^*)^T$  gerade ein Eigenvektor der Matrix  $\mathbb{M}$  ist. Die effektive Wachstumsrate  $\beta(\mathbf{k}) \equiv -\gamma_p^{\text{eff}}(\mathbf{k})$ , mit der die Felder  $\Psi_{\text{noise}}$  und  $\Psi_{\text{fwm}}^*$  (je nach Vorzeichen) entweder gleichmäßig anwachsen oder abklingen, entspricht in diesem Fall dem dazugehörigen Eigenwert. Die Diskriminante in Gl. 2.34,  $\alpha^2|\Psi_0|^4 - (\Re\Delta\epsilon_{\mathbf{k}})^2$ , wird maximal für  $\Re\Delta\epsilon_{\mathbf{k}} = 0$ , d.h. wenn der Impuls  $\mathbf{k}$  des Feldes  $\Psi_{\text{noise}}$  gerade auf der blauverschobenen Dispersion liegt. In diesem Fall wird  $\mathbb{M}$  auch hermitesch,

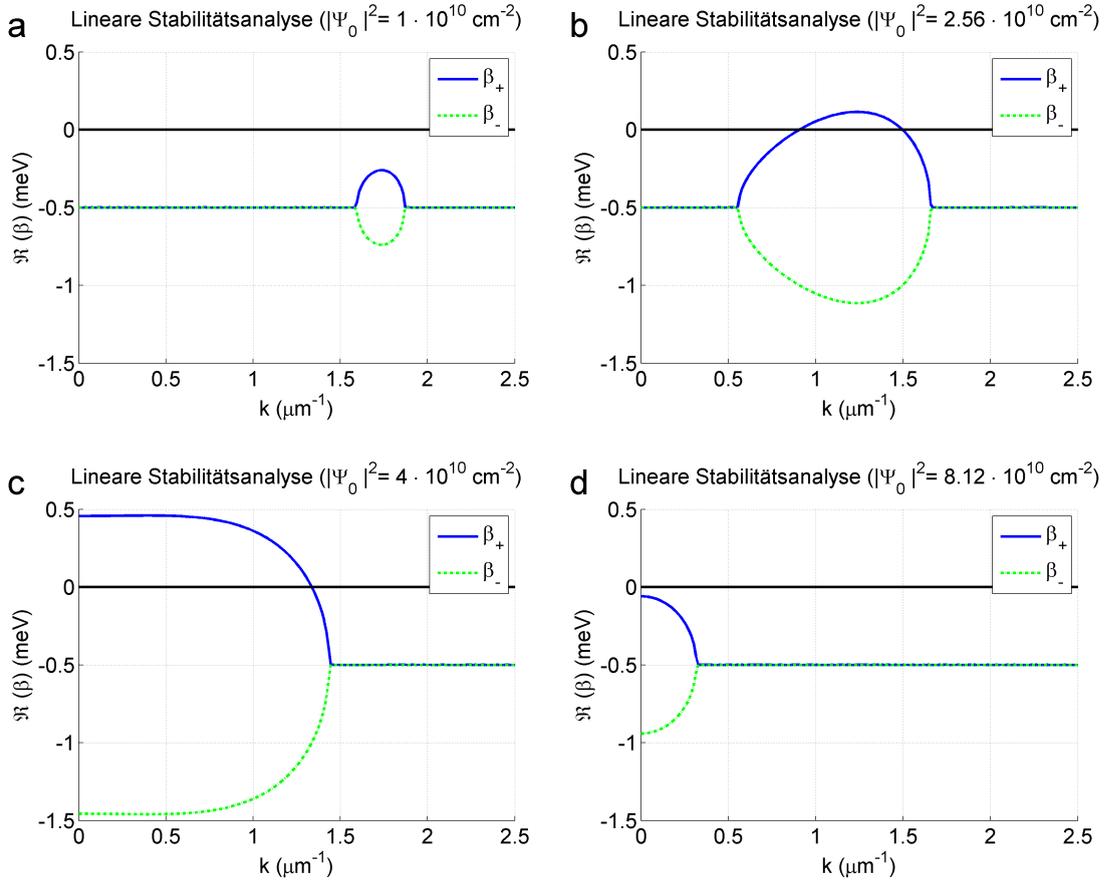


ABBILDUNG 2.7: Mit der LSA nach Gl. 2.34 bestimmte Wachstumsraten  $\beta_{\pm}(k)$  (nur Realteil) für verschiedene Dichten  $|\Psi_0|^2$ . Zur Unterscheidung zwischen stabilen und instabilen Feldern  $\Psi_0$  wurde die Nulllinie schwarz gekennzeichnet.

was den Vorteil hat, dass die Eigenvektoren eine Orthonormalbasis von  $\mathbb{C}^2$  bilden, in die sich jeder beliebige Vektor  $(\Psi_{\text{noise}}, \Psi_{\text{fwm}}^*)^T$  zerlegen lässt: Diese Eigenvektoren sind für ein reelles  $\Psi_0$  jeweils  $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mp i, 1)^T$ .

Für den höheren Eigenwert reduziert sich für  $\Re\Delta\epsilon_k = 0$  die effektive Zerfallsrate in Gl. 2.34 zu  $\gamma_p^{\text{eff}} = \gamma_p - \alpha|\Psi_0|^2$ . Der dazugehörige Eigenvektor  $\frac{1}{\sqrt{2}}(-i, 1)^T$  erfüllt gerade die Phasenbedingung  $\Phi_{\text{fwm}} = 2\Phi_0 - \Phi_{\text{noise}} - \frac{\pi}{2}$  für eine Rückkopplung zwischen  $\Psi_{\text{noise}}$  und  $\Psi_{\text{fwm}}$ , wie sie in Abschn. 2.3.4 diskutiert wurde. Die Phasenbeziehung für den Eigenvektor des niedrigeren Eigenwerts,  $\frac{1}{\sqrt{2}}(i, 1)^T$ , entspricht hingegen einer destruktiven Rückkopplung: Bei dieser schwächen die stimulierten Streuprozesse  $\Psi_{\text{noise}}$  und  $\Psi_{\text{fwm}}$  durch destruktive Interferenz ab, wodurch sich die effektive Zerfallsrate auf  $\gamma_p^{\text{eff}} = \gamma_p + \alpha|\Psi_0|^2$  erhöht.

Falls  $(\Re\Delta\epsilon_k)^2 > \alpha^2|\Psi_0|^4$ , wird  $\beta_{\pm}(k)$  komplexwertig. Der auftretende Imaginärteil entspricht einer Verschiebung  $\hbar\Delta\omega = \sqrt{(\Re\Delta\epsilon_k)^2 - \alpha^2|\Psi_0|^4}$  der Frequenzen  $\omega_{\text{noise}} = \omega_p \pm \Delta\omega$  und  $\omega_{\text{fwm}} = \omega_p \mp \Delta\omega$ . Diese Verstimmung wird für polarisationsabhängige Felder in Kap.

3 diskutiert. Abb. 2.7 zeigt die Realteile von  $\beta_{\pm}(\mathbf{k})$  in Abhängigkeit von  $k$  für vier verschiedene Dichten  $|\Psi_0|^2$ . Die Frequenz liegt wie in Abb. 2.3 b  $\hbar\omega_p = \epsilon_0^p + 2$  meV über dem LPB, so dass resonantes Streuen in nichtaxiale Moden ermöglicht wird. In Abb. 2.7 a ist bereits bei einer geringen Dichte die Aufspaltung in  $\Re\beta_+$  und  $\Re\beta_-$  für  $k \approx 1.7 \mu\text{m}^{-1}$  zu erkennen. Die effektive Zerfallsrate  $\gamma_p^{\text{eff}}$  weicht nur in diesem kleinen Bereich von  $\gamma_p = 0.5$  meV ab. Für steigende Dichten nimmt die Aufspaltung immer weiter zu, wobei sich aufgrund der stärker werdenden Blauverschiebung die Scheitelpunkte von  $\Re\beta_+$  und  $\Re\beta_-$  zu kleineren  $k$  verschieben. Oberhalb einer Schwellendichte  $|\Psi_0|^2 > \alpha^{-1}\gamma_p$  wird  $\beta_+$  erstmals positiv (Abb. 2.7 b). Die einstreuen Pump polaritonen werden hierbei so zahlreich, dass die Feldstärke von  $\Psi_{\text{noise}}$  und  $\Psi_{\text{fwm}}$  aufgrund ihrer gegenseitigen Rückkopplungen divergiert. Da in diesem Fall geringe Dichtefluktuationen bei  $k \approx 1.2 \mu\text{m}^{-1}$  beginnen, exponentiell anzuwachsen, kann das homogene Feld  $\Psi_0$  als instabil bewertet werden. Ab einer Dichte von

$$|\Psi_0|^2 = \frac{2\hbar\omega_p - \epsilon_0^p}{3\alpha} - \sqrt{\frac{1}{9} \left( \frac{\hbar\omega_p - \epsilon_0^p}{\alpha} \right)^2 - \frac{1}{3} \left( \frac{\gamma_p}{\alpha} \right)^2} \quad (2.35)$$

ist ein neuer Bereich hervorzuheben: Hier ist  $\Re\beta_+$  schon bei  $k = 0$  größer als 0 (Abb. 2.7 c). Das hat zur Folge, dass  $\Psi_0$  bereits für homogene Dichteschwankungen instabil wird, sodass es nicht mehr durch ein Filtern nichtaxialer Moden stabilisiert werden kann. Wir bezeichnen diese Art der Instabilität auch als axiale Instabilität. Bei noch höheren Dichten  $|\Psi_0|^2$  kann die Blauverschiebung den LPB über das energetische Niveau der Frequenz  $\hbar\omega_p$  hinaus erhöhen. Das hat zur Folge, dass die Pump polaritonen nicht mehr resonant streuen können. Daher wird  $\Psi_0$  ab einer Dichte von

$$|\Psi_0|^2 = \frac{2\hbar\omega_p - \epsilon_0^p}{3\alpha} + \sqrt{\frac{1}{9} \left( \frac{\hbar\omega_p - \epsilon_0^p}{\alpha} \right)^2 - \frac{1}{3} \left( \frac{\gamma_p}{\alpha} \right)^2} \quad (2.36)$$

wieder stabil: Wie in Abb. 2.7 d zu sehen, gilt wieder überall  $\Re\beta_+ < 0$ . Der Dichtebereich für die optische Instabilität hat daher eine untere und eine obere Grenze.

### 2.4.2 LSA für die gekoppelten Bewegungsgleichungen

Eine lineare Stabilitätsanalyse lässt sich nicht nur für die Gross-Pitaevskii-Gl., sondern auch für die gekoppelten Bewegungsgln. der Photonen und Exzitonen (Gln. 2.12 und 2.13) durchführen. Anstelle des homogenen Polaritonfeldes  $\Psi_0$  betrachten wir dazu die homogenen Felder  $E_0$  und  $p_0$ , die in einer festen Größen- und Phasenbeziehung zueinander stehen und über ein homogenes Feld  $E_{\text{pump}}$  angeregt werden. Das Störfeld  $\Psi_{\text{noise}}$  lässt sich ebenfalls in einen photonischen ( $E_{\text{noise}}$ ) und exzitonischen Anteil ( $p_{\text{noise}}$ ) zerlegen. Bezieht man analog zu Gl. 2.32 das Vierwellenmischen ( $E_{\text{fwm}}$  und  $p_{\text{fwm}}$ ) mit ein,

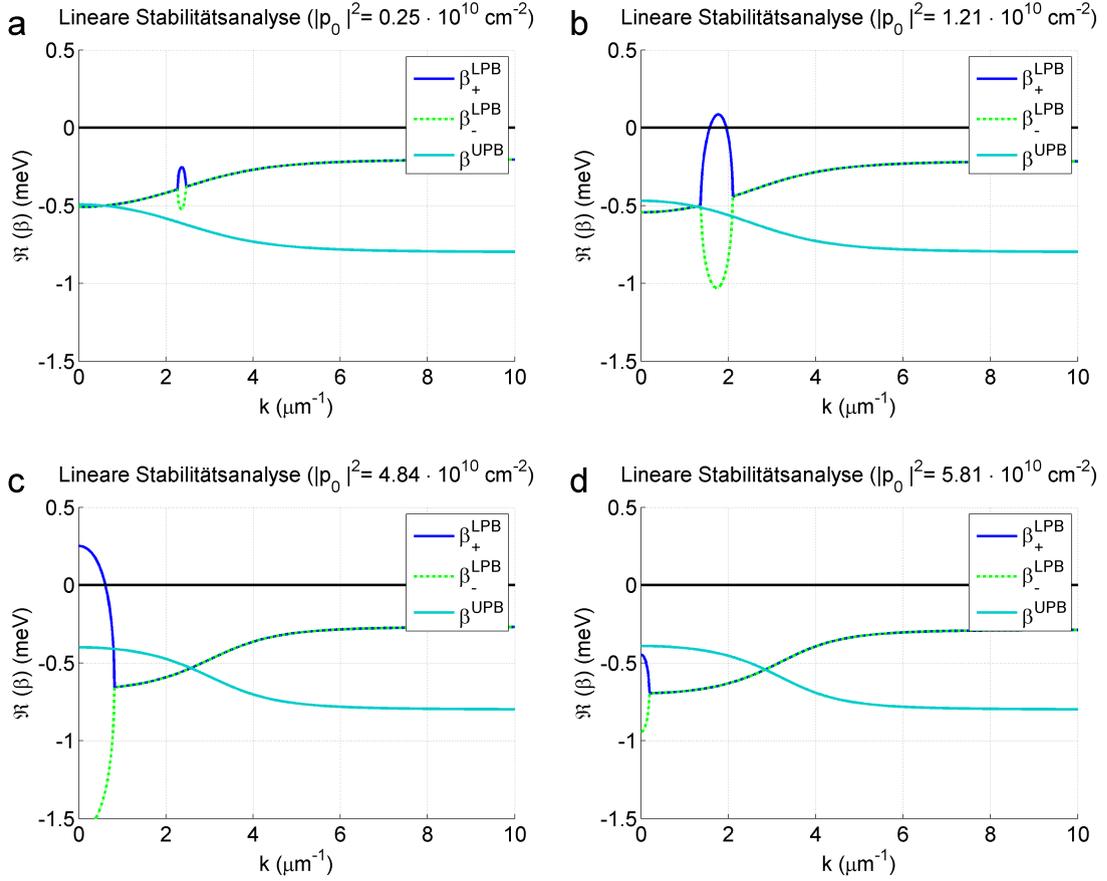


ABBILDUNG 2.8: Mit der LSA für die gekoppelten Gln. bestimmte Wachstumsraten für den unteren ( $\beta_{\pm}^{\text{LPB}}$ ) und oberen ( $\beta^{\text{UPB}}$ ) Polaritonzweig (nur Realteil). Betrachtet wurden verschiedene Exzitonendichten  $|p_0|^2$ . Wie in Abb. 2.7 wurde die Nulllinie schwarz markiert.

lässt sich die Superposition dieser Felder schreiben als:

$$E(\mathbf{r}, t) = \left( E_0 + E_{\text{noise}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + E_{\text{fwm}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \right) e^{-i\omega t} \quad (2.37)$$

$$p(\mathbf{r}, t) = \left( p_0 + p_{\text{noise}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + p_{\text{fwm}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \right) e^{-i\omega t}, \quad (2.38)$$

wobei auch hier angenommen wurde, dass alle Felder mit der selben Frequenz  $\omega_p$  oszillieren. Wie für  $\Psi_{\text{noise}}$  und  $\Psi_{\text{fwm}}^*$  in Gl. 2.33, lässt sich unter Vernachlässigung aller quadratischen und kubischen Terme in Stör- und Vierwellenmischfeldern ebenfalls eine lineare Differentialgleichung für  $E_{\text{noise}}$ ,  $p_{\text{noise}}$ ,  $E_{\text{fwm}}^*$  und  $p_{\text{fwm}}^*$  herleiten:

$$\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} E_{\text{noise}} \\ E_{\text{fwm}}^* \\ p_{\text{noise}} \\ p_{\text{fwm}}^* \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} \Delta \hbar \omega_{\mathbf{k}}^c & 0 & -\Omega_x & 0 \\ 0 & -\Delta \hbar \omega_{\mathbf{k}}^{c*} & 0 & \Omega_x^* \\ -\tilde{\Omega}_x & 0 & \Delta \epsilon_{\mathbf{k}}^x & U \\ 0 & \tilde{\Omega}_x^* & -U^* & -\Delta \epsilon_{\mathbf{k}}^{x*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\text{noise}} \\ E_{\text{fwm}}^* \\ p_{\text{noise}} \\ p_{\text{fwm}}^* \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

Hierbei sind  $\Delta\hbar\omega_{\mathbf{k}}^c = \hbar\omega_{\mathbf{k}}^c - \hbar\omega_p - i\gamma_c$  und  $\Delta\epsilon_{\mathbf{k}}^x = \epsilon_{\mathbf{k}}^x - \hbar\omega_p - i\gamma_x + \alpha_{\text{PSF}}\Omega_x p_0^* E_0 + 2V_{\text{HF}}|p_0|^2$  die Energieverstimnungen zu der photonischen bzw. zu der blauverschobenen exzitoni- schen Dispersion. Die nichtdiagonalen Elemente betragen  $\tilde{\Omega}_x = \Omega_x (1 - \alpha_{\text{PSF}}|p_0|^2)$  und  $U = V_{\text{HF}}p_0^2 + \alpha_{\text{PSF}}\Omega_x p_0 E_0$ , wobei  $\tilde{\Omega}_x$  eine um die Phasenraumfüllung reduzierte Kopp- lungskonstante ist und  $U$  strukturell den nichtdiagonalen Elementen in Gl. 2.33 gleicht. Die Eigenwerte der Matrix in 2.39, die wie in Gl. 2.33 nur vom Betrag  $k$  abhängen, lassen sich numerisch bestimmen. Diese spalten hierbei in zwei LPB-artige Zweige  $\beta_{\pm}^{\text{LPB}}(\mathbf{k})$  und zwei UPB-artige Zweige  $\beta_{\pm}^{\text{UPB}}(\mathbf{k})$  auf, wobei in dem hier untersuchten Frequenzbereich die Zweige  $\beta_{\pm}^{\text{UPB}}(\mathbf{k})$  für alle  $k$  entartet sind.

Abb. 2.8 zeigt analog zu Abb. 2.7 den Realteil von  $\beta_{\pm}^{\text{LPB}}(\mathbf{k})$  und  $\beta_{\pm}^{\text{UPB}}(\mathbf{k})$  in Abhängigkeit von  $k$ . Statt der Polaritondichte  $|\Psi_0|^2$  wurden hier allerdings die exzitonen Dichten  $|p_0|^2$  betrachtet. Für geringe Dichten (Abb. 2.8 a) entsprechen die Zerfallsraten bei  $k = 0$  für alle vier Zweige ( $-\Re\beta_{\pm}^{\text{LPB}}$  und  $-\Re\beta_{\pm}^{\text{UPB}}$ ) dem arithmetischen Mittel  $\frac{1}{2}(\gamma_c + \gamma_x)$ , da hier sowohl der LPB als auch der UPB halb photonisch und halb exzitonic zusammengesetzt sind (vgl. Abschn. 2.2). Liegt  $k$  resonant auf dem blauverschobenen LPB, spaltet  $\Re\beta_{\pm}^{\text{LPB}}$ , wie in Abschn. 2.4.1 diskutiert, in ein  $\Re\beta_{+}^{\text{LPB}}$  und ein  $\Re\beta_{-}^{\text{LPB}}$  auf. Da die Pumpfrequenz unterhalb des UPB liegt und daher keine resonanten Streuprozesse auf diesen möglich sind, findet eine solche Aufspaltung für  $\Re\beta_{\pm}^{\text{UPB}}$  nicht statt. Für größer werdende  $k$  gehen  $\Re\beta_{\pm}^{\text{LPB}} \rightarrow -\gamma_x$  und  $\Re\beta_{\pm}^{\text{UPB}} \rightarrow -\gamma_c$ , da der LPB immer exzitonic, der UPB immer photonischer wird.

Für höhere Dichten (Abb. 2.8 b) überschreitet  $\Re\beta_{+}^{\text{LPB}}$  (bei  $k \approx 1.8\mu\text{m}^{-1}$ ) die Nulllinie. Somit wird auch in diesem Modell die Schwelle zur optischen Instabilität erreicht, bei der spontane, nichtaxiale Moden durch ihren exponentiellen Anstieg die homogenen Fel- der  $E_0$  und  $p_0$  kollabieren lassen können. Für noch höhere Dichten (Abb. 2.8 c) kommt es, aufgrund der starken Blauverschiebung, zu der wie bereits in Abschn. 2.4.1 disku- tierten axialen Instabilität ( $\Re\beta_{+}^{\text{LPB}}(\mathbf{k} = 0) > 0$ ). Überschreitet die Dichte einen oberen Grenzwert (Abb. 2.8 d), so werden auch hier die Felder  $E_0$  und  $p_0$  wieder stabil, da die Blauverschiebung die Pumpfrequenzverstimmung  $\hbar\omega_p - \epsilon_0^{\text{LPB}}$  übersteigt. Die Pola- ritonen erben die Blauverschiebung aus der exzitonicen Komponente. Darum ist für derart hohe Dichten wie in Abb. 2.8 d das exzitonic Band gegenüber der photonischen Dispersion stark verstimmt, was bei  $k = 0$  zu einem höheren photonischen Anteil auf dem LPB und zu einem höheren exzitonicen Anteil auf dem UPB führt, mit den hier gezeigten Auswirkungen auf die Zerfallsraten der Polaritonen.

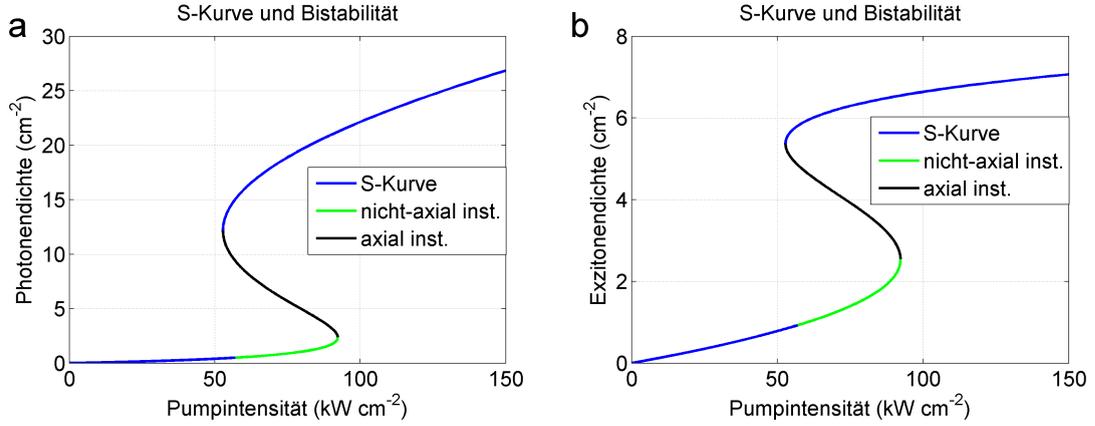


ABBILDUNG 2.9: Gezeigt ist die Abhängigkeit der Photonendichte  $|E_0|^2$  (a) und Exzitonendichte  $|p_0|^2$  (b) von der Pumpintensität  $I_{\text{pump}}$ . Der grün (schwarz) markierte Bereich entspricht nicht-axial (axial) instabilen Feldern.

### 2.4.3 Bistabilität

Wie in Abschn. 2.3.2 diskutiert, bildet der Verlauf der Polaritondichte in Abhängigkeit von der Pumpintensität einen S-förmigen Verlauf, sofern die Pumpfrequenz deutlich oberhalb des LPB liegt. Im gekoppelten Modell berechnet (Gln. 2.12 und 2.13), folgen auch die photonischen ( $|E_0|^2$ ) und exzitonischen Dichten ( $|p_0|^2$ ) einer solchen S-Kurve, wie in Abb. 2.9 gezeigt ist. Während für sehr hohe Dichten die photonische Dichte wieder linear mit dem Pump skaliert, erreicht die exzitonische Dichte bei  $|p|^2 = \alpha_{\text{PSF}}^{-1}$  einen Sättigungswert auf Grund der diskutierten Phasenraumfüllung.

Zusätzlich zu den Zuweisungen  $E_0 \rightarrow E_{\text{pump}}$  und  $p_0 \rightarrow E_{\text{pump}}$  wurde in Abb. 2.9 zu jedem Paar  $E_0$  und  $p_0$  eine lineare Stabilitätsanalyse durchgeführt. Der instabile Bereich wurde in der Abbildung farblich sichtbar gemacht, wobei allerdings auch zwischen nichtaxialer (grün) und axialer (schwarz) Instabilität unterschieden wurde. Beide Bereiche liegen innerhalb der S-Kurve, wobei der axial instabile Bereich den gesamten mittleren Ast der S-Kurve einnimmt. Wenn man die nichtaxiale Instabilität nicht mit einbezieht, sind daher maximal nur zwei stabile Lösungen möglich, weshalb man auch in der Literatur von einer Bistabilität [42, 98] spricht.

## 2.5 Nichtaxiale Instabilität und Musterbildung

Motiviert vom vorherigen Abschnitt, der die optische Stabilität homogener Polaritonfelder zum Thema hatte, drängt sich die Frage nach der Dynamik in einem optisch instabilen Fall auf. Folglich präsentieren wir eine numerische Studie für diverse instabile Felder  $E$  und  $p$ , indem wir ihre gekoppelten Differentialgl. so lange über die Zeit integrieren, bis die Dichten  $|E|^2$  und  $|p|^2$  im Ortsraum stationär geworden sind. Um die Symmetrie

des Systems beim Anwachsen nichtaxialer Moden zu brechen (und somit einen durch die spezifische Numerik gesteuerten spontanen Symmetriebruch zu vermeiden), führen wir allerdings vorab ein (physikalisch fundiertes) Störstellenpotential ein. Wir finden heraus, dass die LSA auch die Instabilität von Feldern mit endlicher Ortsraumverteilung akkurat beschreibt.

### 2.5.1 Störstellen und resonante Rayleigh-Streuung

In dem bislang betrachteten Modell wurde die Kavität als eine perfekt gleichmäßige, zweidimensionale Struktur behandelt. In einer realen Kavität werden jedoch in Experimenten Signaturen von Defekten sichtbar: Es handelt sich um eine resonante Rayleigh-Streuung (RRS) der Polaritonen an diesen [56–62]. Eine ausführliche Theorie zu diesem Effekt bietet Quelle [61]: Obwohl auch die Exzitonen Defekte spüren, resultiert diese Streuung überwiegend aus dem photonischen Anteil der Polaritonen. Im Zuge des epitaktischen Wachstumsprozesses der Kavität kommt es aufgrund unvermeidbarer Ungenauigkeiten zu leichten Schwankungen in der Schichtdicke. Diese wirken sich lokal auf die Grundmode  $k_{z,\text{tot}}(\mathbf{r}) = k_z + \delta k_z(\mathbf{r})$  aus, wodurch auch das photonische Energieminimum  $\hbar\omega_{0,\text{tot}}^c(\mathbf{r}) = \hbar\omega_0^c + \delta\hbar\omega_0^c(\mathbf{r})$  räumlich variiert.

Diese Fluktuation in der Energie lässt sich im Ortsraum über ein zusätzliches, statisches Potential  $V_d(\mathbf{r}) \equiv \delta\hbar\omega_0^c(\mathbf{r})$  beschreiben. Die gekoppelten Bewegungsgln. 2.12 und 2.13 für Photonen und Exzitonen werden somit erweitert zu:

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}E(\mathbf{r},t) &= (\mathbb{H}_c + V_d(\mathbf{r}) - i\gamma_c)E(\mathbf{r},t) - \Omega_x p(\mathbf{r},t) + E_{\text{pump}}(\mathbf{r},t) \quad (2.40) \\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}p(\mathbf{r},t) &= (\mathbb{H}_x - i\gamma_x)p(\mathbf{r},t) - \Omega_x (1 - \alpha_{\text{PSF}}|p(\mathbf{r},t)|^2)E(\mathbf{r},t) \\ &\quad + V_{\text{HF}}|p(\mathbf{r},t)|^2p(\mathbf{r},t). \quad (2.41) \end{aligned}$$

Das Störstellenpotential  $V_d(\mathbf{r})$  ist eine räumlich korrelierte Zufallsgröße, die sich durch ein mittleres Betragsquadrat  $V_0^2 \equiv \langle V_d^2 \rangle$  und eine Korrelationslänge  $\xi$  beschreiben lässt. In der Literatur werden Korrelationsfunktionen wie  $\langle V_d(\mathbf{r})V_d(\mathbf{r}') \rangle = V_0^2 \exp(-|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/\xi)$  [59] oder  $\langle V_d(\mathbf{r})V_d(\mathbf{r}') \rangle = V_0^2 \exp(-|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2/\xi^2)$  [62] verwendet. Jedoch ist die Berechnung mit Hilfe einer Korrelationsmatrix für viele Stützstellen sehr aufwendig. Wir vereinfachen daher die Korrelation, indem wir auf einem Ortsraumgitter mit unkorrelierten Zufallszahlen für jeden einzelnen Gitterpunkt über einen Radius  $\xi$  mitteln.

Eine so erzeugte, typische Potentiallandschaft  $V_d(\mathbf{r})$  ist für typische Werte  $V_0 = 0.05$  meV und  $\xi = 1 \mu\text{m}$  [61] in Abb. 2.10 a dargestellt. Mit diesem Potential lassen sich nun die Bewegungsgln. 2.40 und 2.41 berechnen. Die für die Simulation verwendeten

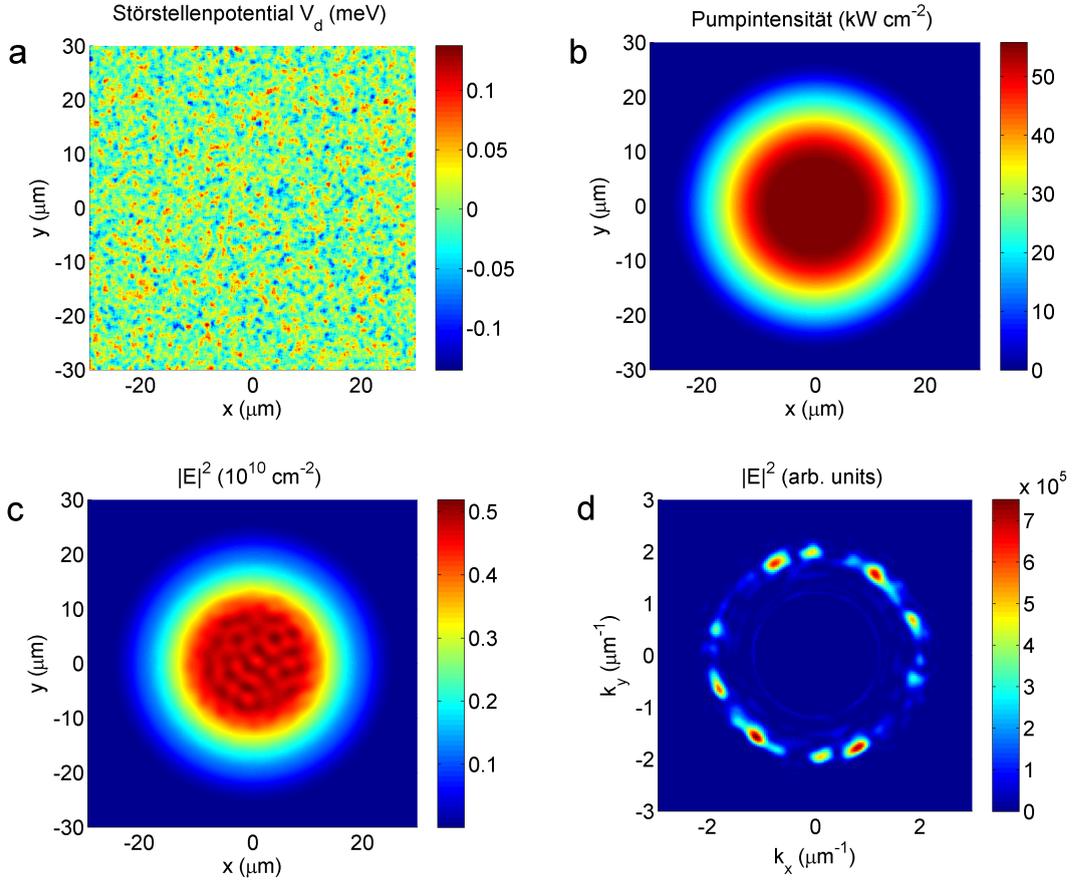


ABBILDUNG 2.10: Zu sehen sind das für die Simulation verwendete Störstellenpotential (a), die Intensität des Pumps im Ortsraum (b) und die Ergebnisse für die stationäre Photonendichte  $|E|^2$  im Ortsraum (c) wie im  $k$ -Raum (d). Aus Gründen der Übersicht wurde der Pump bei  $k = 0$  in (d) ausgeblendet.

Parameter sind, bis auf die Pumpintensität, die selben wie in Abschn. 2.3.4. Die Ortsraumdichte der cw-Anregung  $I_{\text{pump}}(\mathbf{r}, t)$  liegt unterhalb der Instabilitätsschwelle und ist in Abb. 2.10 b zu sehen. Der Bereich um  $r = 0$ , bei dem  $I_{\text{pump}}(\mathbf{r} = 0) = 55.84 \text{ kW cm}^{-2}$  maximal wird, wurde zu einem Plateau abgeflacht. Abb. 2.10 c zeigt die stationär gewordene Photonendichte im Ortsraum: Auf dem zentralen Plateau sind deutliche Signaturen der Störstellen sichtbar. Die Photonendichte im  $k$ -Raum (Abb. 2.10 d) zeigt eine zufällig verteilte Besetzung nichtaxialer Moden, die jedoch resonant auf dem LPB besonders ausgeprägt ist.

## 2.5.2 Musterbildung als Folge optischer Instabilität

In diesem Abschnitt wird die optische Musterbildung behandelt, die auch in anderen Systemen mit optischer Instabilität auftreten kann [8, 63, 64]. Für die Musterbildung in skalaren Polaritonfeldern sei auf die Quellen [26, 65] und auf unsere Publikation [4] verwiesen.

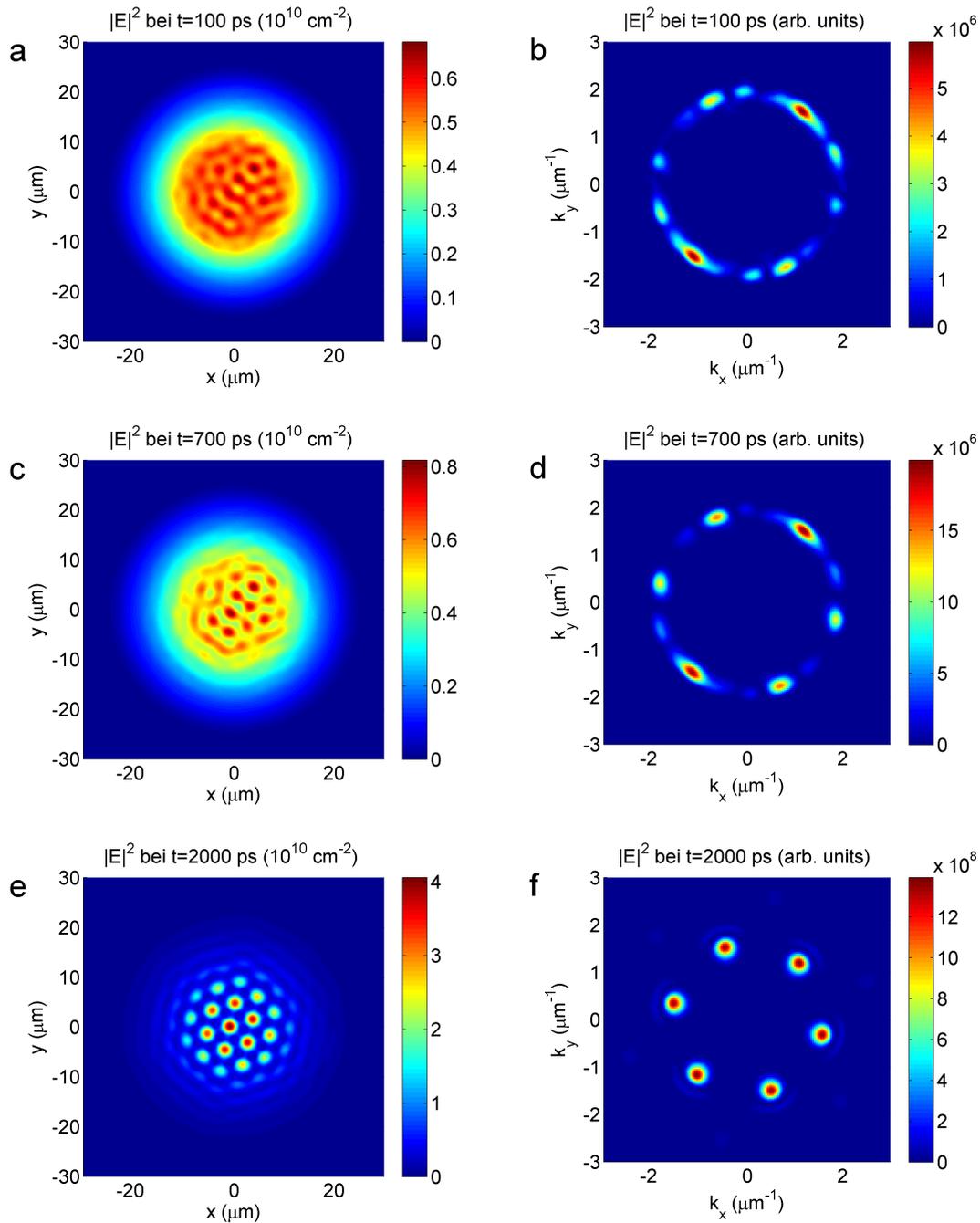


ABBILDUNG 2.11: Prozess der optischen Musterbildung für eine Kavität mit Störstellen oberhalb der Instabilitätsschwelle. Gezeigt ist die Photonendichte  $|E|^2$  im Ortsraum (a,c,e) und  $k$ -Raum (b,d,f) zu drei verschiedenen Zeiten: Für jeweils 100 ps nach Rechnungsbeginn (a,b), sowie für 700 ps (c,d) und für 2000 ps (e,f).

Die durch die Rayleigh-Streuung zufällig besetzten Moden lassen sich als Störfelder  $E_{\text{noise}}$ ,  $p_{\text{noise}}$  des um  $r = 0$  homogenen Polaritonfeldes auffassen. Für eine hohe Pumpintensität stimulieren diese die axialen Polaritonen zu einem paarweisen Einstreuen in ihre Moden. In einer Simulation, in der wir die Pumpexzitondichte  $|p_0|^2 = 0.98 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2}$  innerhalb der optischen Instabilität (Abschn. 2.4.2) wählen, wachsen die in Abb. 2.10 d gezeigten resonanten, nichtaxialen Felder mit der Zeit stark an. Abb. 2.11 a und b zeigen die photonische Dichte jeweils im Orts- und  $k$ -Raum zum Zeitpunkt  $t = 100 \text{ ps}$ . Die Signaturen der Störstellen haben sich im Ortsraum markant ausgeprägt, während die nichtaxialen Dichten im  $k$ -Raum um bis zu eine Größenordnung gewachsen sind.

Dieses Anwachsen ändert sich qualitativ, wenn die nichtaxialen Dichten so hoch geworden sind, dass nun auch quadratische Streuprozesse (Abschn. 2.3.4) wichtig werden. Da diese eine hexagonale Geometrie bevorzugen, kristallisiert sich im  $k$ -Raum ein Hexagon heraus, wie in Abb. 2.11 d zum Zeitpunkt  $t = 700 \text{ ps}$  zu erkennen ist. Da das Hexagon eine bevorzugte Geometrie hat, verdrängt es die restlichen Moden, so dass durch Sättigung ein reguläres Hexagon bei  $t = 2000 \text{ ps}$  auskonvergiert ist (Abb. 2.11 f). Hinzu kommt eine Stabilisierung der hexagonalen Struktur durch auftretende kubische Streuprozesse. Einem Hexagon im  $k$ -Raum entspricht ein periodisch hexagonales Muster im Ortsraum (Abb. 2.11 e). Signaturen des Störstellenpotentials sind nach erfolgter Musterbildung weder im Ortsraum noch im  $k$ -Raum erkennbar. Die Orientierung des Hexagons richtet sich nach den Impulsen der anfangs besonders ausgeprägten Moden, deren Richtung durch das Störstellenpotential zufällig festgelegt ist. Für höhere Pumpintensitäten wird auch die Wachstumsrate der nichtaxialen Moden höher, sodass der Prozess der Musterbildung schneller erfolgt. Die Intensität der Hexagonpunkte im  $k$ -Raum wächst aufgrund der stärkeren Streuprozesse ebenso mit einer höheren Pumpintensität.

### 2.5.3 Instabilität des Musters und Übergang in den oberen Ast der S-Kurve

Allerdings ist der Dichtebereich, in dem sich ein stabiles Hexagon bilden kann, stark eingeschränkt. Für eine gering höhere Pumpexzitondichte ( $1.016 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2}$ ) präsentieren wir eine Simulation, in der sich zwar anfangs ein Hexagon wie in Abschn. 2.5.2 ausbildet, sich im weiteren Verlauf jedoch wieder auflöst. Dazu zeigt Abb. 2.12 die photonischen Dichten zu verschiedenen Zeitpunkten in einer logarithmischen Darstellung: Durch die höhere Anfangsdichte hat sich bereits nach  $200 \text{ ps}$  ein Hexagon ausgebildet (Abb. 2.12 a). Der Radius des Hexagons beginnt jedoch zu schrumpfen, während der  $k$ -Raum zeitgleich von weiteren, zufällig verteilten nichtaxialen Feldern besetzt wird (Abb. 2.12 b). Die Besetzung dieser Moden steigt weiter an, während das Hexagon beginnt, sich “aufzulösen” (Abb. 2.12 c). Letztlich “verschmelzen” die nichtaxialen Felder

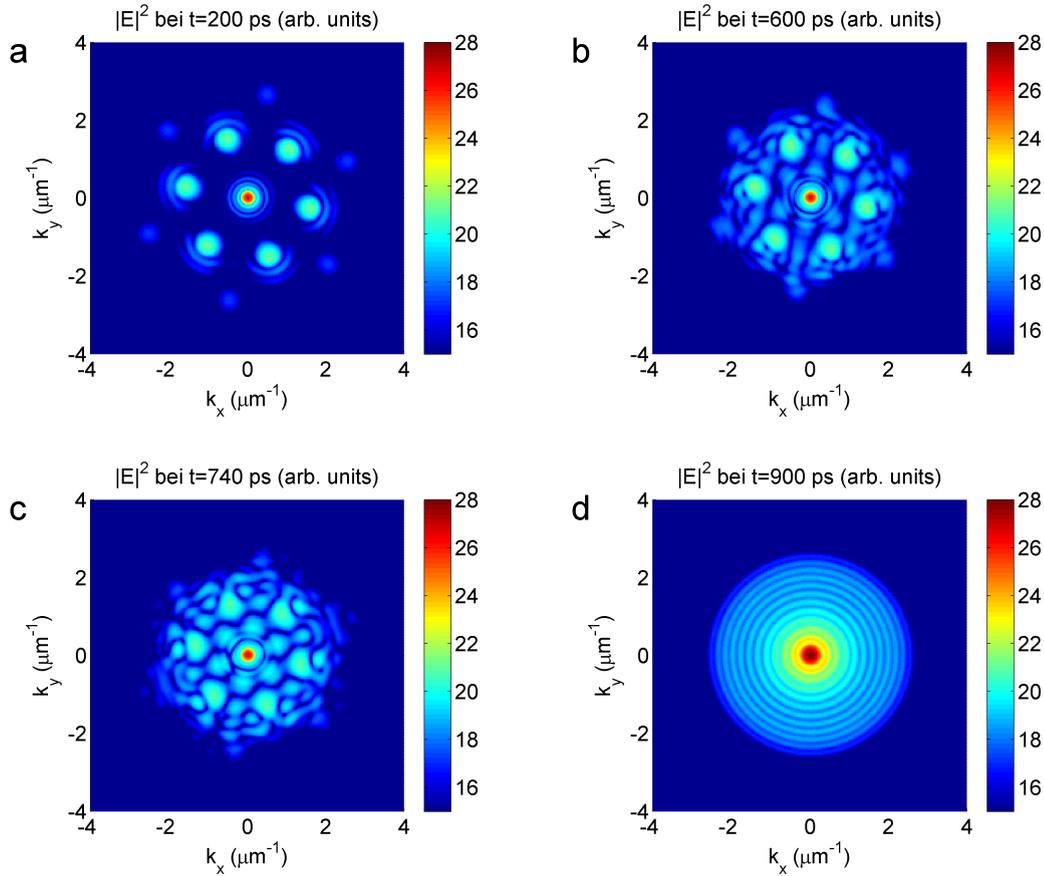


FIGURE 2.12: “Kollaps” eines Hexagons zu verschiedenen Zeitpunkten im  $k$ -Raum. Aufgetragen sind die photonischen Dichten in logarithmischer Skala. Ein Hexagon, das spontan entstanden ist (a), schrumpft (b) und geht auf in einer chaotischen Anordnung nichtaxialer Moden (c). Am Ende dieses Prozesses bleibt erneut ein stabiles, axiales Feld (d).

zu einer azimuthalsymmetrischen Verteilung um das Pumpfeld bei  $k = 0$ . Dieser erstaunliche Prozess geht mit einem Übergang des unteren Astes der S-Kurve in den oberen Ast einher: Abb. 2.13 zeigt die dazugehörigen photonischen Dichten im Ortsraum für verschiedene Zeitpunkte (a-c). Die Photonendichte befindet sich für ein periodisches Hexagons bei  $t = 200$  ps (Abb. 2.13 a) noch in der Größenordnung des unteren Astes, während sie im Verlauf des oben beschriebenen, chaotischen Prozesses stetig steigt (Abb. 2.13 b), bis das Feld bei  $t = 900$  ps die Dichte auf dem oberen Ast der S-Kurve annimmt (Abb. 2.13 c). Dieser Übergang innerhalb der S-Kurve ist in Abb. 2.13 d mit einem Pfeil schematisch dargestellt.

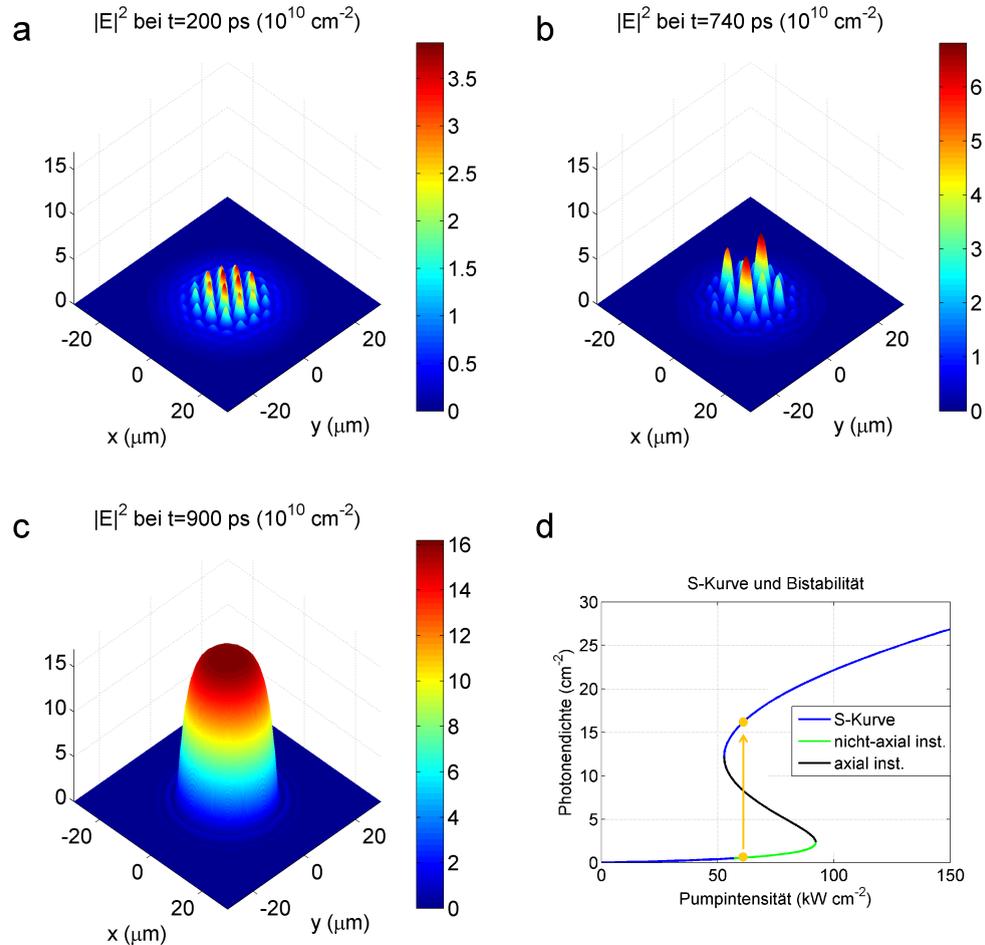


FIGURE 2.13: a-c: Zeitpunkte zum Kollaps eines periodisch hexagonalen Musters im Ortsraum. Dieser ist mit einem Übergang in den oberen Ast der S-Kurve verbunden (d).

## 2.6 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden mit einer semiklassischen Theorie verschiedene lineare und nichtlineare Eigenschaften einer Halbleiter-Mikrokavität untersucht. Mit Hilfe der Gross-Pitaevskii-Gleichung, einer nichtlinearen Verallgemeinerung der Schrödingergleichung, konnten wir nichtlineare Effekte wie die Bildung einer S-Kurve, lineares und quadratische Vierwellenmischen und das Auftreten von optischer Instabilität analytisch beschreiben. Begleitet wurde die Diskussion numerisch durch das Lösen einer gekoppelten Differentialgl. für das interne  $E$ -Feld und die Polarisation  $p$  im Halbleiterquantenfilm. Im nächsten Kapitel werden diese Eigenschaften ebenso wie die Musterbildung für ein Spinorfeld, d.h. ein Polaritonfeld mit Polarisationsfreiheitsgrad, behandelt.



## Chapter 3

# Nichtlineare optische Eigenschaften und spontane Musterbildung in einem Polariton-Spinorfeld

Nach der Untersuchung eines skalaren Polaritonfeldes im vorherigen Kapitel behandelt dieses Kapitel nun die polarisationsabhängigen Eigenschaften der Polaritonen. Das bisherige Modell wird dabei um den Polarisationsfreiheitsgrad zu einem Spinorfeld erweitert, wodurch im Wesentlichen zwei Effekte auftreten: Zum einen eine longitudinal-transversale Modenaufspaltung (TE-TM-Aufspaltung) in der photonischen Komponente, zum anderen eine unterschiedliche Wechselwirkung zwischen Exzitonen mit gleichem und entgegengesetztem Spin<sup>1</sup>. Während sich diese Effekte auf zirkular polarisierte Polaritonen nur geringfügig auswirken (die dadurch näherungsweise mit dem skalaren Modell beschrieben werden können), bewirken sie bei linear polarisierter Anregung interessante neue Eigenschaften: Die bisher azimuthale Symmetrie des Systems wird bereits im optisch linearen Fall aufgehoben. Bei höheren Dichten können die Polaritonen im Zuge paarweiser Streuung in einen anderen Polarisationskanal streuen. Darüber hinaus kommt es zu Auswahlregeln bei Streuprozessen höherer Ordnung. Diese Eigenschaften wirken sich im optisch instabilen Fall erheblich auf die Musterbildung aus.

Nach der Erweiterung der Bewegungsgleichungen um den Polarisationszustand in Abschn. 3.1 diskutieren wir in Abschn. 3.2 die Musterbildung in einem zirkular polarisiertem Polaritonfeld. Ab Abschn. 3.3 beschränken wir uns auf linear polarisierte Polaritonen und behandeln die optisch linearen Eigenschaften für diesen Anregungsfall.

---

<sup>1</sup>Eine sehr ausführliche Beschreibung dieser Effekte ist in den Quellen [66] und [67] zu finden.

Wir zeigen, dass die TE-TM-Aufspaltung analog zu einem magnetischen Feld auf den Spinzustand nichtaxialer Polaritonen Einfluss nimmt. Das polarisationsabhängige Vierwellenmischen wird in Abschn. 3.4 diskutiert und auch eine LSA wird in Abschn. 3.5 für das Spinormodell durchgeführt. Mit Hilfe dieser Analyse lässt sich im optisch instabilen Fall die Musterbildung entschlüsseln (Abschn. 3.6), die sich im Vergleich zum skalaren Modell wesentlich verkompliziert. Abschließend präsentieren wir das Ergebnis einer theoretisch-experimentellen Zusammenarbeit mit der Arbeitsgruppe um Jérôme Tignon von der École normale supérieure in Paris (Abschn. 3.7). Diese Kollaboration gliedert sich im Wesentlichen in zwei Teile: Zum einen wurden im optisch stabilen Fall polarisationsselektive Vierwellenmisch-Experimente durchgeführt, die die von uns vorhergesagten Charakteristika zeigten. Zum anderen konnte oberhalb der Instabilitätsschwelle das Auftreten eines hexagonalen Fernfeldmusters bestätigt werden.

### 3.1 Theorie polarisationsabhängiger Polaritonen

Die Polarisation eines nichtaxial einfallenden Pumps ( $\mathbf{k}_{\text{pump}} \neq 0$ ) lässt sich in einen longitudinalen Anteil (parallel zur Einfallrichtung) und einen transversalen Anteil (senkrecht zur Einfallrichtung) zerlegen, wie in Abb. 3.1 a gezeigt ist. Die transversale Mode wird dabei auch als transversal elektrische (TE-Mode), die longitudinale Mode als transversal magnetische (TM-Mode) bezeichnet, da jeweils das elektrische bzw. magnetische Feld transversal zur Ausbreitungsrichtung  $\mathbf{k}_{\text{pump}}$  schwingt. Aufgrund unterschiedlicher Eindringtiefen in die DBR-Schichten für TE- und TM-polarisiertes Licht [32] kommt es zu einer TE-TM-Aufspaltung in zwei photonische Dispersionen, die wir ebenso parabolisch nähern können: Anstelle von  $\hbar\omega_{\mathbf{k}}^c$  treten die Dispersionen  $\hbar\omega_{\mathbf{k}}^{\text{TE}} = \hbar\omega_0^c + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{\text{TE}}}$  und  $\hbar\omega_{\mathbf{k}}^{\text{TM}} = \hbar\omega_0^c + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{\text{TM}}}$  auf, wobei die dazugehörigen effektiven Massen  $m_{\text{TM}}$  und  $m_{\text{TE}}$  leicht voneinander abweichen. Die TE-TM-Aufspaltung in  $\hbar\omega_{\mathbf{k}}^{\text{TE}}$  und  $\hbar\omega_{\mathbf{k}}^{\text{TM}}$  ist in Abb. 3.1 b für eine nicht verstimmte Kavität gezeigt. Die TM-Dispersion ist stärker gekrümmt als die TE-Dispersion, da  $m_{\text{TE}} > m_{\text{TM}}$  [68]. Die skalare Bewegungsgleichung für  $E_{\mathbf{k}}$  in Quasimodennäherung (Gl. 2.7) wird durch diese Aufspaltung verändert zu:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} E_{\mathbf{k}}^{\text{TE}} = \hbar\omega_{\mathbf{k}}^{\text{TE}} E_{\mathbf{k}}^{\text{TE}} - \Omega_x p_{\mathbf{k}}^{\text{TE}} + E_{\text{pump},\mathbf{k}}^{\text{TE}}. \quad (3.1)$$

Hierbei entsprechen  $E_{\text{pump},\mathbf{k}}^{\text{TE}}$ ,  $E_{\mathbf{k}}^{\text{TE}}$  und  $p_{\mathbf{k}}^{\text{TE}}$  jeweils den TE- und TM-Anteilen der nun vektoriiellen Felder  $\mathbf{E}_{\text{pump},\mathbf{k}}$ ,  $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}$  und  $\mathbf{p}_{\mathbf{k}}$ . Erwähnt sei hier, dass die Kopplung an das Dipolmoment der Exzitonen  $\Omega_x$  ebenfalls eine TE-TM-Aufspaltung enthält [52]: Während die Kopplung  $\Omega_x^{\text{TE}}(\mathbf{k}) = \Omega_x^{\text{TE}}(\mathbf{k} = 0)$  der transversalen Mode an  $p_{\mathbf{k}}^{\text{TE}}$  unabhängig vom Einfallswinkel ist, trägt zur Kopplung  $\Omega_x^{\text{TM}}(\mathbf{k}) = \Omega_x^{\text{TM}}(\mathbf{k} = 0) \cos(\vartheta_{\mathbf{k}})$

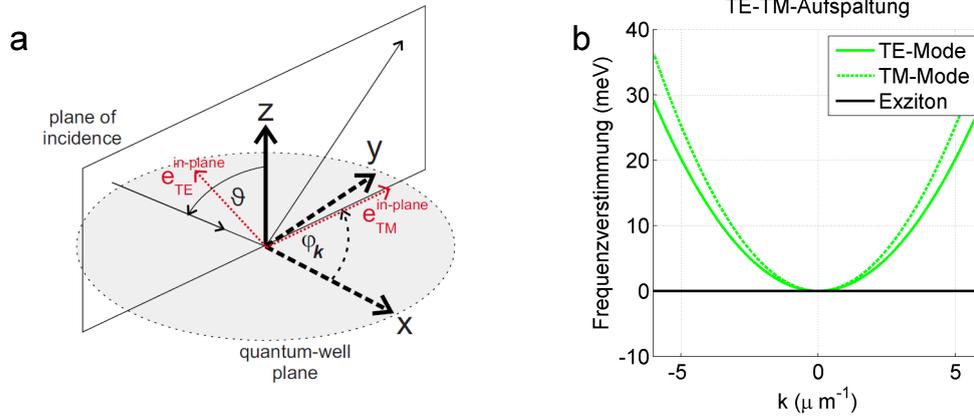


FIGURE 3.1: a: Die Polarisation eines schief einfallenden Pumps (mit polarem Winkel  $\vartheta$ ) lässt sich relativ zur Einfallsebene ( $\varphi_k$ ) in einen longitudinalen ( $\mathbf{e}_{\text{TM}}$ ) und einen transversalen Anteil ( $\mathbf{e}_{\text{TE}}$ ) zerlegen (Grafik aus Quelle [52]). b: Zur Veranschaulichung sind die Dispersionen der TE- und TM-Mode für eine übertrieben große TE-TM-Aufspaltung ( $m_{\text{TE}} = 1.25 \cdot m_{\text{TM}}$ ) eingezeichnet.

zwischen  $E_{\mathbf{k}}^{\text{TM}}$  und  $p_{\mathbf{k}}^{\text{TM}}$  nur der auf die  $x$ - $y$ -Ebene projizierte Anteil des Polarisationsvektors bei, wodurch  $\Omega_x^{\text{TM}}(\mathbf{k})$  mit steigendem Einfallswinkel abnimmt. In Gl. 3.1 wurde diese Abhängigkeit jedoch vernachlässigt und auch im weiteren Verlauf bezeichnen wir mit TE-TM-Aufspaltung nur die Aufspaltung der photonischen Dispersion.

Im Hinblick auf die Dynamik der Exzitonen wird es sich als geschickter erweisen, Gl. 3.1 in die zirkular polarisierte Basis zu transformieren. Den links- bzw. rechtszirkular polarisierten Anteil des E-Feldes,  $E_{\mathbf{k}}^+$  bzw.  $E_{\mathbf{k}}^-$ , erhält man durch  $E_{\mathbf{k}}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_{\mathbf{k}}^x \mp iE_{\mathbf{k}}^y)$  sowie  $E_{\mathbf{k}}^x = \cos \varphi_k E_{\mathbf{k}}^{\text{TM}} - \sin \varphi_k E_{\mathbf{k}}^{\text{TE}}$  und  $E_{\mathbf{k}}^y = -\sin \varphi_k E_{\mathbf{k}}^{\text{TM}} + \cos \varphi_k E_{\mathbf{k}}^{\text{TE}}$ . Insgesamt ergibt sich die Basistransformation zu

$$\begin{pmatrix} E_{\mathbf{k}}^+ \\ E_{\mathbf{k}}^- \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi_k} & -ie^{-i\varphi_k} \\ e^{i\varphi_k} & ie^{i\varphi_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\mathbf{k}}^{\text{TM}} \\ E_{\mathbf{k}}^{\text{TE}} \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Führt man diese für Gl. 3.1 durch, erhält man

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} E_{\mathbf{k}}^{\pm} = \hbar\omega_{\mathbf{k}}^c E_{\mathbf{k}}^{\pm} + \Delta_{\mathbf{k}}^{\pm} E_{\mathbf{k}}^{\mp} - \Omega_x p_{\mathbf{k}}^{\pm} + E_{\text{pump},\mathbf{k}}^{\pm}. \quad (3.3)$$

Die für beide Anteile identische Dispersion  $\hbar\omega_{\mathbf{k}}^c = \hbar\omega_0^c + \frac{\hbar^2 k^2}{4} \left( \frac{1}{m_{\text{TM}}} + \frac{1}{m_{\text{TE}}} \right)$  ergibt sich dabei aus dem arithmetischen Mittel von  $\hbar\omega_{\mathbf{k}}^{\text{TM}}$  und  $\hbar\omega_{\mathbf{k}}^{\text{TE}}$ . Die TE-TM-Aufspaltung bewirkt allerdings eine Kopplung zwischen  $E_{\mathbf{k}}^+$  und  $E_{\mathbf{k}}^-$  über das nichtdiagonale Element  $\Delta_{\mathbf{k}}^{\pm} = \frac{\hbar^2}{4} \left( \frac{1}{m_{\text{TM}}} - \frac{1}{m_{\text{TE}}} \right) (k_x \mp ik_y)^2$ . Die Dynamik von  $E_{\mathbf{k}}^{\pm}$  hängt damit nicht nur vom Betrag  $k$ , sondern zusätzlich von der Richtung  $\varphi_k$  ab. Die angeregten Exzitonen  $p_{\mathbf{k}}^{\pm}$  erhalten aufgrund der Drehimpulserhaltung einen Spin, den wir ebenfalls mit  $+$  bzw.  $-$  bezeichnen und daher von links- bzw. rechtszirkular polarisierten Exzitonen sprechen.

In Quelle [12] wurde die Exziton-Exziton-Korrelation über die in Kap. 2 beschriebene Mean-Field-Näherung hinaus untersucht: Unter Berücksichtigung aller kohärenten  $\chi^{(3)}$ -Nichtlinearitäten und Einbeziehung des Spins ergibt sich im Ortsraum die Bewegungsgleichung [12]

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} p^\pm(t) &= (\mathbb{H}_x - i\gamma_x) p^\pm(t) - \Omega_x (1 - \alpha_{\text{PSF}} |p^\pm(t)|^2) E^\pm(t) \\ &+ p^{\pm*}(t) \int_{-\infty}^{\infty} dt' T^{++}(t-t') p^\pm(t') p^\pm(t') \\ &+ p^{\mp*}(t) \int_{-\infty}^{\infty} dt' T^{+-}(t-t') p^\mp(t') p^\pm(t'). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Verglichen mit Gl. 2.13 erhält man verschiedene Streumatrixelemente  $T^{++}(t-t')$  und  $T^{+-}(t-t')$  für Exzitonen mit parallelem bzw. entgegengesetztem Spin. Durch die Zeitabhängigkeit von  $T^{++}$  und  $T^{+-}$  beinhaltet Gl. 3.4 auch Retardierungseffekte. Vereinfachen wir diese zu einer instantanen Wechselwirkung, so bleibt zu berücksichtigen, dass  $T^{++}$  und  $T^{+-}$  immer noch stark von der Pumpfrequenz  $\hbar\omega_p$  abhängen. In dem hier untersuchten Frequenzbereich (mehrere meV unterhalb des Exzitonbandes) sorgt  $T^{++} \approx V_{\text{HF}}$  für eine abstoßende Wechselwirkung, während  $T^{+-} < 0$  jedoch einer anziehenden, biexzitonischen Korrelation entspricht [11, 12]. Für beide Matrixelemente lässt sich für diesen Frequenzbereich der Imaginärteil vernachlässigen.

Transformiert man Gl. 3.3 ebenfalls in den Ortsraum und nimmt man in Gl. 3.4  $T^{++}(t-t') = T^{++} \delta(t-t')$  und  $T^{+-}(t-t') = T^{+-} \delta(t-t')$  an, erhalten wir die gekoppelten Bewegungsgleichungen

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} E^\pm = (\mathbb{H}_c + V_d - i\gamma_c) E^\pm + \mathbb{H}^\pm E^\mp - \Omega_x p^\pm + E_{\text{pump}}^\pm \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} p^\pm &= (\mathbb{H}_x - i\gamma_x) p^\pm - \Omega_x (1 - \alpha_{\text{PSF}} |p^\pm|^2) E^\pm \\ &+ T^{++} |p^\pm|^2 p^\pm + T^{+-} |p^\mp|^2 p^\pm. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Hierbei wurde auch wieder ein Störstellenpotential  $V_d$  berücksichtigt. Verglichen mit den Gln. für den skalaren Fall, Gl. 2.12 und 2.13, wird die photonische Dispersion zu  $\mathbb{H}_c = \hbar\omega_0^c - \frac{\hbar^2}{4} \left( \frac{1}{m_{\text{TM}}} + \frac{1}{m_{\text{TE}}} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$ . Die Fouriertransformierte der TE-TM-Aufspaltung<sup>2</sup>  $\Delta_{\mathbf{k}}^\pm$  ergibt sich in Gl. 3.5 zu  $\mathbb{H}^\pm = -\frac{\hbar^2}{4} \left( \frac{1}{m_{\text{TM}}} - \frac{1}{m_{\text{TE}}} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} \mp i \frac{\partial}{\partial y} \right)^2$ .

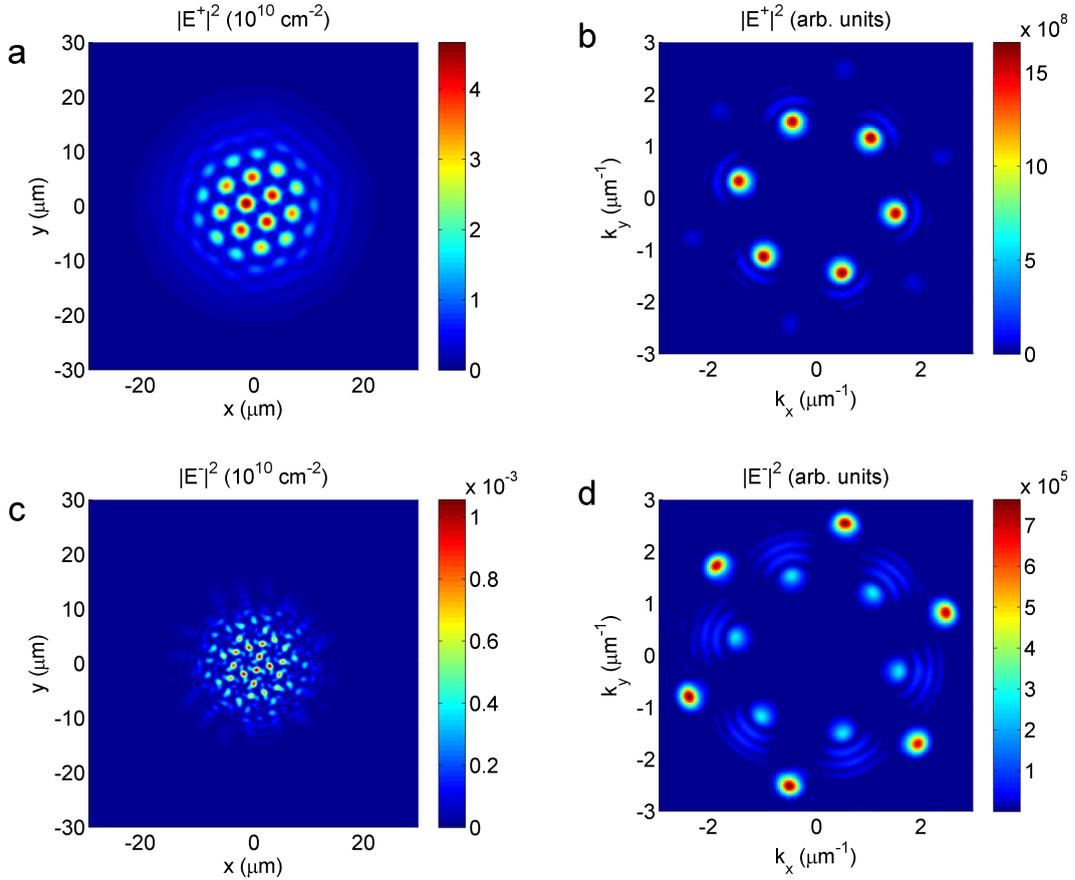


FIGURE 3.2: Stationäre Dichten im Orts- (a,c) und  $k$ -Raum (b,d) nach erfolgter Musterausbildung für eine Anregung mit zirkular polarisiertem Licht. a und b zeigen die Dichten  $|E^+|^2$ , c und d die Dichten  $|E^-|^2$ .

### 3.2 Musterbildung in einem zirkular polarisierten Polari-tonfeld

Wie bei einem skalaren Feld kommt es auch beim Spinorfeld oberhalb einer kritischen Exzitonendichte zu optischer Instabilität und Musterbildung. Abb. 3.2 zeigt ein solches stationäres Muster für den Fall einer  $\sigma^+$ -polarisierten Anregung ( $E_{\text{pump}}^+ \neq 0$ ,  $E_{\text{pump}}^- = 0$ ). Die Parameter für die Rechnung und das Störstellenpotential sind bis auf die Folgen-den aus Abschn. 2.5.2 übernommen: Die effektive Massen der photonischen Dispersion betragen  $m_{\text{TE}} = 0.215 \text{ meV ps}^2 \mu\text{m}^{-2}$  und  $m_{\text{TM}} = 1.05 \cdot m_{\text{TE}}$ . Die Abweichung von 5 % lässt sich mit Hilfe experimenteller Messungen gut rechtfertigen<sup>3</sup>. Das Streuma-trixelement  $T^{++} = V_{\text{HF}}$  für kozirkular polarisierte Exzitionen entspricht ungefähr der Coulomb-Wechselwirkung auf Hartree-Fock-Ebene. Für Exzitionen mit entgegengesetztem Spin ist die Wechselwirkung anziehend, vom Betrag her jedoch deutlich schwächer

<sup>2</sup> Ein solcher nichtdiagonaler Operator für ein Spinorfeld wurde u.a. auch in den Quellen [68] und [69] verwendet.

<sup>3</sup>Siehe dazu Abschn. 3.7.2 und Quelle [1]

[11, 12]. Hier wurde mit  $T^{+-} = -T^{++}/5$  gerechnet. Das Maximum der Pumpfeldstärke  $E_{\text{pump}}^+$  im Ortsraum wurde so gewählt, dass die Exzitonendichte vor dem Anwachsen nichtaxialer Moden maximal  $|p^+|^2 = 10^{10} \text{cm}^{-2}$  betrug.

Durch das Störstellenpotential  $V_d$  wird die azimutale Symmetrie des Systems aufgebrochen, sodass sich ein Muster entlang einer Vorzugsrichtung ausbildet (vgl. Abschn. 2.5.2). Nach erfolgter Ausbildung dieses stationären Musters unterscheidet sich die Ortsraumdichte  $|E^+(\mathbf{r})|^2$  der  $\sigma^+$ -Photonen (Abb. 3.2 a) sowie die  $k$ -Raumdichte  $|E_k^+|^2$  (Abb. 3.2 b) nur geringfügig vom Ergebnis des skalaren Feldes in Abschn. 2.5 (jeweils Abb. 2.11 e und f): Zu sehen sind im  $k$ -Raum sechs Moden in hexagonaler Geometrie und einem Radius  $k = 1.5 \mu\text{m}^{-1}$ , was einer Resonanz auf dem um  $2T^{++}|p_0^+|^2$  blauverschobenen LPB entspricht. Der Pump bei  $k = 0$  ist aus Gründen der Sichtbarkeit ausgeblendet. Aufgrund von Streuprozessen höherer Ordnung werden jedoch auch nichtresonante Moden angeregt, die ein um  $30^\circ$  gedrehtes Hexagon bei einem größeren Radius ( $k = 2.6 \mu\text{m}^{-1}$ ) bilden. Die Anordnung der resonanten Moden bezeichnen wir im Folgenden als “primäres Hexagon”, die Anordnung der nichtresonanten Moden als “sekundäres Hexagon”. Der rechtszirkular polarisierte Anteil ist für die Ortsraumdichte  $|E^-(\mathbf{r})|^2$  in Abb. 3.2 c, für die  $k$ -Raumdichte  $|E_k^-|^2$  in Abb. 3.2 d dargestellt. Der Bereich bei  $k = 0$  wurde in Abb. 3.2 d nicht ausgeblendet: Da die TE-TM-Aufspaltung quadratisch von  $k$  abhängt, entfällt sie für die Pump polaritonen ( $k = 0$ ) gänzlich. Zu sehen sind jedoch die  $\sigma^-$ -Anteile des primären und des sekundären Hexagons, wobei das sekundäre wesentlich stärker ausgeprägt ist. Dieses überraschende Ergebnis hat zwei Ursachen: Zum einen ist der Radius des sekundären Hexagons größer, was zu einer größeren TE-TM-Aufspaltung führt. Zum anderen erfährt der LPB für  $\sigma^-$ -Licht (im Gegensatz zu  $\sigma^+$ -Licht) eine Rotverschiebung um  $T^{+-}|p_0^+|^2$ , wie sich aus Gl. 3.6 für  $p^-$  leicht nachvollziehen lässt. Das führt zu einer deutlichen Verschiebung der Resonanz zu höheren  $k$ .

Die Dichten der  $\sigma^-$ -polarisierten Polaritonen sind um 3 Größenordnungen kleiner als die der  $\sigma^+$ -Polaritonen, wodurch die Potentiale  $T^{++}|p^-|^2$  und  $T^{+-}|p^-|^2$  keine nennenswerten Rollen spielen. Somit findet auch keine nichtlineare Rückkopplung an  $E^+$  und  $p^+$  statt, sodass die Musterbildung nur auf der Dynamik der  $\sigma^+$ -Polaritonen basiert. Sie kann daher auch mit dem skalaren Modell (wie in Abschn. 2.5) beschrieben werden.

### 3.3 Lineare Optik und optischer Spin-Hall-Effekt

Anders verhält es sich bei Anregung mit linear polarisiertem Licht: Diese bietet schon im optisch linearen Fall neue Effekte, die über die Physik in einem skalaren Feld hinausgehen. Maßgeblich hierfür ist die Rolle der TE-TM-Aufspaltung in der photonischen Dispersion (Gl. 3.1). Diese führt über die photonische Komponente der Polaritonen zu

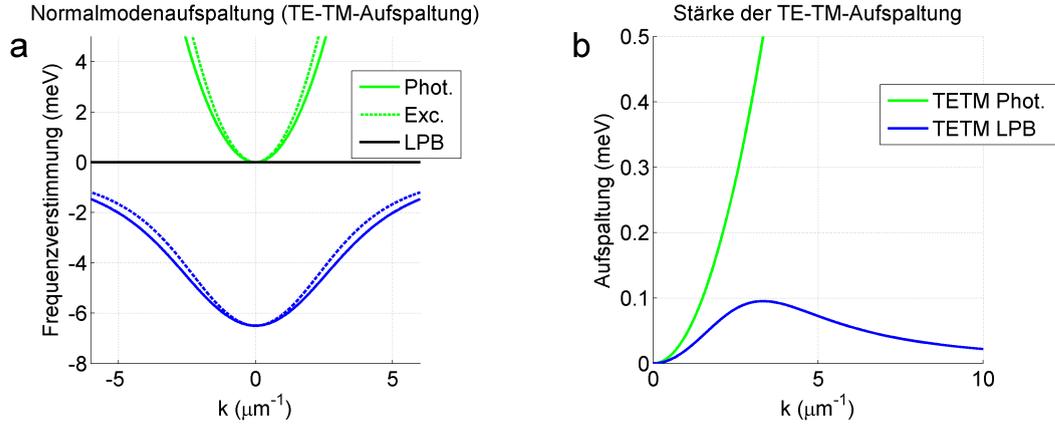


FIGURE 3.3: Gezeigt ist in a die TE-TM-Aufspaltung der photonischen Dispersion und des unteren Polaritonenzweiges (LPB). Zur Verdeutlichung wurde ein übertrieben hoher Unterschied in den effektiven Massen ( $m_{\text{TE}} = 1.25 \cdot m_{\text{TM}}$ ) gewählt. Die Stärke dieser Aufspaltung  $\hbar\omega_{\mathbf{k}}^{\text{TM}} - \hbar\omega_{\mathbf{k}}^{\text{TE}}$  und  $\epsilon_{\mathbf{k}}^{\text{TM}} - \epsilon_{\mathbf{k}}^{\text{TE}}$  ist für ein realistischeres Massenverhältnis ( $m_{\text{TE}} = 1.05 \cdot m_{\text{TM}}$ ) in b gezeigt.

einer Aufspaltung der Polaritonenzweige (Abb. 3.3 a). Da die TE-TM-Aufspaltung der Photonen quadratisch in  $k$  ansteigt, der LPB bei höheren  $k$  jedoch immer exzitonischer wird, erreicht die TE-TM-Aufspaltung der Polaritonen in einen longitudinalen ( $\epsilon_{\mathbf{k}}^{\text{TM}}$ ) und einen transversalen Zweig ( $\epsilon_{\mathbf{k}}^{\text{TE}}$ ) ein Maximum für ein endliches  $k$  (Abb. 3.3 b). Diese maximale Aufspaltung liegt in der Größenordnung von ca.  $100 \mu\text{eV}$ .

Im Fall einer schwachen Anregung erbt das Polaritonfeld, wie in Kap. 2 erörtert, Frequenz, Impuls und die räumliche Form des Anregungsprofils  $E_{\text{pump}}^{\pm}(\mathbf{r})$ . Ist die optische Pumpintensität homogen über die Kavität verteilt und trifft der Pump senkrecht auf ( $\mathbf{k}_{\text{pump}} = 0$ ), erhalten die Polaritonen auch den Polarisationszustand der Anregung. Für endliche Impulse  $\mathbf{k}_{\text{pump}} \neq 0$  gilt dies nicht in jedem Fall, wie anhand einer linear polarisierten Anregung gezeigt wird.

Wie in Abschn. 3.1 besprochen, wird die TM-Mode für eine Einfallsrichtung parallel zur Polarisationssebene ( $\Delta\varphi_{\mathbf{k}} = \varphi_{\mathbf{k}} - \varphi = 0, \pi$ ) und die TE-Mode für eine Einfallsrichtung senkrecht zur Polarisationssebene ( $\Delta\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ ) angeregt. Die für skalare Felder geltende azimuthale Symmetrie des Systems reduziert sich dadurch auf eine zweizählige. Um die Dynamik der Polaritonen für beliebige Einschlusswinkel  $\Delta\varphi_{\mathbf{k}}$  zu untersuchen, zerlegen wir das  $E$ -Feld in eine zur Polarisationssebene der Anregung parallele ( $E_{\mathbf{k}}^{\parallel}$ ) und senkrechte ( $E_{\mathbf{k}}^{\perp}$ ) Polarisationskomponente. Die so entstandene neue Basis bezeichnen wir als  $\parallel$ - $\perp$ -Basis.  $E_{\mathbf{k}}^{\parallel}$  und  $E_{\mathbf{k}}^{\perp}$  erhält man aus den Eigenmoden durch die Basistransformation

$$\begin{pmatrix} E_{\mathbf{k}}^{\parallel} \\ E_{\mathbf{k}}^{\perp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Delta\varphi_{\mathbf{k}} & -\sin \Delta\varphi_{\mathbf{k}} \\ \sin \Delta\varphi_{\mathbf{k}} & \cos \Delta\varphi_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\mathbf{k}}^{\text{TM}} \\ E_{\mathbf{k}}^{\text{TE}} \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

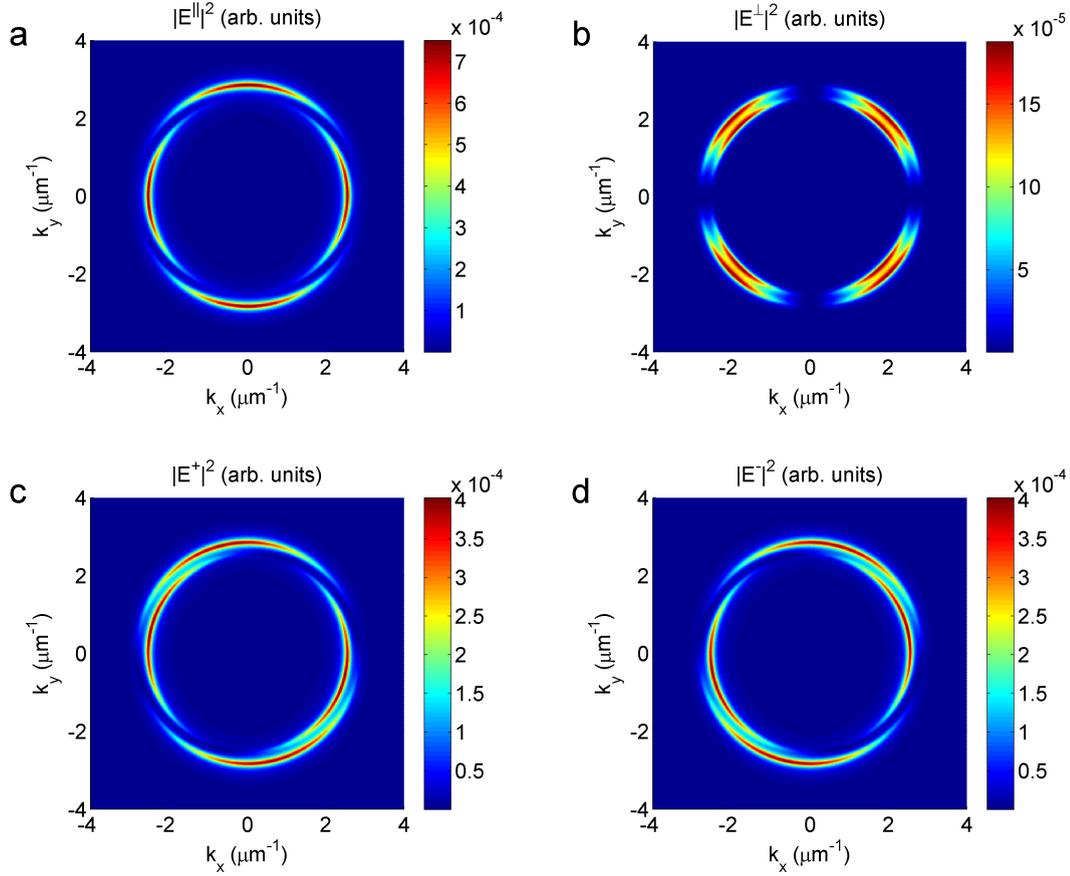


FIGURE 3.4: Gezeigt sind die Dichten  $|E_{\mathbf{k}}^{\parallel}|^2$  (a),  $|E_{\mathbf{k}}^{\perp}|^2$  (b),  $|E_{\mathbf{k}}^+|^2$  (c) und  $|E_{\mathbf{k}}^-|^2$  (d) für eine gleichmäßige,  $x$ -polarisierte Anregung aller Moden. Abhängig von  $\varphi_{\mathbf{k}}$  kommt es durch die TE-TM-Aufspaltung zu  $y$ -polarisierten Beiträgen  $E_{\mathbf{k}}^{\perp}$  und zu Ungleichgewichten zwischen  $E_{\mathbf{k}}^+$  und  $E_{\mathbf{k}}^-$ .

Eine Transformation von Gl. 3.1 in die  $\parallel$ - $\perp$ -Basis führt zu der Bewegungsgl.

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} E_{\mathbf{k}}^{\parallel} &= (\hbar\omega_{\mathbf{k}}^c + \cos(2\Delta\varphi_{\mathbf{k}})\Delta_{\mathbf{k}}^{\text{TL}} - i\gamma_c) E_{\mathbf{k}}^{\parallel} + \sin(2\Delta\varphi_{\mathbf{k}}) \Delta_{\mathbf{k}}^{\text{TL}} E_{\mathbf{k}}^{\perp} - \Omega_x p_{\mathbf{k}}^{\parallel} + E_{\text{pump},\mathbf{k}}^{\parallel} \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} E_{\mathbf{k}}^{\perp} &= (\hbar\omega_{\mathbf{k}}^c - \cos(2\Delta\varphi_{\mathbf{k}})\Delta_{\mathbf{k}}^{\text{TL}} - i\gamma_c) E_{\mathbf{k}}^{\perp} + \sin(2\Delta\varphi_{\mathbf{k}}) \Delta_{\mathbf{k}}^{\text{TL}} E_{\mathbf{k}}^{\parallel} - \Omega_x p_{\mathbf{k}}^{\perp}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Die TE-TM-Aufspaltung  $\Delta_{\mathbf{k}}^{\text{TL}} = \frac{1}{2} (\hbar\omega_{\mathbf{k}}^{\text{TM}} - \hbar\omega_{\mathbf{k}}^{\text{TE}})$  führt zu einer Kopplung zwischen  $E_{\mathbf{k}}^{\parallel}$  und  $E_{\mathbf{k}}^{\perp}$ , welche durch den Faktor  $\sin(2\Delta\varphi_{\mathbf{k}})$  richtungsabhängig wird: Für  $\Delta\varphi_{\mathbf{k}} = 0, \pi$  entspricht  $E_{\mathbf{k}}^{\parallel}$  gerade der TM-, für  $\Delta\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$  der TE-Mode, wodurch die Kopplung an  $E_{\mathbf{k}}^{\perp}$  verschwindet. Für jeden anderen Winkel führt eine endliche Kopplung zu einer Dichte  $|E_{\mathbf{k}}^{\perp}|^2 \neq 0$ , wodurch der Polarisationszustand der Anregung  $E_{\text{pump},\mathbf{k}}^{\parallel}$  nicht erhalten bleibt.

Abb. 3.4 a und b zeigen jeweils die Dichten  $|E_{\mathbf{k}}^{\parallel}|^2$  und  $|E_{\mathbf{k}}^{\perp}|^2$  für eine Pump polarisation in  $x$ -Richtung und einen über den ganzen  $k$ -Raum homogen verteilten Pump  $E_{\text{pump},\mathbf{k}}^{\parallel} = \text{const}$ . Die Intensität wählen wir hinreichend schwach, so dass die nichtlinearen Terme  $\alpha_{\text{PSF}}|p^{\pm}|^2$ ,  $T^{++}|p^{\pm}|^2$  sowie  $T^{+-}|p^{\mp}|^2$  vernachlässigt werden können. Die Bewegungs-

gleichungen für die Exzitonen vereinfachen sich dadurch zu

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} p_{\mathbf{k}}^{\perp} = (\epsilon_{\mathbf{k}}^x - i\gamma_x) p_{\mathbf{k}}^{\perp} - \Omega_x E_{\mathbf{k}}^{\perp}. \quad (3.9)$$

Ist die TE-TM-Aufspaltung geringer als die Linienbreite  $\gamma_c$ , erreicht das System im Laufe der Zeit stationäre Dichten, sodass  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \hbar\omega_p$ .  $E_{\mathbf{k}}^{\parallel}$ ,  $E_{\mathbf{k}}^{\perp}$ ,  $p_{\mathbf{k}}^{\parallel}$  und  $p_{\mathbf{k}}^{\perp}$  lassen sich mit diesem Ansatz durch die Inversion einer über die Gln. 3.8 und 3.9 aufgestellten Kopplungsmatrix bestimmen. Die verwendeten Parameter entsprechen hierbei denen aus Abschn. 3.2. Zur grafischen Veranschaulichung wurden aber - entgegen der ursprünglichen Annahme - eine viel stärkere TE-TM-Aufspaltung ( $m_{\text{TE}} = 1.25 \cdot m_{\text{TM}}$ ) und kleinere Linienbreiten  $\gamma_c = \gamma_x = 0.1 \text{ meV}$  verwendet.

Für eine Anregung der TM- oder TE-Mode wird  $|E_{\mathbf{k}}^{\parallel}|^2$  maximal (Abb. 3.4 a), wobei TM- und TE-Mode aufgrund der TE-TM-Aufspaltung bei verschiedenen Radien  $k$  resonant sind.  $|E_{\mathbf{k}}^{\perp}|^2$  verschwindet in genau diesen Fällen und nimmt Maxima an, wenn  $\Delta\varphi_{\mathbf{k}}$  einem ungeraden Vielfachen von  $\frac{\pi}{4}$  entspricht. Dabei ist  $E_{\mathbf{k}}^{\perp}$  sowohl auf der TM- als auch auf der TE-Dispersion resonant, was zu einer Aufspaltung in jeweils zwei Sichern zu verschiedenen Radien führt (siehe Abb. 3.4 b). Durch einen Phasenunterschied zwischen  $E_{\mathbf{k}}^{\parallel}$  und  $E_{\mathbf{k}}^{\perp}$  - begründet durch endliche  $\gamma_c$  - kommt es darüber hinaus zu einer Elliptisierung der Polarisation und somit zu lokal unterschiedlichen Dichten  $|E_{\mathbf{k}}^+|^2$  und  $|E_{\mathbf{k}}^-|^2$ . Dies wird in Abb. 3.4 c und d veranschaulicht:  $|E_{\mathbf{k}}^+|^2$  ist auf der Geraden  $k_x = -k_y$  besonders ausgeprägt,  $|E_{\mathbf{k}}^-|^2$  auf der Geraden  $k_x = k_y$ .

Streuen also TM-polarisierte Polaritonen, bspw. durch resonante Rayleigh-Streuung, zu endlichen Winkeln  $\Delta\varphi_{\mathbf{k}}$ , werden sie je nach Vorzeichen von  $\Delta\varphi_{\mathbf{k}}$  links- bzw. rechtszirkular polarisiert, wodurch es zu einem Spinfluss senkrecht zur Propagationsrichtung kommt. Dieser Effekt hat eine Analogie zum extrinsischen Spin-Hall-Effekt<sup>4</sup> und wird daher als optischer Spin-Hall-Effekt (OSHE) bezeichnet. Dieser wurde 2005 von Kavokin et al. [33] vorhergesagt und erstmals 2007 von Leyder et al. experimentell nachgewiesen [34]. Um den OSHE zu beschreiben, fasste Kavokin den Polarisationszustand eines Polaritons als Pseudospin auf, der in einem effektivem Magnetfeld präzediert, das aufgrund der TE-TM-Aufspaltung entsteht. Der Pseudospin liegt dabei im Falle einer linearen Polarisation in der  $x$ - $y$ -Ebene, für zirkuläre Polarisation in  $z$ -Richtung. Um diesen Formalismus herzuleiten, lässt sich die Bewegungsgleichung 3.3 in die Form einer Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} E_{\mathbf{k}}^+ \\ E_{\mathbf{k}}^- \end{pmatrix} = \hat{H} \begin{pmatrix} E_{\mathbf{k}}^+ \\ E_{\mathbf{k}}^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_{\text{pump},\mathbf{k}}^+ \\ E_{\text{pump},\mathbf{k}}^- \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

<sup>4</sup>Beim Spin-Hall-Effekt kommt es aufgrund von Streuung an Defekten zu einem Spinstrom in senkrechter Richtung zu einem Ladungsstrom. Theoretisch von Dyakonov und Perel vorhergesagt, wurde er 2004 von Kato et al. in Halbleitern nachgewiesen [35].

überführen. Die Kopplung an die Exzitonen  $p^\pm$  ist für den OSHE nicht ausschlaggebend und wird daher nicht aufgeführt. Der Hamiltonoperator  $\hat{H}$  ergibt sich dabei zu

$$\hat{H} = (\hbar\omega_{\mathbf{k}}^c - i\gamma_c) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \Delta_{\mathbf{k}}^{\text{TL}} \begin{pmatrix} 0 & e^{-2i\varphi_k} \\ e^{2i\varphi_k} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

und lässt sich auf die Form

$$\hat{H} = (\hbar\omega_{\mathbf{k}}^c - i\gamma_c) \mathbb{1} + \mu_B g (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H}_{\text{eff}}) \quad (3.12)$$

bringen. Dabei ist  $\mu_B$  das Bohrsche Magneton und  $g$  ein beliebiger gyromagnetischer Faktor. Der Vektor  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y)^\dagger$  setzt sich aus den Paulimatrizen  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$  zusammen und  $\mathbf{H}_{\text{eff}} = \frac{\hbar}{\mu_B g} \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{k}}$  ist ein  $k$ -abhängiges Magnetfeld. Die Komponenten des Vektors  $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{k}} = (\Omega_x, \Omega_y)^\dagger$  sind  $\Omega_x = \frac{\Delta_{\mathbf{k}}^{\text{TL}}}{\hbar} (\cos^2 \varphi_k - \sin^2 \varphi_k)$  und  $\Omega_y = 2 \frac{\Delta_{\mathbf{k}}^{\text{TL}}}{\hbar} \cos \varphi_k \sin \varphi_k$ . Diese Notation entspricht Quelle [33].

Zusammen mit Gl. 3.12 beschreibt Gl. 3.10 einen Spin in einem Magnetfeld, dessen Dynamik sich mit den gewöhnlichen Bloch-Gleichungen beschreiben lässt. Ist ein freier Spin entlang der Magnetfeldachse ausgerichtet, bleibt er erhalten, während er anderenfalls anfängt, um die Magnetfeldachse zu präzedieren. Diese Präzession wurde 2007 von Langbein et al. [37] experimentell nachgewiesen, wobei die Polarisation ballistisch propagierender Polaritonen in einer gepulst angeregten Kavität eine zeitliche Oszillation mit der Larmorfrequenz  $\Delta_{\mathbf{k}}^{\text{TL}}/\hbar$  aufwies. Bei einer kontinuierlichen Anregung erreichen die Dichten  $|E^+|^2$  und  $|E^-|^2$  hingegen in guter Näherung stationäre Werte, solange die TE-TM-Aufspaltung relativ zur Linienbreite nicht zu groß wird.

### 3.4 Vierwellenmischen in einem Polariton-Spinorfeld

Während die TE-TM-Aufspaltung in der photonischen Mode zu einer Veränderung des Polarisationszustandes führt, kommt es aufgrund der spinselktiven Wechselwirkung in der exzitonischen Komponente zu Auswahlregeln beim Vierwellenmischen. Um diesen Effekt qualitativ und ohne Verschränkungen mit dem OSHE zu untersuchen, betrachten wir in diesem Abschn. das Polaritonfeld ohne TE-TM-Aufspaltung. Für eine analytische Behandlung wird analog zur skalaren GPE (Abschn. 2.3) eine vektorielle Gross-Pitaevskii-Gleichung hergeleitet.

### 3.4.1 Die Polarisationsabhängige Gross-Pitaevskii-Gleichung

Analog zu Kap. 2 lassen sich die gekoppelten Bewegungsgleichungen für das Spinorfeld, bestehend aus  $E^\pm$  und  $p^\pm$  (Gl. 3.6), in die Polaritonbasis  $\Psi^{\text{LPB},\pm}$  und  $\Psi^{\text{UPB},\pm}$  transformieren. Für eine nicht verstimmte Kavität setzt sich  $\Psi^\pm \equiv \Psi^{\text{LPB},\pm} = \sqrt{\frac{1}{2}}(E^\pm + p^\pm)$  bei  $k = 0$  zu gleichen Anteilen aus  $E^\pm$  und  $p^\pm$  zusammen. Vernachlässigen wir die  $k$ -Abhängigkeit der Hopfield-Koeffizienten und vernachlässigen wir eine Besetzung auf dem UPB, ergibt sich für die Polaritonen die Bewegungsgleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi^\pm = (\mathbb{H}_p - i\gamma_p) \Psi^\pm + \mathbb{H}_p^\pm \Psi^\mp + \alpha^{++} |\Psi^\pm|^2 \Psi^\pm + \alpha^{+-} |\Psi^\mp|^2 \Psi^\pm + \Psi_{\text{pump}}^\pm. \quad (3.13)$$

Hierbei entspricht  $\mathbb{H}_p = \epsilon_0^x - \Omega_x - \frac{\hbar^2}{4} \left( \frac{1}{m_{\text{TM},p}} + \frac{1}{m_{\text{TE},p}} \right) \Delta$  dem kinetischen Anteil des Hamiltonoperators und  $\gamma_p = \frac{1}{2}(\gamma_c + \gamma_x)$  der polaritonischen Zerfallsrate. Wie in Gl. 3.3 koppelt  $\mathbb{H}_p^\pm = -\frac{\hbar^2}{4} \left( \frac{1}{m_{\text{TM},p}} - \frac{1}{m_{\text{TE},p}} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} \mp i \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 \Psi^\pm$  an  $\Psi^\mp$ . Die effektiven Polaritonmassen ergeben sich aus den photonischen zu  $m_{\text{TM},p} = 2m_{\text{TM}}$  und  $m_{\text{TE},p} = 2m_{\text{TE}}$ . Die Wechselwirkung zwischen kozykular polarisierten Polaritonen ist durch das Matrixelement  $\alpha^{++} = \frac{1}{4}(T^{++} + \alpha_{\text{PSF}}\Omega_x)$  und zwischen entgegengesetzt zyklular polarisierten Polaritonen durch  $\alpha^{+-} = \frac{1}{4}T^{+-}$  gegeben. Die Pumpfeldstärke erhält man aus dem optischen Pump mittels  $\Psi_{\text{pump}}^\pm = \sqrt{\frac{1}{2}}E_{\text{pump}}^\pm$ .

Um Wellenmischprozesse zu untersuchen, bietet sich eine Fouriertransformation von Gl. 3.13 an. Für die Dynamik von  $\Psi_{\mathbf{k}}^\pm$  ergibt sich dabei:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_{\mathbf{k}}^\pm = (\epsilon_{\mathbf{k}}^p - i\gamma_p) \Psi_{\mathbf{k}}^\pm + \Delta_{\mathbf{k}}^{p,\pm} \Psi_{\mathbf{k}}^\mp + \Psi_{\text{pump}}^\pm + \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{k}''} \left( \alpha^{++} \Psi_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''-\mathbf{k}}^{\pm*} \Psi_{\mathbf{k}'}^\pm \Psi_{\mathbf{k}''}^\pm + \alpha^{+-} \Psi_{\mathbf{k}'+\mathbf{k}''-\mathbf{k}}^{\mp*} \Psi_{\mathbf{k}'}^\mp \Psi_{\mathbf{k}''}^\pm \right). \quad (3.14)$$

Hierbei ist  $\epsilon_{\mathbf{k}}^p = \epsilon_0^x - \Omega_x + \frac{\hbar^2 k^2}{4} \left( \frac{1}{m_{\text{TM},p}} + \frac{1}{m_{\text{TE},p}} \right)$  die Dispersion der Polaritonen und  $\Delta_{\mathbf{k}}^{p,\pm} = \frac{\hbar^2}{4} \left( \frac{1}{m_{\text{TM},p}} - \frac{1}{m_{\text{TE},p}} \right) (k_x \mp ik_y)^2$  die Fouriertransformierte von  $\mathbb{H}_p^\pm$ .

### 3.4.2 Entartetes und nichtentartetes Vierwellenmischen

Zur Vereinfachung der Diskussion der Wellenmischprozesse wird für diesen Abschn.  $m_{\text{TM},p} = m_{\text{TE},p}$  und folglich  $\Delta_{\mathbf{k}}^{p,\pm} = 0$  angenommen. Bei Anregung eines axialen Pumpfeldes  $\Psi_0^\pm$  und einer Überlagerung mit einem schwachen, nichtaxialen Probe  $\Psi_{\mathbf{k}_{\text{probe}}}^\pm$

(vgl. Abb. 2.3) lässt sich für das Vierwellenmischen  $\Psi_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}^{\pm}$  bei  $\mathbf{k}_{\text{fwm}} = -\mathbf{k}_{\text{probe}}$  die Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}^{\pm} &= \left( \epsilon_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}^p + 2\alpha^{++} |\Psi_0^{\pm}|^2 + \alpha^{+-} |\Psi_0^{\mp}|^2 - i\gamma_p \right) \Psi_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}^{\pm} \\ &+ \alpha^{++} \Psi_0^{\pm 2} \Psi_{\mathbf{k}_{\text{probe}}}^{\pm*} + \alpha^{+-} \Psi_0^{\pm} \Psi_0^{\mp} \Psi_{\mathbf{k}_{\text{probe}}}^{\mp*} + \alpha^{+-} \Psi_0^{\mp*} \Psi_0^{\pm} \Psi_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}^{\mp} \end{aligned} \quad (3.15)$$

herleiten. Wie für das skalare Vierwellenmischen (Gl. 2.23) wurden dabei quadratische und kubische Terme in  $\Psi_{\mathbf{k}_{\text{probe}}}^{\pm}$  und  $\Psi_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}^{\pm}$  vernachlässigt und in die Doppelsumme in Gl. 3.14 fanden nur  $k = 0$ ,  $\mathbf{k}_{\text{probe}}$  und  $\mathbf{k}_{\text{fwm}}$  Eingang. Die Dispersion  $\epsilon_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}^p$  wird in Gl. 3.15 um das Potential  $2\alpha^{++} |\Psi_0^{\pm}|^2 + \alpha^{+-} |\Psi_0^{\mp}|^2$  verschoben. Im Falle eines  $\sigma^+$ -polarisierten Pumpes (d.h.  $\Psi_0^- = 0$ ) kann lediglich ein  $\sigma^+$ -polarisiertes Vierwellenmischen  $\Psi_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}^+$  durch einen  $\sigma^+$ -polarisierten Probe  $\Psi_{\mathbf{k}_{\text{probe}}}^+$  angeregt werden. Wie schon in Abschn. 3.2 diskutiert, beschränkt sich die Dynamik rein zirkular polarisierter Polaritonen auf nur einen Polarisationskanal und kann daher als Skalarfeld beschrieben werden.

Der Spinorcharakter der Polaritonen kommt jedoch im Fall linear polarisierter Felder zur Geltung. Um diesen Fall zu untersuchen, transformieren wir Gl. 3.15 in die  $\|\perp$ -Basis und erhalten

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}^{\parallel} &= \left( \epsilon_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}^p + (\alpha^{++} + \alpha^{+-}) |\Psi_0^{\parallel}|^2 - i\gamma_p \right) \Psi_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}^{\parallel} \\ &+ \frac{1}{2} (\alpha^{+-} + \alpha^{++}) \Psi_0^{\parallel 2} \Psi_{\mathbf{k}_{\text{probe}}}^{\parallel*} \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}^{\perp} &= \left( \epsilon_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}^p + \alpha^{++} |\Psi_0^{\parallel}|^2 - i\gamma_p \right) \Psi_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}^{\perp} \\ &+ \frac{1}{2} (\alpha^{+-} - \alpha^{++}) \Psi_0^{\parallel 2} \Psi_{\mathbf{k}_{\text{probe}}}^{\perp*}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Wie erwartet, kann ein  $\|\perp$ -polarisierter Probe  $\Psi_{\mathbf{k}_{\text{probe}}}^{\parallel}$  ein  $\|\perp$ -polarisiertes FWM  $\Psi_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}^{\parallel}$  anregen - ein  $\perp$ -polarisierter Probe  $\Psi_{\mathbf{k}_{\text{probe}}}^{\perp}$  lässt jedoch auch ein  $\perp$ -polarisiertes Vierwellenmischen  $\Psi_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}^{\perp}$  zu. Somit kann ein nichtaxiales,  $\perp$ -polarisiertes Polaritonfeld zwei  $\|\perp$ -polarisierte Pump polaritonen zum Streuen stimulieren, die ihren Polarisationszustand im Zuge der paarweisen Streuung von  $\parallel$  nach  $\perp$  ändern. Überraschenderweise ist dieser Streuprozess effektiver als eine Streuung  $\|\perp$ -polarisierter Pump polaritonen in  $\|\perp$ -polarisierte Moden, da  $\alpha^{+-} < 0$ .

Das in Abschn. 2.3.4 behandelte, skalare QFWM lässt sich ebenfalls für ein Spinorfeld untersuchen. Wird ein axiales Pumpfeld  $\Psi_0$  von zwei nichtaxialen Probes  $\Psi_{\mathbf{k}_{\text{probe}1}}$  und  $\Psi_{\mathbf{k}_{\text{probe}2}}$  überlagert, ergibt sich für das quadratische Vierwellenmisch-Signal bei

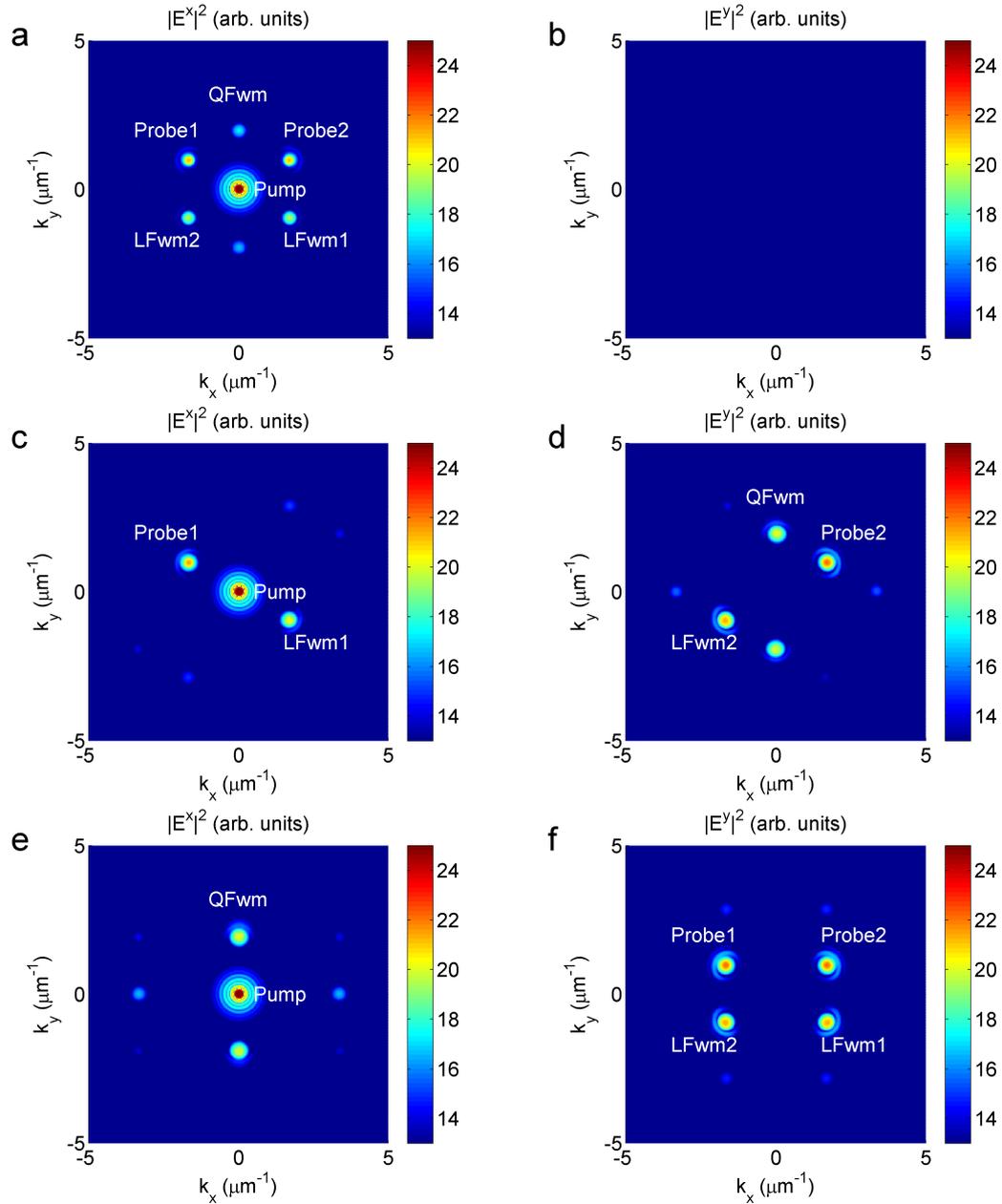


FIGURE 3.5: Zu sehen sind jeweils die Dichten  $|E_k^x|^2$  und  $|E_k^y|^2$  für zwei  $x$ -polarisierte Probes (a und b), einem  $x$ - und einem  $y$ -polarisierten Probe (c und d) und zwei  $y$ -polarisierten Probes (e und f) in hexagonaler Anordnung. Das quadratische Vierwellenmischen ist abwechselnd  $x$ - und  $y$ -polarisiert (a, d und e).

$$\mathbf{k}_{\text{fwm}} = \mathbf{k}_{\text{probe1}} + \mathbf{k}_{\text{probe2}}:$$

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}^{\parallel} &= \left( \epsilon_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}^p + (\alpha^{++} + \alpha^{+-}) |\Psi_0^{\parallel}|^2 - i\gamma_p \right) \Psi_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}^{\parallel} \\ &+ (\alpha^{+-} + \alpha^{++}) \Psi_0^{\parallel*} \Psi_{\mathbf{k}_1}^{\parallel} \Psi_{\mathbf{k}_2}^{\parallel} + (\alpha^{+-} - \alpha^{++}) \Psi_0^{\parallel*} \Psi_{\mathbf{k}_1}^{\perp} \Psi_{\mathbf{k}_2}^{\perp} \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}^{\perp} &= \left( \epsilon_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}^p + \alpha^{++} |\Psi_0^{\parallel}|^2 - i\gamma_p \right) \Psi_{\mathbf{k}_{\text{fwm}}}^{\perp} \\ &+ \alpha^{++} \Psi_0^{\parallel*} \left( \Psi_{\mathbf{k}_1}^{\perp} \Psi_{\mathbf{k}_2}^{\parallel} + \Psi_{\mathbf{k}_1}^{\parallel} \Psi_{\mathbf{k}_2}^{\perp} \right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Wie in Gl. 3.16 und 3.17 wurden dabei alle Felder in ihre  $\parallel$ - und  $\perp$ -polarisierten Anteile zerlegt. Aus den Gln. 3.18 und 3.19 lassen sich drei Schlussfolgerungen ziehen: Das QFWM ist (i) für zwei  $\parallel$ -polarisierte Probes  $\parallel$ -polarisiert, (ii) für zwei  $\perp$ -polarisierte Probes ebenfalls  $\parallel$ -polarisiert und (iii)  $\perp$ -polarisiert, wenn jeweils ein Probe  $\parallel$ -, der andere  $\perp$ -polarisiert ist.

Diese Auswahlregeln werden anhand einer numerischen Simulation für die gekoppelten Gln. in Abb. 3.5 bestätigt. Damit das QFWM resonant angeregt wird, liegen  $\mathbf{k}_{\text{probe1}} = 1.92 \left( \cos \frac{5\pi}{6}, \sin \frac{5\pi}{6} \right)^{\text{t}} \mu\text{m}^{-1}$ ,  $\mathbf{k}_{\text{probe2}} = 1.92 \left( \cos \frac{\pi}{6}, \sin \frac{\pi}{6} \right)^{\text{t}} \mu\text{m}^{-1}$  und  $\mathbf{k}_{\text{fwm}} = (0, 1.92)^{\text{t}} \mu\text{m}^{-1}$  in hexagonaler Geometrie. Gezeigt ist eine logarithmische Darstellung der photonischen Dichte im  $k$ -Raum für eine Anregung getreu Fall (i) (a und b), Fall (ii) (c und d) und Fall (iii) (e und f), jeweils für den  $\parallel$ - und  $\perp$ -Polarisationskanal. Für die Rechnungen wurden Gln. 3.5 und 3.6 für einen  $x$ -polarisierten Pump und (je nach Fall)  $x$ - oder  $y$ -polarisierten Probes gelöst. Die Dichte der Pump polaritonen  $|p^+|^2 = |p^-|^2 = 0.64 \cdot 10^{10} \text{cm}^{-2}$  lag dabei im optisch stabilen Bereich. Die restlichen Parameter entsprechen (bis auf die ausgeschaltete TE-TM-Aufspaltung) denen in Abschn. 3.2. Die linearen Vierwellenmischfelder, LFWM<sub>1</sub> und LFWM<sub>2</sub>, erben in jedem Fall die Polarisation ihres Probes (jeweils Probe<sub>1</sub> und Probe<sub>2</sub>). Das quadratische Vierwellenmischen ist, wie erwartet, für Fall (i) und (iii)  $x$ -polarisiert (a bzw. c), für Fall (ii) jedoch  $y$ -polarisiert (d).

Obgleich beim linearen Wellenmischprozess die Pump polaritonen bevorzugt in den  $\perp$ -Kanal streuen, wird die Ausbildung eines hexagonalen Musters, dessen Moden vollständig  $\perp$ -polarisiert sind, durch die Auswahlregeln ausgeschlossen. Bevor die dadurch wesentlich kompliziertere Musterbildung für einen linear polarisierten Pump in Abschn. 3.6 diskutiert wird, behandelt der folgende Abschnitt die optische Stabilität homogener Polaritonenfelder mit linearem Polarisationszustand.

### 3.5 Lineare Stabilitätsanalyse im Spinorfeld

Abschn. 2.4 bot mit der LSA eine Methode, den effektiven Zerfall  $\gamma_p^{\text{eff}}$  nichtaxialer Polaritonen zu bestimmen, bei dem sich deren Zerfallsrate  $\gamma_p$  durch ein stimuliertes Einstrahlen von Pump polaritonen effektiv vermindert. Eine negative effektive Zerfallsrate  $\gamma_p^{\text{eff}} < 0$  führt dabei zwangsläufig zu einem instabilen Pump polaritonfeld, da beliebig kleine nichtaxiale Felder anfangen, exponentiell anzuwachsen. Die lineare Stabilitätsanalyse erweitern wir in diesem Abschnitt um den Polarisationsfreiheitsgrad, wobei wir uns wiederum auf eine linear polarisierte Anregung beschränken. Unsere Arbeit reproduziert und erweitert die Ergebnisse aus Quelle [53].

Wir gehen auch hier wieder von einem homogenen Polaritonfeld (zusammengesetzt aus  $E_0^\pm$  und  $p_0^\pm$ ) aus, das von einem beliebigen nichtaxialen Feld ( $E_{\text{noise}}^\pm$  und  $p_{\text{noise}}^\pm$ ) und dem dazugehörigen Vierwellenmischfeld ( $E_{\text{fwm}}^\pm$  und  $p_{\text{fwm}}^\pm$ ) überlagert wird:

$$E^\pm(\mathbf{r}, t) = \left( E_0^\pm + E_{\text{noise}}^\pm e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + E_{\text{fwm}}^\pm e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \right) e^{-i\omega t} \quad (3.20)$$

$$p^\pm(\mathbf{r}, t) = \left( p_0^\pm + p_{\text{noise}}^\pm e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + p_{\text{fwm}}^\pm e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \right) e^{-i\omega t}. \quad (3.21)$$

Der Impuls  $\mathbf{k}$  ist hierbei beliebig, aber fest. Einsetzen von Gl. 3.21 in Gln. 3.5 und 3.6 ergibt eine gekoppelte Bewegungsgleichung für  $E_{\text{noise}}^\pm$ ,  $p_{\text{noise}}^\pm$ ,  $E_{\text{fwm}}^{\pm*}$  und  $p_{\text{fwm}}^{\pm*}$ . Aus Gründen der Übersichtlichkeit gruppieren wir alle optischen Felder zu einem Vektor  $\mathbb{E} = (E_{\text{noise}}^+, E_{\text{noise}}^-, E_{\text{fwm}}^{+*}, E_{\text{fwm}}^{-*})^t$  und alle exzitonischen Felder zu  $\mathbb{P} = (p_{\text{noise}}^+, p_{\text{noise}}^-, p_{\text{fwm}}^{+*}, p_{\text{fwm}}^{-*})^t$ . In dieser Notation folgt für die Dynamik von  $\mathbb{E}$  und  $\mathbb{P}$ :

$$\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \mathbb{E} \\ \mathbb{P} \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} \mathbb{M}_{EE} & \mathbb{M}_{Ep} \\ \mathbb{M}_{pE} & \mathbb{M}_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{E} \\ \mathbb{P} \end{pmatrix} \equiv \mathbb{M}(\mathbf{k}) \begin{pmatrix} \mathbb{E} \\ \mathbb{P} \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Analog zu Abschn. 2.4 wurden bei der Herleitung alle quadratischen und kubischen Terme in den nichtaxialen Feldern vernachlässigt.  $\mathbb{M}_{EE}$ ,  $\mathbb{M}_{Ep}$ ,  $\mathbb{M}_{pE}$  und  $\mathbb{M}_{pp}$  sind 4x4 Blockmatrizen. Die Kopplung zwischen  $\mathbb{E}$  und  $\mathbb{E}$  wird in Gl. 3.22 durch

$$\mathbb{M}_{EE} = \begin{pmatrix} \Delta \hbar \omega_{\mathbf{k}}^c & \Delta_{\mathbf{k}}^+ & 0 & 0 \\ \Delta_{\mathbf{k}}^- & \Delta \hbar \omega_{\mathbf{k}}^c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Delta \hbar \omega_{\mathbf{k}}^{c*} & -\Delta_{\mathbf{k}}^{+*} \\ 0 & 0 & -\Delta_{\mathbf{k}}^{-*} & -\Delta \hbar \omega_{\mathbf{k}}^{c*} \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

beschrieben, wobei  $\Delta \hbar \omega_{\mathbf{k}}^c = \hbar \omega_{\mathbf{k}}^c - \hbar \omega_p - i\gamma_c$  die Verstimmung der photonischen Mode zur Pumpfrequenz ist. Die TE-TM-Aufspaltung  $\Delta_{\mathbf{k}}^\pm$  führt zu einer Kopplung zwischen  $E_{\text{noise}}^+$  und  $E_{\text{noise}}^-$  sowie zwischen  $E_{\text{fwm}}^{+*}$  und  $E_{\text{fwm}}^{-*}$ . Komplizierter ist die Matrix  $\mathbb{M}_{pp}$ , die

$\mathbb{P}$  an  $\mathbb{P}$  koppelt:

$$\mathbb{M}_{pp} = \begin{pmatrix} \Delta\epsilon_{\mathbf{k}}^{x+} & U^+ & V^+ & W^+ \\ U^- & \Delta\epsilon_{\mathbf{k}}^{x-} & W^- & V^- \\ -V^{+*} & -W^{+*} & -\Delta\epsilon_{\mathbf{k}}^{x+*} & -U^{+*} \\ -W^{-*} & -V^{-*} & -U^{-*} & -\Delta\epsilon_{\mathbf{k}}^{x-*} \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Die Diagonaleinträge  $\Delta\epsilon_{\mathbf{k}}^{x\pm} = \epsilon_{\mathbf{k}}^x + \alpha_{\text{PSF}}\Omega_x p_0^{\pm*} E_0^{\pm} + 2T^{++}|p_0^{\pm}|^2 + T^{+-}|p_0^{\mp}|^2 - \hbar\omega_p - i\gamma_x$  entsprechen der Frequenzverstimung zu einem blauverschobenen Exzitonenband. Der Term  $U^{\pm} = T^{+-}p_0^{\mp*}p_0^{\pm}$  bezeichnet eine Kopplung zwischen verschieden zirkular polarisierten Komponenten  $p_{\text{noise}}^+$  und  $p_{\text{noise}}^-$  bzw. zwischen  $p_{\text{fwm}}^{+*}$  und  $p_{\text{fwm}}^{-*}$ , während die Terme  $V^{\pm} = \alpha_{\text{PSF}}\Omega_x p_0^{\pm} E_0^{\pm} + T^{++}(p_0^{\pm})^2$  und  $W^{\pm} = T^{+-}p_0^{\mp}p_0^{\pm}$  die nichtaxialen Polari- tonen an ihre Vierwellenmischfelder koppeln. Letztlich wird die Kopplung zwischen  $\mathbb{E}$  und  $\mathbb{P}$  durch die Matrizen

$$\mathbb{M}_{Ep} = \begin{pmatrix} -\Omega_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Omega_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega_x \end{pmatrix}, \mathbb{M}_{pE} = \begin{pmatrix} -\tilde{\Omega}_x^+ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\tilde{\Omega}_x^- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\Omega}_x^+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{\Omega}_x^- \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

beschrieben, wobei  $\tilde{\Omega}_x^{\pm} = \Omega_x(1 - \alpha_{\text{PSF}}|p_0^{\pm}|^2)$  die um die Phasenraumfüllung reduzierte Photon-Exziton-Kopplung ist.

Für eine Bewertung der Stabilität ist der Eigenwert der Matrix  $\mathbb{M}$  (Gl. 3.22) mit dem größten Realteil  $\beta(\mathbf{k}) = \max(\Re(\text{eig}(\mathbb{M}(\mathbf{k}))))$  ausschlaggebend. Durch die TE-TM Aufspaltung ist dieser jedoch nicht nur vom Betrag  $k$  (vgl. Abschn. 2.4), sondern auch von der Richtung  $\varphi_k$  abhängig. Um die unterschiedlichen Einflüsse der TE-TM-Aufspaltung und der polarisationsabhängigen Wechselwirkung getrennt zu entschlüsseln, zeigt Abb. 3.6  $\beta(\mathbf{k})$  im  $k$ -Raum für drei verschiedene Fälle: (i) Ohne TE-TM-Aufspaltung und mit  $T^{+-} = 0$  (a und b), (ii) mit TE-TM-Aufspaltung und mit  $T^{+-} = 0$  (c und d) und (iii) mit TE-TM-Aufspaltung und mit  $T^{+-} < 0$  (e und f). Die Polarisation der Pumppolari- tonen zeigt in  $x$ -Richtung. Um die auftretenden Effekte deutlich darstellen zu können, wurden kleine Linienbreiten  $\gamma_c = \gamma_x = 0.1$  meV und eine große TE-TM-Aufspaltung gewählt ( $m_{\text{TE}} = 1.25 \cdot m_{\text{TM}}$ ). Die Exzitonendichte  $|p_0^{\pm}|^2 = 0.25 \cdot 10^{10} \text{cm}^{-2}$  liegt für diese Parameter über der Instabilitätsschwelle, so dass es in allen drei Fällen Bereiche mit  $\beta(\mathbf{k}) > 0$  gibt. Die restlichen Parameter entsprechen denen aus Abschn. 3.2 und 3.4.

Ohne TE-TM-Aufspaltung und für  $T^{+-} = 0$  hängt  $\beta(\mathbf{k})$  nur vom Betrag  $k$  ab. Die Auswahl  $\beta(\mathbf{k}) > 0$  markiert einen Kreis (Abb. 3.6 a), dessen Radius einer Resonanz auf dem (ggf. blauverschobenen) LPB entspricht. Außerhalb dieses Bereiches spiegelt  $\beta(\mathbf{k})$  die polaritonische Zerfallsrate wider (-0.1 meV). Die Polarisation der nichtaxialen

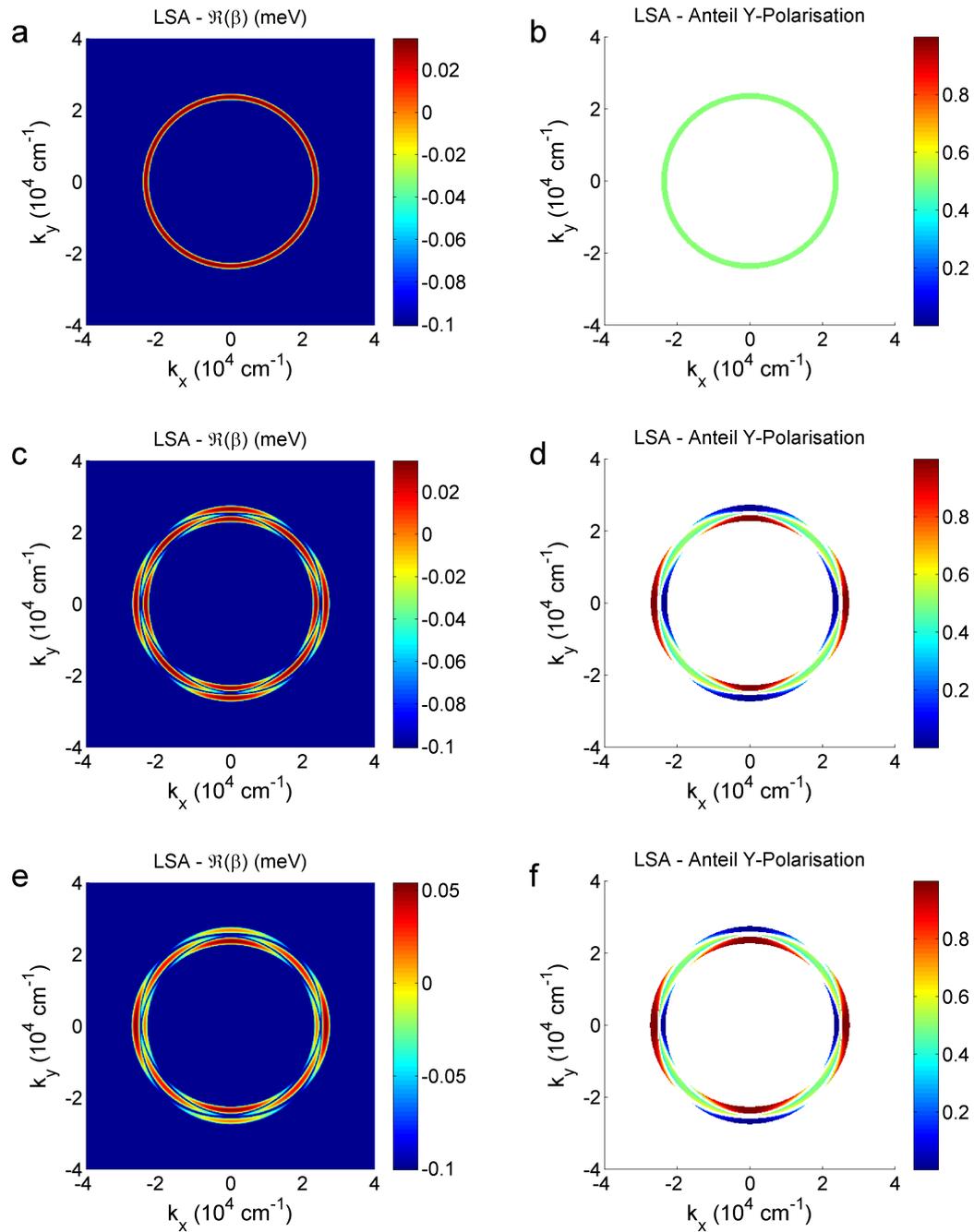


FIGURE 3.6: Die maximale effektive Wachstumsrate  $\beta(\mathbf{k})$  nichtaxialer Polaritonen wird für die beschriebenen Fälle im  $k$ -Raum gezeigt (a,c,e). Die Polarisation der entsprechenden Eigenmoden ist für die interessanten Bereiche in der rechten Spalte (b,d,f) zu sehen. Der Wert 0 entspricht hier einer reinen  $x$ -, der Wert 1 einer reinen  $y$ -Polarisation. Zwischenwerte entsprechen nicht unbedingt linearen Polarisationszuständen.

Polaritonen ist in diesem Fall für  $\beta(\mathbf{k})$  ohne Bedeutung: Eine Projektion der Eigenmoden von  $\beta(\mathbf{k}) > 0$  auf den  $y$ -Polarisationskanal ergibt einen  $y$ -polarisierten Anteil von  $\frac{1}{2}$  (Abb. 3.6 b). Schaltet man die TE-TM-Aufspaltung ein, bricht diese die azimutale Symmetrie auf, der Kreis spaltet sich parallel und senkrecht zur Polarisationsrichtung in zwei Kreisabschnitte mit unterschiedlichen Radien (Abb. 3.6 c) auf. Entlang der Polarisationsrichtung werden die Pump polaritonen entweder zu Streuprozessen auf die TM-Mode (geringerer Radius) oder auf die TE-Mode (größerer Radius) stimuliert (bei einer Streuung senkrecht zur Polarisationsrichtung umgekehrt), was die  $x$ - bzw.  $y$ -Polarisation der jeweiligen Kreisabschnitte erklärt (Abb. 3.6 d). Die Kreisabschnitte bei  $\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{\pi}{4}, 3\frac{\pi}{4}, 5\frac{\pi}{4}$  und  $7\frac{\pi}{4}$  bleiben jedoch gemischt polarisiert: Diese entsprechen einer paarweisen Streuung jeweils eines Pump polaritons in die TM-Mode und des anderen in die TE-Mode. Für eine resonante Streuung wird das eine energetisch rot-, das andere energetisch blauverschoben (nicht gezeigt). Für  $T^{+-} < 0$  wird das Einstreuen in den  $y$ -Polarisationskanal effektiver, wie in Abschn. 3.4 beschrieben wurde. Somit wird  $\beta(\mathbf{k})$  für  $y$ -polarisierte Moden größer, für  $x$ -polarisierte Moden kleiner (Abb. 3.6 e). Die vierzählige Symmetrie in Abb. 3.6 c wird dadurch auf eine zweizählige reduziert. Die Polarisation der Moden bleibt gegenüber Abb. 3.6 d unverändert (Abb. 3.6 f).

### 3.5.1 LSA mit der polarisationsabhängigen GPE

Für eine analytische Behandlung bietet es sich analog zu Abschn. 2.4 an, die LSA mit Hilfe der polarisationsabhängigen GPE (Gl. 3.13) durchzuführen. Mit dem Ansatz

$$\Psi^\pm(\mathbf{r}, t) = \left( \Psi_0^\pm + \Psi_{\text{noise}}^\pm e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \Psi_{\text{fwm}}^\pm e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \right) e^{-i\omega t}, \quad (3.26)$$

erhalten wir in völliger Analogie zu Gl. 3.22 die gekoppelte Bewegungsgl.

$$\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \Psi_{\text{noise}}^\parallel \\ \Psi_{\text{fwm}}^{\parallel*} \\ \Psi_{\text{noise}}^\perp \\ \Psi_{\text{fwm}}^{\perp*} \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} \mathbb{M}_{\text{XX}} & \mathbb{M}_{\text{XY}} \\ \mathbb{M}_{\text{YX}} & \mathbb{M}_{\text{YY}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_{\text{noise}}^\parallel \\ \Psi_{\text{fwm}}^{\parallel*} \\ \Psi_{\text{noise}}^\perp \\ \Psi_{\text{fwm}}^{\perp*} \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

$\Psi_{\text{noise}}^\parallel$ ,  $\Psi_{\text{fwm}}^{\parallel*}$ ,  $\Psi_{\text{noise}}^\perp$  und  $\Psi_{\text{fwm}}^{\perp*}$  bezeichnen die Rausch- und Vierwellenmischfelder in der in Abschnitt 3.3 eingeführten  $\parallel$ - $\perp$ -Basis. Die  $2 \times 2$  Blockmatrizen  $\mathbb{M}_{\text{XX}}$ ,  $\mathbb{M}_{\text{YY}}$ ,  $\mathbb{M}_{\text{YX}}$  und  $\mathbb{M}_{\text{XY}}$  bewirken jeweils eine Kopplung zwischen den Polarisationskanälen  $\parallel$  und  $\parallel$ ,  $\perp$  und  $\perp$ , sowie die letzteren zwischen  $\parallel$  und  $\perp$ . Für diese gelten

$$\mathbb{M}_{\text{XX}} = \begin{pmatrix} \Delta \epsilon_{\mathbf{k}}^{\parallel} + \Gamma_{\mathbf{k}} \cos(2\Delta\varphi_{\mathbf{k}}) & \frac{1}{2} (\alpha^{++} + \alpha^{+-}) \Psi_0^{\parallel 2} \\ -\frac{1}{2} (\alpha^{++} + \alpha^{+-}) \Psi_0^{\parallel* 2} & -\Delta \epsilon_{\mathbf{k}}^{\parallel*} - \Gamma_{\mathbf{k}} \cos(2\Delta\varphi_{\mathbf{k}}) \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

$$\mathbb{M}_{YY} = \begin{pmatrix} \Delta\epsilon_{\mathbf{k}}^{p\perp} - \Gamma_{\mathbf{k}} \cos(2\Delta\varphi_{\mathbf{k}}) & -\frac{1}{2}(\alpha^{++} - \alpha^{+-}) |\Psi_0^\parallel|^2 \\ \frac{1}{2}(\alpha^{++} - \alpha^{+-}) |\Psi_0^\parallel|^2 & -\Delta\epsilon_{\mathbf{k}}^{p\perp*} + \Gamma_{\mathbf{k}} \cos(2\Delta\varphi_{\mathbf{k}}) \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

sowie

$$\mathbb{M}_{XY} = \mathbb{M}_{YX} = \begin{pmatrix} \Gamma_{\mathbf{k}} \sin(2\Delta\varphi_{\mathbf{k}}) & 0 \\ 0 & -\Gamma_{\mathbf{k}} \sin(2\Delta\varphi_{\mathbf{k}}) \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

Hierbei sind  $\Delta\epsilon_{\mathbf{k}}^{p\parallel} = \epsilon_{\mathbf{k}}^p + (\alpha^{++} + \alpha^{+-}) |\Psi_0^\parallel|^2 - \hbar\omega_p - i\gamma_p$ ,  $\Delta\epsilon_{\mathbf{k}}^{p\perp} = \epsilon_{\mathbf{k}}^p + \alpha^{++} |\Psi_0^\parallel|^2 - \hbar\omega_p - i\gamma_p$  und  $\Gamma_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{4} \left( \frac{1}{m_{\text{TM},p}} - \frac{1}{m_{\text{TE},p}} \right)$ . Beträgt der Einschlusswinkel zwischen Polarisations-ebene und Einfallsebene  $\Delta\varphi_{\mathbf{k}}$  ganzzahlige Vielfache von  $\frac{\pi}{2}$ , wird  $\sin(2\Delta\varphi_{\mathbf{k}}) = 0$  und die Matrix in Gl. 3.27 wird blockdiagonal. Das Eigenwertspektrum setzt sich dann aus den Eigenwerten von  $\mathbb{M}_{XX}$  ( $\beta_{\mathbf{k}}^{\text{XX}}$ ) und  $\mathbb{M}_{YY}$  ( $\beta_{\mathbf{k}}^{\text{YY}}$ ) zusammen, was die Problemstellung erheblich erleichtert.

Eine einfache Rechnung ergibt die Eigenwerte

$$\beta_{\mathbf{k}}^{\text{XX}\pm} = -\gamma_p \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\alpha^{++} + \alpha^{+-})^2 |\Psi_0^\parallel|^4 - \Re\Delta\epsilon_{\mathbf{k}}^{p\parallel} - \Gamma_{\mathbf{k}} \cdot \text{sgn}}. \quad (3.31)$$

und

$$\beta_{\mathbf{k}}^{\text{YY}\pm} = -\gamma_p \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\alpha^{++} - \alpha^{+-})^2 |\Psi_0^\parallel|^4 - \Re\Delta\epsilon_{\mathbf{k}}^{p\perp} + \Gamma_{\mathbf{k}} \cdot \text{sgn}}. \quad (3.32)$$

Das Vorzeichen  $\text{sgn}$  nimmt den Wert 1 für  $\Delta\varphi_{\mathbf{k}} = 0$  oder  $\pi$  und -1 für  $\Delta\varphi_{\mathbf{k}} = \frac{\pi}{2}$  oder  $3\frac{\pi}{2}$  an.

Liegt die Pumpfrequenz oberhalb der blauverschobenen Polaritonzweige (siehe die Diskussion in Abschn. 2.4), wird  $\beta_{\mathbf{k}}^{\text{XX}+}$  für  $\Re\Delta\epsilon_{\mathbf{k}}^{p\parallel} + \Gamma_{\mathbf{k}} \cdot \text{sgn} = 0$  maximal,  $\beta_{\mathbf{k}}^{\text{YY}+}$  jedoch für  $\Re\Delta\epsilon_{\mathbf{k}}^{p\perp} - \Gamma_{\mathbf{k}} \cdot \text{sgn} = 0$ , wodurch es zu der charakteristischen Aufspaltung der in Abb. 3.6 gezeigten Kreisabschnitte kommt.

Die Maxima betragen jeweils  $\max(\beta^{\text{XX}+}) = -\gamma_p + \frac{1}{2}(\alpha^{++} + \alpha^{+-}) |\Psi_0^\parallel|^2$  sowie  $\max(\beta^{\text{YY}+}) = -\gamma_p + \frac{1}{2}(\alpha^{++} - \alpha^{+-}) |\Psi_0^\parallel|^2$ . Für  $\alpha^{+-} < 0$  wird somit  $\max(\beta^{\text{YY}}) > \max(\beta^{\text{XX}})$ , was der bevorzugten Streuung in  $y$ -polarisierte Moden und dem Resultat in Abb. 3.6 e entspricht.

### 3.6 Musterbildung in einem linear polarisierten Spinorfeld

Im Falle einer nichtaxialen Instabilität lässt sich die Ausbildung optischer Muster mit Hilfe numerischer Rechnungen wie in Abschn. 2.5.2 simulieren. Als erster Fall (Abschn. 3.6.1) wird für eine lineare Polarisation eine Musterbildung in einem System

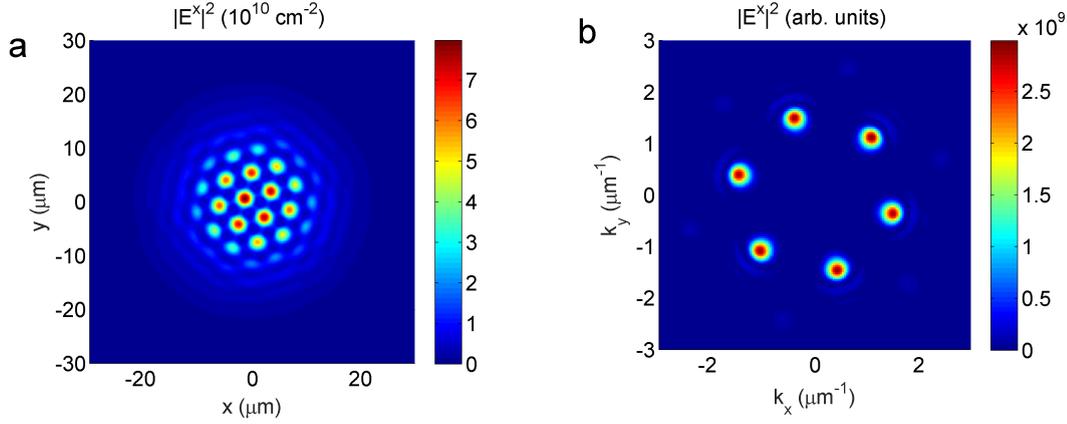


FIGURE 3.7: Stationäre Muster für  $T^{+-} > 0$  im Orts- (a) und  $k$ -Raum (b) im  $x$ -Polarisationskanal. Abgebildet sind die photonischen Dichten  $|E^x|^2$ . Der Pump bei  $k = 0$  ist ausgeblendet.

mit verschwindend geringer TE-TM-Aufspaltung diskutiert, wobei zwischen dem hypothetischen Fall  $T^{+-} > 0$  und  $T^{+-} < 0$  unterschieden wird. Eine Musterbildung mit signifikanter TE-TM-Aufspaltung wird in Abschn. 3.6.2 untersucht. Bei dieser spielen neben den Auswahlregeln im quadratischen Vierwellenmischen auch der im Rahmen der LSA gezeigte Symmetriebruch eine entscheidende Rolle.

### 3.6.1 Musterbildung ohne TE-TM-Aufspaltung

Um die Musterbildung für diese Fälle zu untersuchen, wurden die Gln. 3.5 und 3.6 wie in Abschn. 3.2 numerisch gelöst<sup>5</sup>, allerdings für eine  $x$ -polarisierte Anregung ( $E_{\text{pump}}^+ = E_{\text{pump}}^-$ ). Für diesen Abschnitt wurde eine verschwindend geringe TE-TM-Aufspaltung gewählt ( $m_{\text{TM}} = 1.00001 \cdot m_{\text{TE}}$ ). Aufgrund seines axialen Einfalls ( $\mathbf{k}_{\text{pump}} = 0$ ) erzeugt der Pump bei  $\mathbf{k} = 0$  ein ebenso  $x$ -polarisiertes Polaritonfeld, bestehend aus  $E^+ = E^-$  und  $p^+ = p^-$ . Bei einer Exzitonendichte von  $|p^+|^2 + |p^-|^2 = 1.77 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2}$  ist dieses (der LSA zufolge) instabil. Abb. 3.7 zeigt ein stationäres Muster zum Zeitpunkt  $t = 4 \text{ ns}$ , das sich im Fall einer abstoßenden Wechselwirkung ( $T^{+-} = T^{++}/5$ ) zwischen kozykular polarisierten Exzitonen gebildet hat. Das Ortsraummuster (a) und das hexagonale  $k$ -Raummuster (b) ähneln, bis auf höhere Dichten, den Mustern für eine zirkular polarisierte Anregung (Abb. 3.2), sind aber  $x$ -polarisiert. Die Orientierung des Hexagons ist dabei willkürlich, ein Symmetriebruch erfolgt in der Rechnung durch das Störstellenpotential.

Aufgrund von  $T^{+-} = T^{++}/5 > 0$  streuen, wie in Abschn. 3.4 diskutiert, die Pump polaritonen bevorzugt in  $x$ -polarisierte Moden. Aufgrund der quadratischen Streuprozesse,

<sup>5</sup>Das Störstellenpotential und die Parameter wurden, wenn nicht anders angegeben, aus diesem Abschnitt übernommen.

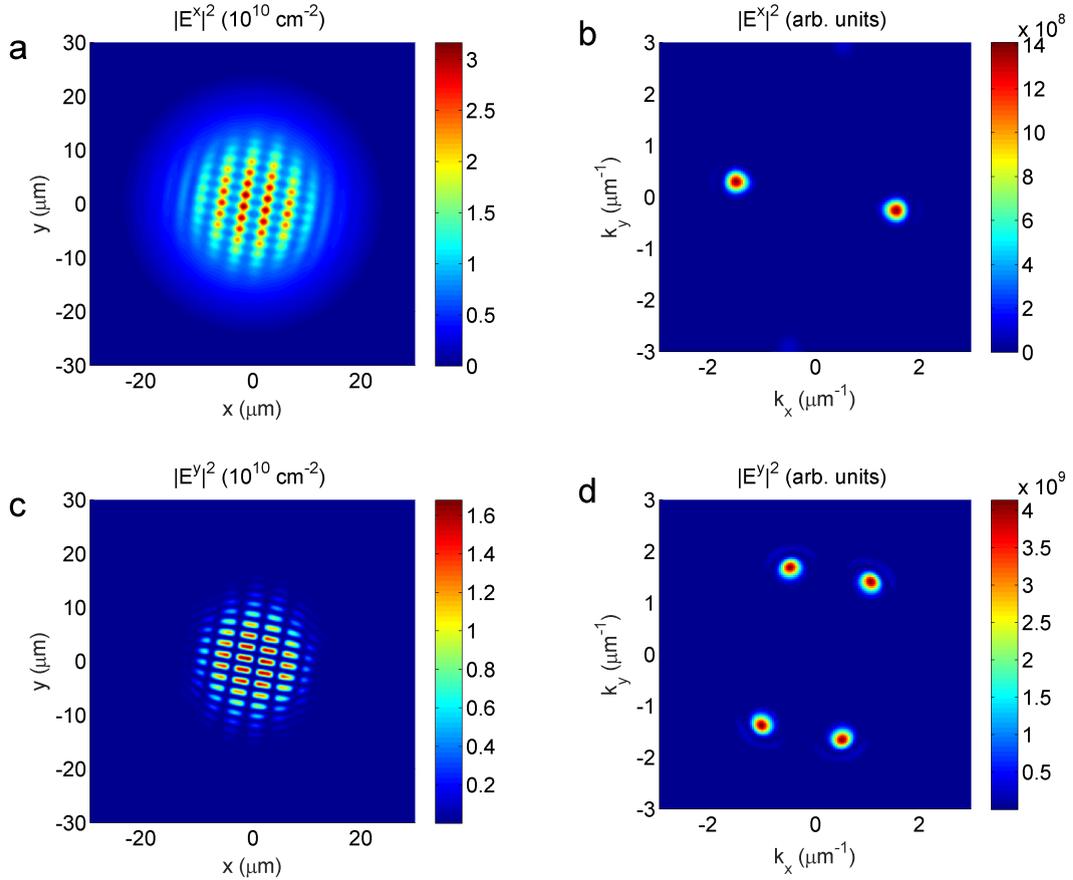


FIGURE 3.8: Stationäre Muster für  $T^{+-} < 0$  im Orts- (a,c) und  $k$ -Raum (b,d) und aufgelöst nach  $x$ - (a,b) und  $y$ -Polarisationskanal (c,d). Das Pumpfeld bei  $k = 0$  wurde nur in Abb. b ausgeblendet.

die zwischen  $x$ -polarisierten Polaritonen polarisationserhaltend sind, kristallisiert sich im Laufe der Musterbildung ein  $x$ -polarisiertes Hexagon heraus. Die Phänomenologie sieht jedoch anders aus, wenn die nichtaxialen Moden  $y$ -polarisiert anwachsen, wie es für  $T^{+-} = -T^{++}/5 < 0$  der Fall ist. Hier widerspricht ein vollständig  $y$ -polarisiertes Muster den in Abschn. 3.4 diskutierten Auswahlregeln: Kommt es bei einer hinreichend hohen Dichte zu relevanten quadratischen Streuprozessen, erzeugen zwei  $y$ -polarisierte Felder in hexagonaler Geometrie resonant ein  $x$ -polarisiertes QFWM. Im optisch instabilen Fall bildet sich dadurch ein hexagonales Muster im  $k$ -Raum, von dem vier Moden  $y$ -polarisiert sind, zwei gegenüber liegende jedoch  $x$ -polarisiert, wie in Abb. 3.8 gezeigt ist. Aufgrund des stärkeren Einstreuens der Pump polaritonen sind die  $y$ -polarisierten Dichten höher.

### 3.6.2 Musterbildung mit TE-TM-Aufspaltung

Durch eine starke TE-TM-Aufspaltung ( $m_{\text{TE}} = 1.05 \cdot m_{\text{TM}}$ ) wird die Musterbildung wesentlich verkompliziert. Die azimutale Symmetrie ist durch sie bei linear polarisierter Anregung bereits aufgehoben ist, daher betrachten wir in diesem Abschnitt ein System mit einem nur marginalen Störstellenpotential (um den Faktor  $10^{-2}$  verkleinert). Die Wechselwirkung zwischen Exzitonen mit unterschiedlichem Spin sei anziehend ( $T^{+-} = -T^{++}/5 < 0$ ). Der Symmetriebruch durch die TE-TM-Aufspaltung erfolgt im Wesentlichen auf zwei Ebenen: Zum einen werden nichtaxiale Polaritonen abhängig von  $\Delta\varphi_{\mathbf{k}}$  unterschiedlich stark  $y$ -polarisiert, wie es in Abschn. 3.3 diskutiert wurde. Zum anderen streuen die Pump polaritonen - ebenso abhängig von  $\Delta\varphi_{\mathbf{k}}$  - unterschiedlich stark in die  $y$ -polarisierten Moden, wie anhand der LSA in Abschn. 3.5 untersucht wurde.

Eine Verschränkung beider Effekte sorgt für einen interessanten Prozess der Musterbildung, wie er anhand von  $k$ -Raumdichten für verschiedene Zeiten in Abb. 3.9 veranschaulicht wurde: Durch ein endliches Ortsraumprofil setzt sich das  $x$ -polarisierte Polaritonfeld auch aus endlichen nichtaxialen Moden zusammen, die durch die TE-TM-Aufspaltung einen  $y$ -polarisierten Anteil erhalten. Diese sind auf dem LPB bei  $k \approx 2 \mu\text{m}^{-1}$  resonant, wie zu einem Zeitpunkt  $t = 40 \text{ ps}$  im  $y$ -Polarisationskanal zu sehen ist (Abb. 3.9 a). Die Photonendichte  $|E^y|^2$  ist allerdings nicht gleichförmig verteilt, sondern ist mit  $|\sin(2\varphi_{\mathbf{k}})|^2$  moduliert und wird somit entlang beider Raumdiagonalen maximal. Die Pump polaritonen streuen jedoch bevorzugt in die TE- oder TM-Mode und somit in Richtungen, in denen anfangs kein stimulierendes  $y$ -polarisiertes Feld vorhanden ist. Somit ergibt sich ein bevorzugtes Anwachsen der entlang der  $x$ - und  $y$ -Achse nahe gelegenen Moden, wodurch sich aus den vier Sichel in Abb. 3.9 a insgesamt acht Punkte herauskristallisieren, die aus vier gegenüberliegenden Paaren bestehen (Abb. 3.9 b). Diese wachsen aufgrund des geringen Störstellenpotentials ungleichmäßig stark an, bis sie von einem entlang der  $y$ -Achse orientiertem Paar verdrängt werden (Abb. 3.9 c). Aufgrund der quadratischen Wellenmischprozesse beginnt ab einer hinreichend hohen Dichte die Bildung eines Hexagons, das sich an diesen Punkten orientiert (Abb. 3.9 d). Abb. 3.9 e und f zeigen die nach ca. 3 ns auskonvergierten Dichten, projiziert auf ihren jeweils  $x$ - und  $y$ -polarisierten Anteil<sup>6</sup>. Charakteristisch ist die Aufteilung des Musters in die zwei intensiven, überwiegend  $y$ -polarisierten Punkte entlang der  $y$ -Achse und in die vier schwächeren, gemischt polarisierten. Von den vier schwächeren Punkten sind wiederum zwei stärker (für  $k_x < 0$ ) und zwei schwächer  $y$ -polarisiert (für  $k_x > 0$ ). Die Orientierung dieses überraschenden Symmetriebruchs ist jedoch willkürlich und hängt in jeder Rechnung vom Störstellenpotential ab.

<sup>6</sup>Alle sechs Punkte sind grundsätzlich elliptisch polarisiert. Aus Gründen der Übersicht wurde auf eine genauere Aufschlüsselung, z.B. durch Bestimmung der Stokesparameter, verzichtet.

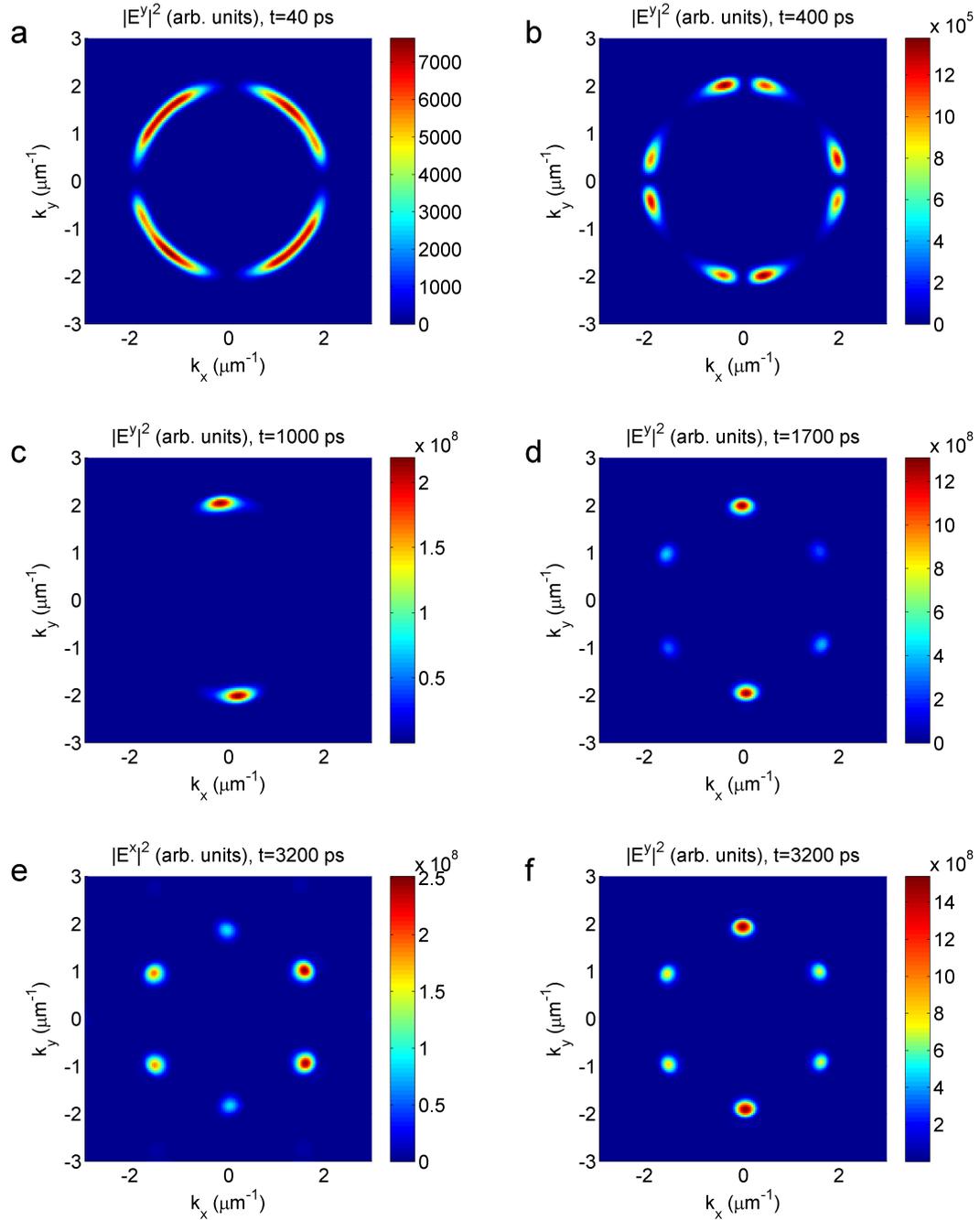


FIGURE 3.9: a-d: Entwicklung der photonischen Dichte  $|E^y|^2$  für verschiedene Momentaufnahmen im  $k$ -Raum. Abb. e und f zeigen die stationären Dichten  $|E^x|^2$  und  $|E^y|^2$ . Der Bereich um  $k = 0$  ist in Abb. e ausgeblendet.

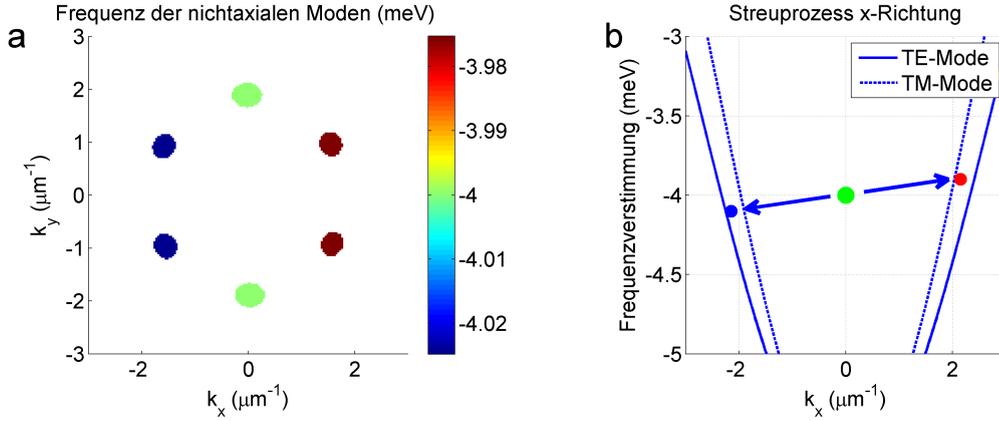


FIGURE 3.10: a: Frequenz der in Abb. 3.9 e und f relevanten Felder. Der Energieullpunkt wurde hierbei auf das Exzitonenband gelegt. b: Streuprozess der Pump polaritonen in die schwächeren nichtaxialen Moden. Die paarweise Streuung ist mit den blauen Pfeilen markiert. Zur Verdeutlichung wurde die TE-TM-Aufspaltung und die Frequenzverstimmung stark übertrieben.

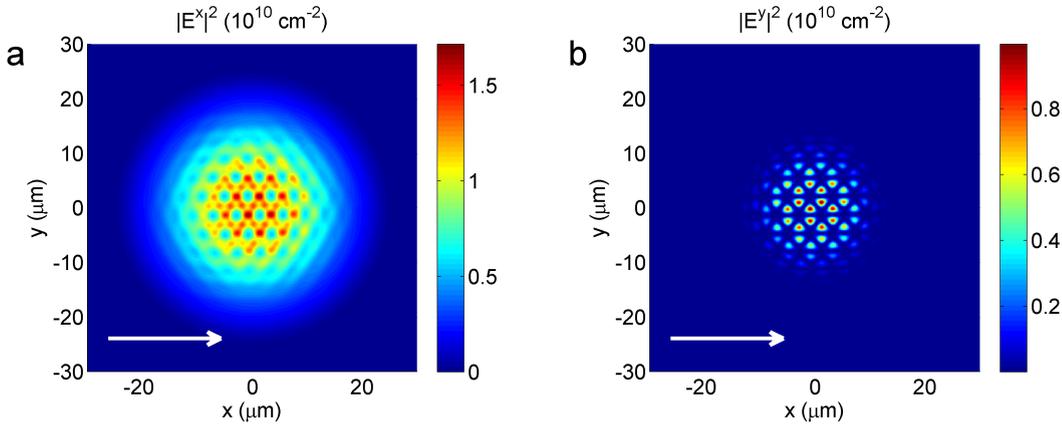


FIGURE 3.11: Momentaufnahmen der nichtstationären Ortsraumdichten  $|E^x|^2$  und  $|E^y|^2$  bei  $t = 3200$  ps. Der weiße Pfeil markiert die Driftrichtung.

Abb. 3.10 a zeigt die Frequenzen der nichtaxialen Moden: Während die auf der Orientierungsachse ( $y$ -Achse) gelegenen Felder mit der Pumpfrequenz ( $\hbar\omega_p = \epsilon_0^x - 4$  meV) oszillieren, sind die schwächeren vier um  $\Delta\hbar\omega = \pm 0.025$  meV verstimmt (jeweils links bzw. rechts von der  $y$ -Achse). Beide Seiten des Symmetriebruchs - die unterschiedliche Polarisation und die Frequenzverstimmung - lassen sich durch ein Auftreten bei festen Impulsen  $\mathbf{k}$  erklären, die den schwächeren vier nichtaxialen Feldern im Zuge der quadratischen Streuprozesse aufgezungen werden. Damit zwei Pump polaritonen annähernd resonant in diese Moden streuen können, streut ein Pump polariton zu einer tieferen Frequenz (und damit näher zur TE-Mode), ein anderes energetisch höher (und damit näher zur TM-Mode), um der Energieerhaltung gerecht zu werden. Dieser asymmetrische Streuprozess ist in Abb. 3.10 b skizziert.

Die Frequenzverstimmung führt dazu, dass sich im Ortsraum kein stationäres Muster

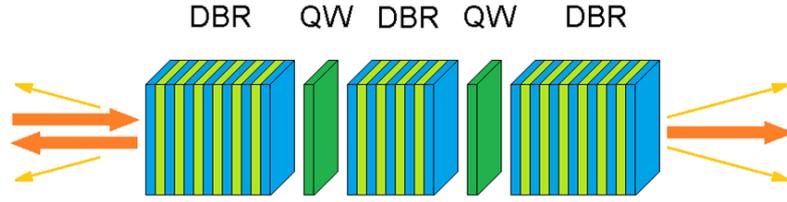


FIGURE 3.12: Schematische Skizze einer Doppelkavität. Zwei Teilkavitäten teilen sich einen zentralen Bragg-Spiegel. Markiert ist ein axial eintreffender Pump (orange) und emittierte, nichtaxiale Moden (gelb).

ausbildet, sondern ein gleichmäßig in  $x$ -Richtung driftendes. Abb. 3.11 zeigt eine Momentaufnahme der Ortsraumdichten aufgeteilt in  $|E^x|^2$  (a) und  $|E^y|^2$  (b) zu den in Abb. 3.9 e und f gezeigten  $k$ -Raumdichten. Die Bewegungsrichtung und Geschwindigkeit ist in beiden Polarisationskanälen dieselbe und jeweils mit einem weißen Pfeil markiert. Dieses überraschende Phänomen wurde unabhängig von uns von Egorov et al. entdeckt und 2014 publiziert [27]. Es lässt sich als Folge des Symmetriebruchs anhand eines einfachen Modells erklären: Angenommen, ein homogenes Feld  $\Psi_0$  wird von zwei nichtaxialen Feldern  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  mit einer Frequenzverstimmung von jeweils  $\pm\Delta\omega$  überlagert.  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  haben die entgegengesetzten Impulse  $k_x$  und  $-k_x$ , so dass für das gesamte Feld  $\Psi$  gilt:

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_1 e^{i(k_x x - \Delta\omega t)} + \Psi_2 e^{i(-k_x x + \Delta\omega t)}. \quad (3.33)$$

Die Ortsraumdichte  $|\Psi|^2$  weist als Folge der Interferenz mit den nichtaxialen Feldern ein Streifenmuster auf. Maxima z.B. liegen bei konstruktiver Interferenz vor, d.h. wenn  $k_x x - \Delta\omega t = 0$ . Das Muster wird somit zeitabhängig und bewegt sich mit einer Driftgeschwindigkeit  $v_d = \Delta\omega/k_x$ . In unserem Fall beträgt  $k_x = 1.6 \mu\text{m}^{-1}$  und  $\Delta\omega = 0.038 \text{ ps}^{-1}$ , woraus  $v_d \approx 24 \text{ nm/ps}$  folgt. Dieser Wert stimmt auch mit einer direkten Auswertung der Geschwindigkeit im Ortsraum überein.

### 3.7 Experimente zu Vierwellenmischen und Musterbildung

Um die komplexe Theorie eines linear polarisierten Polaritonfluids mit experimentellen Daten zu vergleichen, präsentiert dieser Abschnitt die Ergebnisse einer theoretisch-experimentellen Kollaboration mit der Arbeitsgruppe von Prof. Jérôme Tignon von der ENS Paris. Diese umfasste Vierwellenmischexperimente für LFWM und QFWM, das Auftreten hexagonaler Fernfeldmuster sowie durch Anisotropie erzeugte Übergänge zwischen verschiedenen Mustern [1]. Ferner gehen wir in diesem Abschnitt auf Schaltprozesse ein [4]. Das in den Experimenten untersuchte System war jedoch keine Kavität, wie sie in den vorangegangenen Abschnitten behandelt wurde, sondern eine aus zwei Teilkavitäten

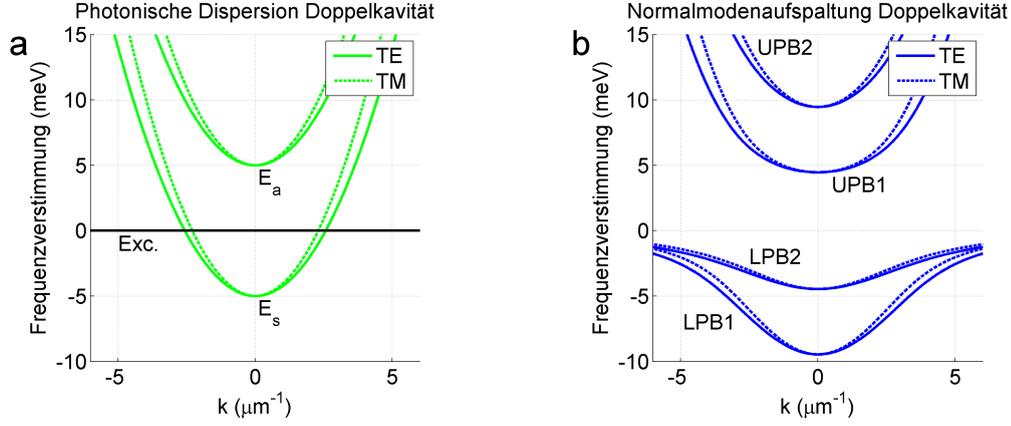


FIGURE 3.13: a: Aufspaltung der photonischen Dispersion in eine symmetrische ( $E_s$ ) und antisymmetrische Mode ( $E_a$ ). b: Weitere Normalmodenaufspaltung in zwei untere (LPB1, LPB2) und obere Polaritonzweige (UPB1, UPB2).

bestehende Doppelkavität. Bevor die Ergebnisse der Zusammenarbeit präsentiert werden, diskutieren wir im folgenden Unterabschnitt dieses System und erweitern unser theoretisches Modell dementsprechend.

### 3.7.1 Doppelkavitäten

Doppelkavitäten bestehen aus zwei Einzelkavitäten (hier mit dem Index 1 und 2 versehen), die über einen zentralen Bragg-Spiegel miteinander verbunden sind (Abb. 3.12). Zwischen beiden Teilkavitäten findet ein kohärenter Energieaustausch statt, der einer Kopplung zwischen den optischen Feldern  $E_1$  und  $E_2$  entspricht [32, 62]. Für die Dynamik in einer Doppelkavität folgt somit für jede Mode  $\mathbf{k}$ :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} E_{1,\mathbf{k}} \\ E_{2,\mathbf{k}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hbar\omega_{\mathbf{k}}^c - i\gamma_c & -\Omega_c \\ -\Omega_c & \hbar\omega_{\mathbf{k}}^c - i\gamma_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{1,\mathbf{k}} \\ E_{2,\mathbf{k}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_{\text{pump}1,\mathbf{k}} \\ E_{\text{pump}2,\mathbf{k}} \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

Hierbei wurden zwei identische Teilkavitäten mit derselben photonischen Dispersion  $\hbar\omega_{\mathbf{k}}^c$  und derselben Zerfallsrate  $\gamma_c$  angenommen.  $E_{\text{pump}1,\mathbf{k}}$  und  $E_{\text{pump}2,\mathbf{k}}$  entsprechen den externen Quelltermen von  $E_{1,\mathbf{k}}$  bzw.  $E_{2,\mathbf{k}}$ . Anders als in Quelle [62] wurde hier die  $k$ -Abhängigkeit des Kopplungsparameters  $\Omega_c$  vernachlässigt. Die Kopplung der optischen Felder an die Polarisation ist in Gl. 3.34 vorerst nicht berücksichtigt.

Die Kopplung zwischen den Kavitäten führt zu einer Normalmodenaufspaltung der Dispersion in  $\hbar\omega_{\mathbf{k}}^s = \hbar\omega_{\mathbf{k}}^c - \Omega_c$  und  $\hbar\omega_{\mathbf{k}}^a = \hbar\omega_{\mathbf{k}}^c + \Omega_c$ , wie sich durch eine Diagonalisierung der Matrix in Gl. 3.34 zeigen lässt. Die Indizes “s” und “a” stehen hierbei jeweils für “symmetrisch” und “antisymmetrisch”. Diese Bezeichnungen ergeben sich aufgrund einer zu  $\hbar\omega_{\mathbf{k}}^s$  und  $\hbar\omega_{\mathbf{k}}^a$  gehörenden symmetrischen Eigenmode  $E_{s,\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{1,\mathbf{k}} + E_{2,\mathbf{k}})$

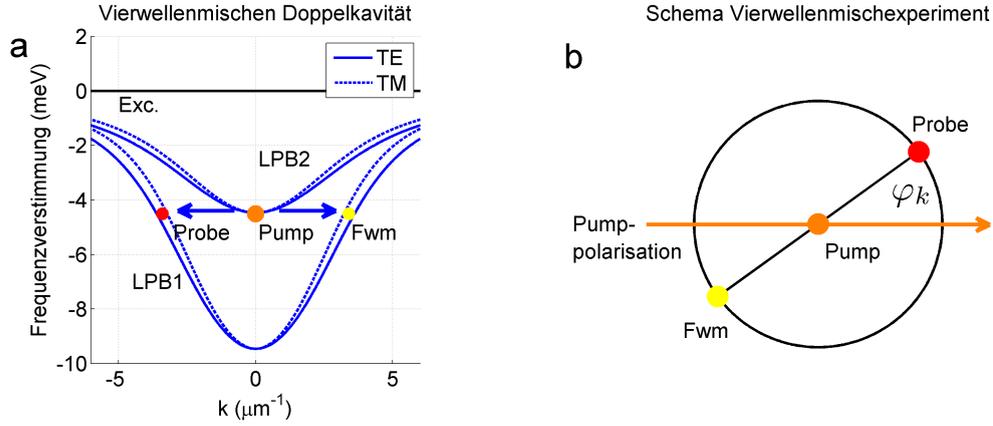


ABBILDUNG 3.14: a: Linearer Streuprozess resonanter Pump polaritonen in resonante Moden stimuliert durch einen externen Probe. b: Schematische  $k$ -Raumskizze eines Vierwellenmischexperimentes mit linearer Pump polarisation. Der Pfeil markiert den Schnitt der Polarisationsebene mit der Ebene der Kavität.

bzw. antisymmetrischen Eigenmode  $E_{a,k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_{1,k} - E_{2,k})$ . Berücksichtigt man die Kopplung an die Exzitonen und den Polarisationsfreiheitsgrad, erweitern sich die Bewegungsgleichungen einer Einzelkavität, Gln. 3.5 und 3.6, zu:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} E_i^\pm = (\mathbb{H}_c - i\gamma_c) E_i^\pm + \mathbb{H}^\pm E_i^\mp - \Omega_x p_i^\pm - \Omega_c E_j^\pm + E_{i,\text{pump}}^\pm \quad (3.35)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} p_i^\pm = (\mathbb{H}_x - i\gamma_x) p_i^\pm - \Omega_x (1 - \alpha_{\text{PSF}} |p_i^\pm|^2) E_i^\pm + T^{++} |p_i^\pm|^2 p_i^\pm + T^{+-} |p_i^\mp|^2 p_i^\pm. \quad (3.36)$$

Der Index  $i$  und  $j$  stehen für die Kavität 1 bzw. 2, wobei  $i \neq j$  gilt.  $E_i^\pm$  und  $p_i^\pm$  sind das optische bzw. exzitonische Feld in der Kavität  $i$  und  $E_{i,\text{pump}}^\pm$  der Quellterm. In Abb. 3.13 a ist zunächst die Aufspaltung der photonischen Dispersion in eine symmetrische und antisymmetrische Mode mit TE-TM-Aufspaltung dargestellt ( $m_{\text{TE}} = 1.25 \cdot m_{\text{TM}}$ ). Durch die Kopplung an die Exzitonen erfahren beide eine weitere Normalmodenaufspaltung in symmetrische (LPB1 und UPB1) und antisymmetrische Polaritonzweige (LPB2 und UPB2), die in Abb. 3.13 b zu sehen sind. Durch die unterschiedliche Verstimmung von  $E_s$  und  $E_a$  (jeweils  $\pm\Omega_c$ ) zu  $\epsilon_0^x$  sind LPB1 und UPB2 bei  $k = 0$  überwiegend photonisch, während LPB2 und UPB1 bei  $k = 0$  überwiegend exzitonisch sind. Dies erkennt man deutlich an der unterschiedlich starken TE-TM-Aufspaltung zwischen LPB1 und LPB2.

### 3.7.2 Entartetes Vierwellenmischen im Experiment

Die Doppelkavität bietet durch seine zwei unteren Polaritonzweige einen entscheidenden Vorteil gegenüber einer Einzelkavität: Ein axialer Pump kann die Kavität resonant auf dem LPB2 anregen, während die Pump polaritonen ebenso resonant auf den LPB1 in

nichtaxiale Moden streuen können, was in Abb. 3.14 a veranschaulicht wurde. Diese stimulierten Streuprozesse treten oberhalb der optischen Instabilitätsschwelle spontan auf, lassen sich unterhalb der dafür kritischen Exzitonendichte jedoch gezielt im Rahmen eines Vierwellenmisch-Experiments ansteuern, wie in Abschn. 3.4 für den Fall einer linearen Polarisation diskutiert ist. Da in einem realen System die azimuthale Symmetrie aufgrund der TE-TM-Aufspaltung aufgehoben ist, bietet sich ein wie in Abb. 3.14 b skizziertes Experiment an: Während ein Probe zu einem festen Polarwinkel resonant den LPB1 anregt, wird zu jedem Azimutwinkel  $\varphi_k$  die Intensität des in entgegengesetzter Richtung auftretenden Vierwellenmischens gemessen. Der Winkel  $\varphi_k$  ist dabei der Einschusswinkel mit der Pump polarisationsebene, die wir im Folgenden auf die  $x$ - $z$ -Ebene legen.

Um Aufschluss über die Polarisationsabhängigkeit zu erhalten, erfolgte jede Messung für vier verschiedene Anordnungen: Der Probe war entweder parallel ( $x$ -) oder senkrecht ( $y$ -) zum Pump polarisiert. Zusätzlich dazu wurde mit Hilfe eines Polarisationsfilters die Intensität des Vierwellenmischens nach  $x$ - und  $y$ -polarisiertem Anteil detektiert. Diese vier Anordnungen bezeichnen wir mit XX, YY, YX und XY, wobei der erste Buchstabe für die Polarisation des Probes, der zweite für die Polarisation der Detektion steht. Zusätzlich wurde die Detektion in Abhängigkeit von  $k$  bestimmt, sodass sich zu jedem Winkel  $\varphi_k$  Resonanzspektren ergaben, die als vertikale Streifen aneinandergereiht in Abb. 3.15 dargestellt sind. Die linke Spalte (a, c, e, g) zeigt numerische Simulationen, die rechte Spalte (b, d, f, h) die experimentellen Messungen.

Um die experimentellen Ergebnisse zu simulieren, wurden die Gln. 3.35 und 3.36 mit einem axialen Pump und einem Probe mit gleicher Frequenz und einem Impuls  $k_{\text{probe}} = 3.4 \mu\text{m}^{-1}$  gelöst. Pump, Probe und Vierwellenmischfeld wurden nach ca. 100 ps stationär. Die Kopplung zwischen den Kavitäten betrug  $\Omega_c = 5.5 \text{ meV}$ , die Pumpfrequenz  $\hbar\omega_p = \epsilon_0^x - 4.25 \text{ meV}$ . Angenommen wurden geringe Linienbreiten  $\gamma_c = \gamma_x = 0.05 \text{ meV}$ , sodass das Vierwellenmischen schon bei einer Exzitonendichte  $|p|^2 \approx 0.1 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2}$  ausgeprägt war. Da die genauen Größen- und Phasenbeziehungen zwischen  $E_{1,\text{pump}}^\pm$  und  $E_{2,\text{pump}}^\pm$  zum Zeitpunkt der Zusammenarbeit nicht vorlagen, wurden für die im Rahmen dieser Arbeit gezeigten Rechnungen symmetrische Felder  $E_{1,\text{pump}}^\pm = E_{2,\text{pump}}^\pm$  angenommen. Eine genauere Untersuchung der Doppelkavitäten diesbezüglich ist Gegenstand zukünftiger Arbeiten.

Abb. 3.15 a und b zeigen die Ergebnisse für eine  $x$ -polarisierte Anregung und eine  $x$ -polarisierte Detektion (XX). Das LFWM ist bei  $\varphi_k = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$  und  $3\frac{\pi}{2}$  resonant, wobei der Radius  $k$  abwechselnd einer Anregung der TM- ( $\varphi_k = 0, \pi$ ) und TE-Mode ( $\varphi_k = \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}$ ) entspricht. Für die Anordnung YY (Abb. 3.15 c und d) ergibt sich ein ähnliches

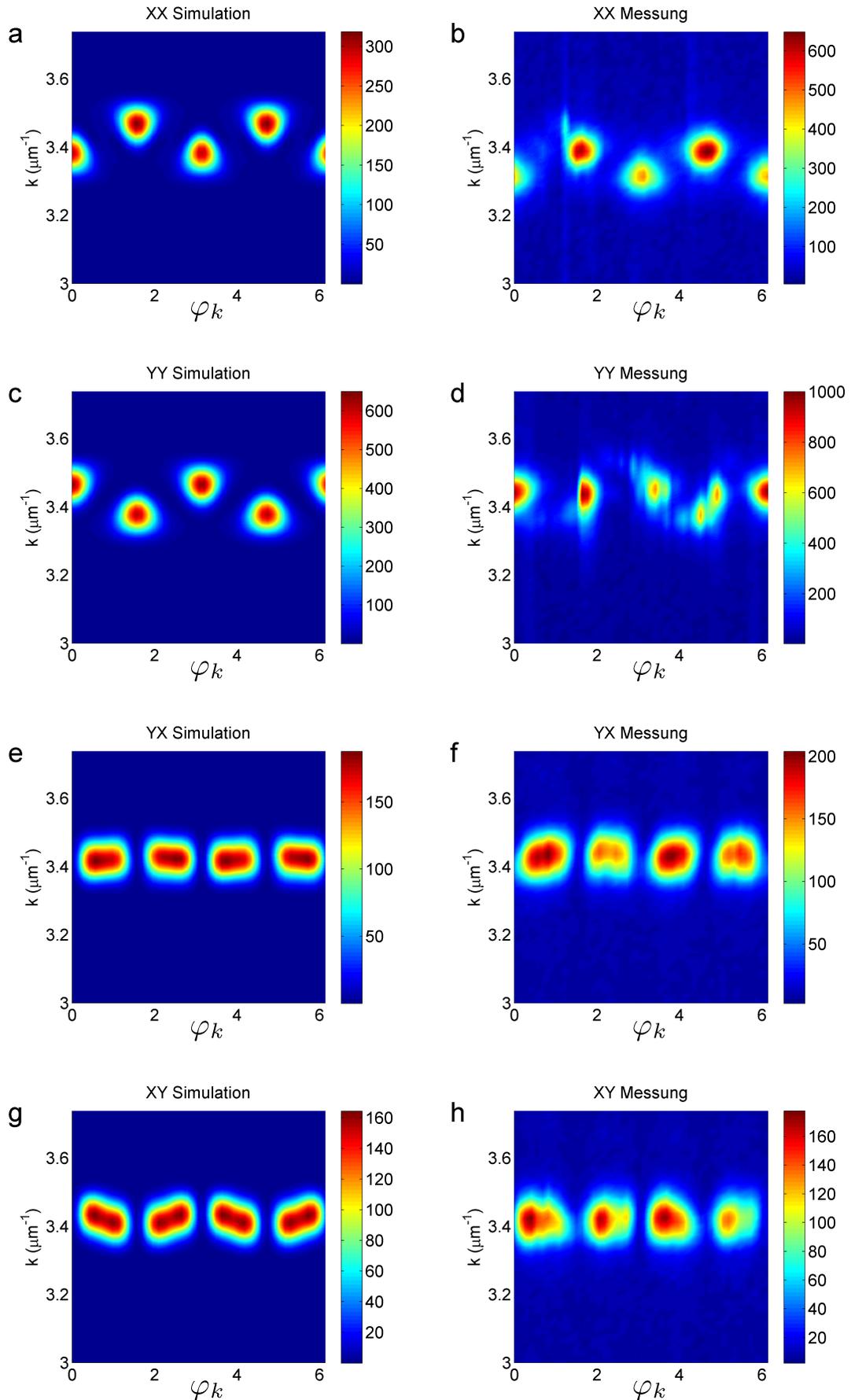


ABBILDUNG 3.15: Aufgetragen ist die Intensität des Vierwellenmischens in willkürlichen Einheiten über  $k$  zu jedem Winkel  $\varphi_k$ . Die linke Spalte zeigt Simulationen, die rechte experimentelle Messungen für die Anordnungen XX, YY, YX und XY. Die Einheiten sind willkürlich, doch für jede Spalte fest.

Bild, allerdings wird die TM-Mode (geringerer Radius) bei  $\varphi_k = \frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}$  und die TE-Mode (größerer Radius) bei  $\varphi_k = 0, \pi$  angeregt. Obwohl XX experimentell eine gute Übereinstimmung mit den Rechnungen liefert, ist dies bei YY nicht der Fall, vermutlich weil das System bei dieser Messung zeitweise die Schwelle zur optischen Instabilität übertrat. Numerisch bilden sowohl XX als auch YY direkt die Ergebnisse der LSA ab, wie sie in Abschn. 3.5 behandelt wurden: Ein  $x$ - oder  $y$ -polarisierter Probe, dessen Einfallrichtung parallel oder senkrecht zur Polarisationssebene verläuft, stimuliert  $x$ -polarisierte Pumppolaritonen zu Streuung in  $x$ - bzw.  $y$ -polarisierte Moden. Die Streuung in  $y$ -polarisierte Moden ist dabei effektiver, was durch ein stärkeres Signal in YY auch experimentell bestätigt wird.

Eine  $x$ -polarisierte Detektion bei einem  $y$ -polarisierten Probe führt zu einem Verschwinden des Signals für Vielfache von  $\frac{\pi}{2}$  (e und f). Die Resonanz bei ungeraden Vielfachen von  $\frac{\pi}{4}$  lässt sich auf zwei Effekte zurückführen: Zum einen streut bei diesen Winkeln ein Pumppolariton paarweise in die TM-, ein anderes in die TE-Mode, zum anderen wird die Polarisation der Felder durch die TE-TM-Aufspaltung schon im optisch linearen Fall am stärksten verändert (vgl. Abschn. 3.3). Für den Fall YX überwiegt der erste Effekt (was am konstanten Radius  $k$  erkennbar ist) und für XY (g und h) der zweite: Für ungerade Vielfache von  $\frac{\pi}{4}$  wird die  $y$ -Polarisation des Feldes maximal, während der stimulierte Streuprozess für Vielfache von  $\frac{\pi}{2}$  am stärksten ist. Es kommt zu der in Abb. 3.15 g und f zu sehenden leichten Aufspaltung in insgesamt acht Maxima. Das LFWM ist in YX-Anordnung stärker als in XY, worin Simulation und Experiment übereinstimmen.

### 3.7.3 Quadratisches Vierwellenmischen im Experiment

Experimentell ließ sich nicht nur das lineare, sondern auch das quadratische Vierwellenmischen (QFWM) nachweisen, um es in Hinblick auf die in Abschn. 3.4 aufgestellten Auswahlregeln zu untersuchen. Dazu wurde in hexagonaler Geometrie resonant mit einem zweiten Probe angeregt, wie anhand einer Messung in Abb. 3.16 zu sehen ist. Der Pump war dabei wie im vorherigen Abschnitt parallel zur  $x$ -Achse polarisiert, die Azimutwinkel der beiden Probes betragen  $\frac{\pi}{6}$  und  $5\frac{\pi}{6}$ . Das QFWM tauchte dadurch in hexagonaler Geometrie auf der  $y$ -Achse auf, wie in dem roten Kästchen zu sehen ist. Beide Probes konnten nun  $x$ - oder  $y$ -polarisiert sein und auch das QFWM konnte  $x$ - oder  $y$ -polarisiert detektiert werden, wodurch sich sechs verschiedene Anordnungen ergeben: XXX, XXY, XYX, XYY, YYX und YYY. Die beiden ersten Buchstaben stehen dabei für die Polarisation der Probes und der letzte für die Polarisation der Detektion. In Abb. 3.16 wurde somit mit zwei  $y$ -polarisierten Probes angeregt, während die Detektion  $x$ -polarisiert erfolgte. Die Anordnungen YXX und YXY sind zu XYX und XYY äquivalent und sind daher nicht gesondert aufgeführt.

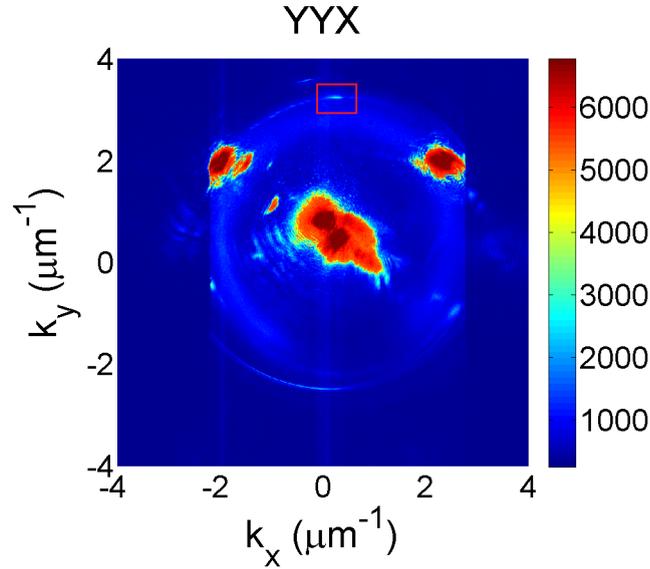


ABBILDUNG 3.16: Experimentelle Messung zum quadratischen Vierwellenmischen im  $k$ -Raum.

Abb. 3.17 zeigt Rechnungen (a-f) und Messungen (g-l) für alle sechs Fälle, wobei der  $k$ -Raum nur auf den Bereich um das QFWM eingeschränkt wurde. Die Auswahlregeln für die Streuprozesse schließen im Prinzip einen QFWM-Beitrag in XXY, XYX und YYY aus. Durch die TE-TM-Aufspaltung jedoch werden diese Regeln aufgeweicht, da der Polarisationszustand der angeregten Polaritonen in den nichtaxialen Moden ( $x$  oder  $y$ ) nicht erhalten bleibt. Dies führt zu endlichen Beiträgen in XXY, XYX und YYY, wobei das Signal in XXX, XYY und YYX jeweils stärker ist. Es gibt jedoch einen qualitativen Unterschied zwischen XYX und YYY bzw. XXY: Während sich für XYX ein QFWM bei  $k_x = 0$  bildet, baut es sich in den Fällen YYY bzw. XXY nur in der Umgebung von  $k_x = 0$  auf, was zu der in d und f gezeigten Aufspaltung führt. Theoretisch ließe sich dieser Effekt nutzen, um im Experiment eine hexagonale Geometrie genau einzustellen. Doch obwohl das Experiment die Theorie sonst qualitativ bestätigt, ließ sich diese Aufspaltung, vermutlich aufgrund von Rayleighstreuung an Störstellen, nicht nachweisen.

### 3.7.4 Musterbildung in Experiment und Theorie

Die Ergebnisse der theoretisch-experimentellen Zusammenarbeit zum Thema Musterbildung wurden 2013 in Quelle [1] veröffentlicht: Überschreitet die Leistung des Pump-lasers im Experiment einen gewissen Schwellwert (150 mW für eine Profildbreite von  $50 \mu\text{m}$ ), führt das Anwachsen nichtaxialer Moden zur Bildung eines hexagonalen Musters, wie es schon in Abschn. 3.6.2 diskutiert wurde. Dieses besteht - wie im Fall einer einfachen Kavität - ebenfalls aus zwei helleren Punkten, die eine Orientierungsrichtung senkrecht zur

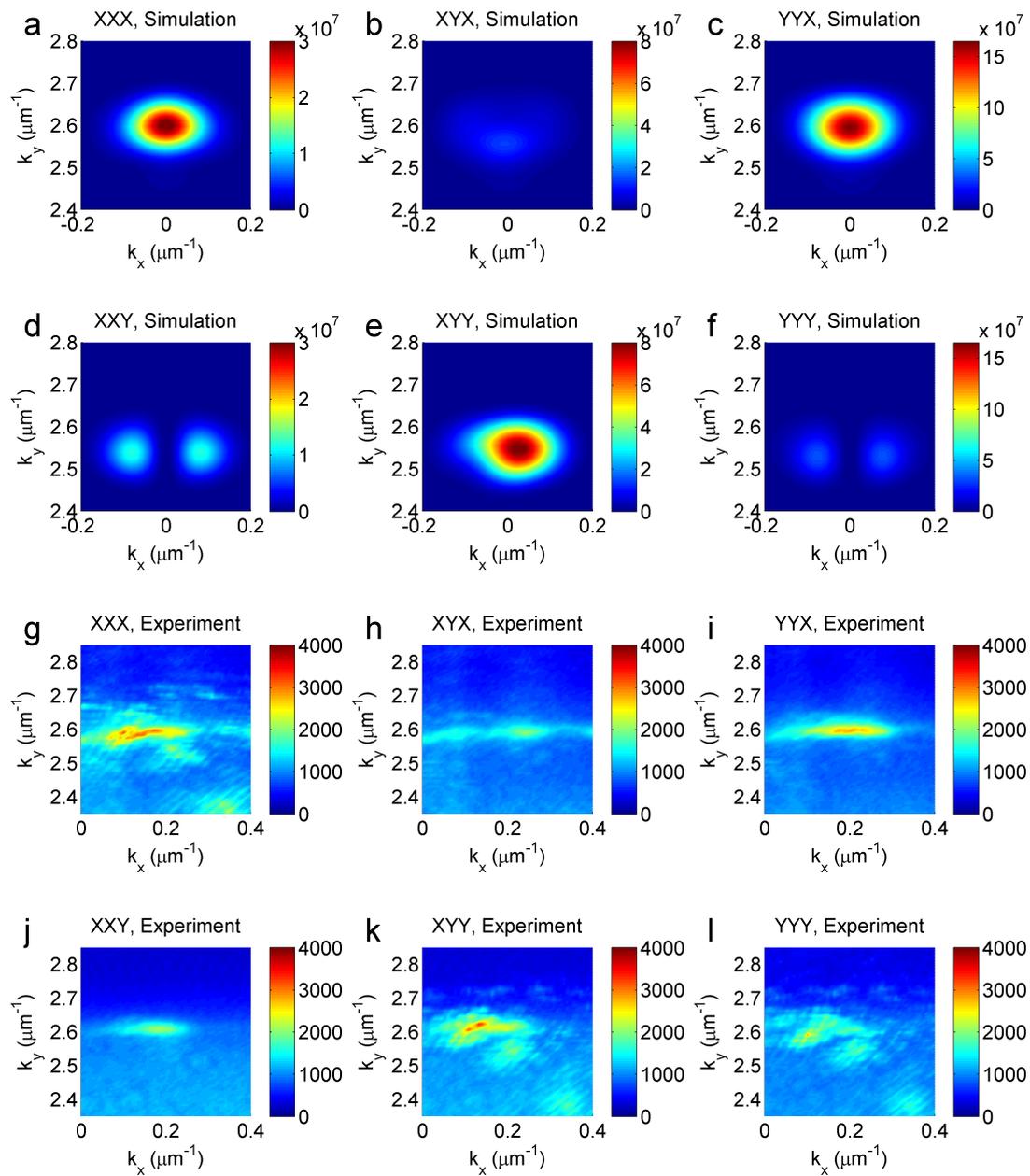


ABBILDUNG 3.17: Rechnungen und Messungen zum quadratischen Vierwellenmischen mit TE-TM-Aufspaltung im  $k$ -Raum in willkürlichen Einheiten.

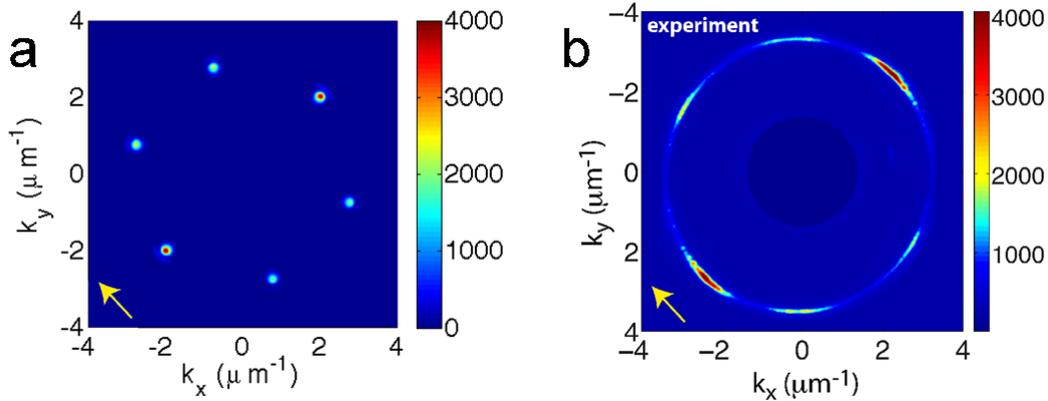


ABBILDUNG 3.18: Gerechnetes (a) und experimentell gemessenes Fernfeldmuster (b) im  $\perp$ -Polarisationskanal. In der Simulation ist nur der photonische Anteil gezeigt, die Einheiten sind willkürlich. Die Polarisationsrichtung des Pumps ist mit einem gelben Pfeil markiert.

Polarisationsebene des Pumps vorgeben, und vier dunkleren. Abb. 3.18 zeigt ein für eine Doppelkavität berechnetes  $k$ -Raummuster (a) und ein gemessenes Fernfeldmuster (b). Für die Rechnung wurden die Gln. 3.35 und 3.36 für eine optisch instabile Exzitondichte gelöst. Das spontan entstandene Muster ist nach 2 ns auskonvergiert. Die Kopplungskonstante betrug  $\Omega_c = 5$  meV, die Pumpfrequenz  $\hbar\omega_p = \epsilon_0^x - 4.5$  meV,  $T^{++} = -T^{+-}/3$  und die Zerfallsraten  $\gamma_c = \gamma_x = 0.2$  meV. Die restlichen Parameter entsprechen den Werten in Abschn. 3.6.2. Die Pump polarisation war wie im Experiment entlang der Raumdiagonalen  $x = -y$  ausgerichtet (gelber Pfeil in Abb. 3.18) und die Detektion des Musters ist senkrecht zur Pump polarisation erfolgt. Ein wesentlicher Unterschied zum gerechneten Muster ist im Experiment ein Hintergrundring, auf dem die Hexagonpunkte zu Sicheln elongieren. Dies ist vermutlich auf resonante Rayleighstreuung zurückzuführen, obgleich ein Störstellenpotential (unabhängig von Potentialhöhen und Korrelationslängen) auf die numerische Rechnung keinen derartigen Einfluss nimmt (siehe dazu Abschn. 2.5.2). Andererseits wurde der in Abschn. 3.6.2 diskutierte, entlang der Orientierungsachse auftretende Symmetriebruch experimentell noch nicht nachgewiesen - und somit auch kein driftendes Ortsraummuster. Abb. 3.19 zeigt das gerechnete Muster im  $k$ -Raum ebenso für den  $\parallel$ -Polarisationskanal (a) und die nichtstationären Ortsraumbilder für  $\parallel$  (c) und  $\perp$  (d). Die Bewegungsrichtung des Musters ist mit einem Pfeil markiert. Bis auf eine Drehung des Koordinatensystems um  $45^\circ$  gleichen diese Ergebnisse qualitativ der Rechnung für die Einzelkavität (vgl. mit Abb. 3.9 und 3.11).

### 3.7.5 Rotation des Musters durch Rotation der Polarisationsebene

Da die Orientierung des Musters durch die Polarisationsebene vorgegeben ist, dreht sich das Hexagon durch eine Drehung der Polarisationsebene simultan mit, wie in Abb.

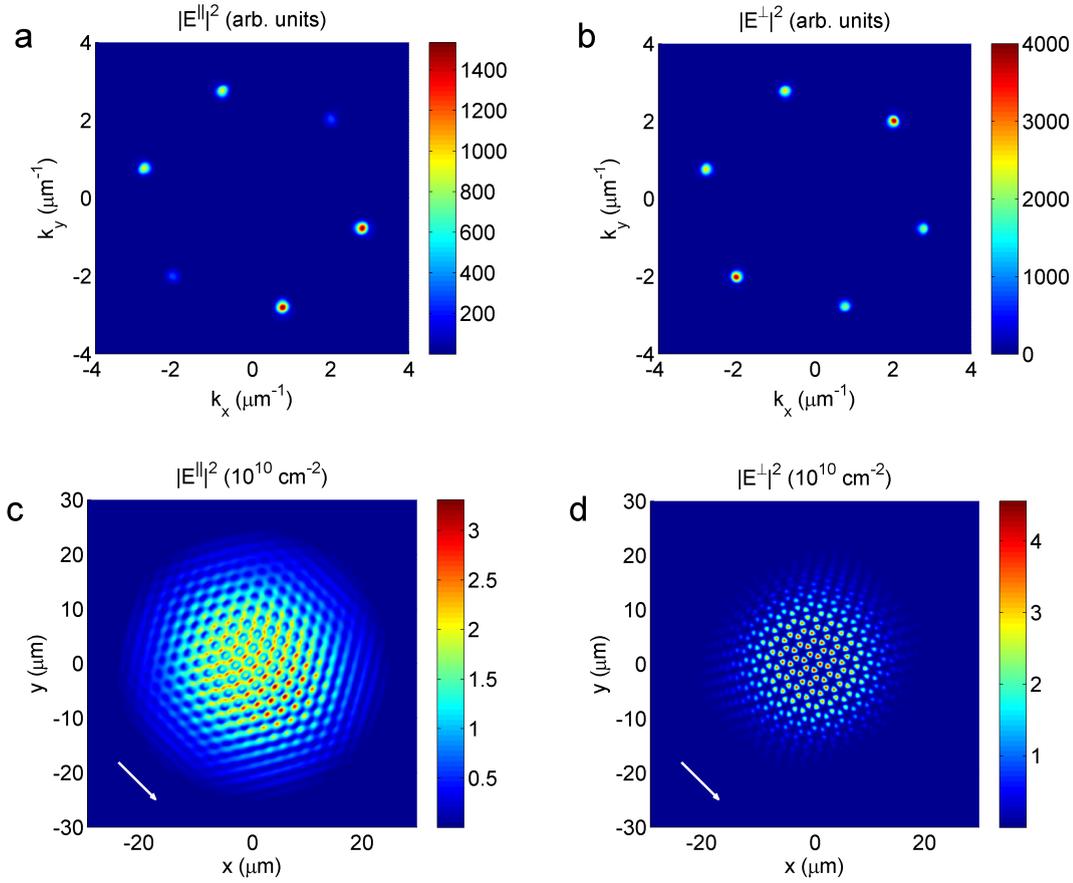


ABBILDUNG 3.19: Stationäres Muster im  $k$ - (a,b) sowie Momentaufnahmen im Ortsraum (c,d) jeweils im  $\parallel$ - und  $\perp$ -Polarisationskanal. Der Pump in a ist ausgeblendet. Die Driftrichtung ist in c und d durch einen weißen Pfeil gekennzeichnet.

3.20 anhand einer weiteren Rechnung für mehrere Zeitpunkte gezeigt wurde. In dieser Rechnung bleibt die Polarisationssebene nicht konstant, sondern dreht sich dynamisch im Uhrzeigersinn mit einer Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{\text{rot}} = 0.0003 \text{ ps}^{-1}$ . Während das Hexagon zu Beginn der Rotation entlang der Raumdiagonalen orientiert ist, führt es innerhalb 5 ns eine Drehung um  $90^\circ$  durch. Aufgrund der Stabilität der hexagonalen Musterstruktur erfolgt ein Anpassen an die neue Polarisationsrichtung jedoch nicht instantan, sondern verzögert. Aufgrund dieser “Trägheit” darf eine Drehung der Polarisationssebene nicht zu schnell erfolgen, wenn die Orientierungsachse des Musters “mitgedreht” werden soll.

### 3.7.6 Phasenübergänge infolge externer Anisotropie

Bislang wurden nur Fälle untersucht, in denen der Pump senkrecht auf die Kavität auftraf ( $\mathbf{k}_{\text{pump}} = 0$ ). Eine schräge Einfallsrichtung bietet jedoch eine einfache Möglichkeit, die Symmetrie durch eine externe Anisotropie aufzubrechen oder eine Vorzugsrichtung zu verstärken, falls sie bereits aufgebrochen ist. Hier untersuchen wir einen Fall, in dem

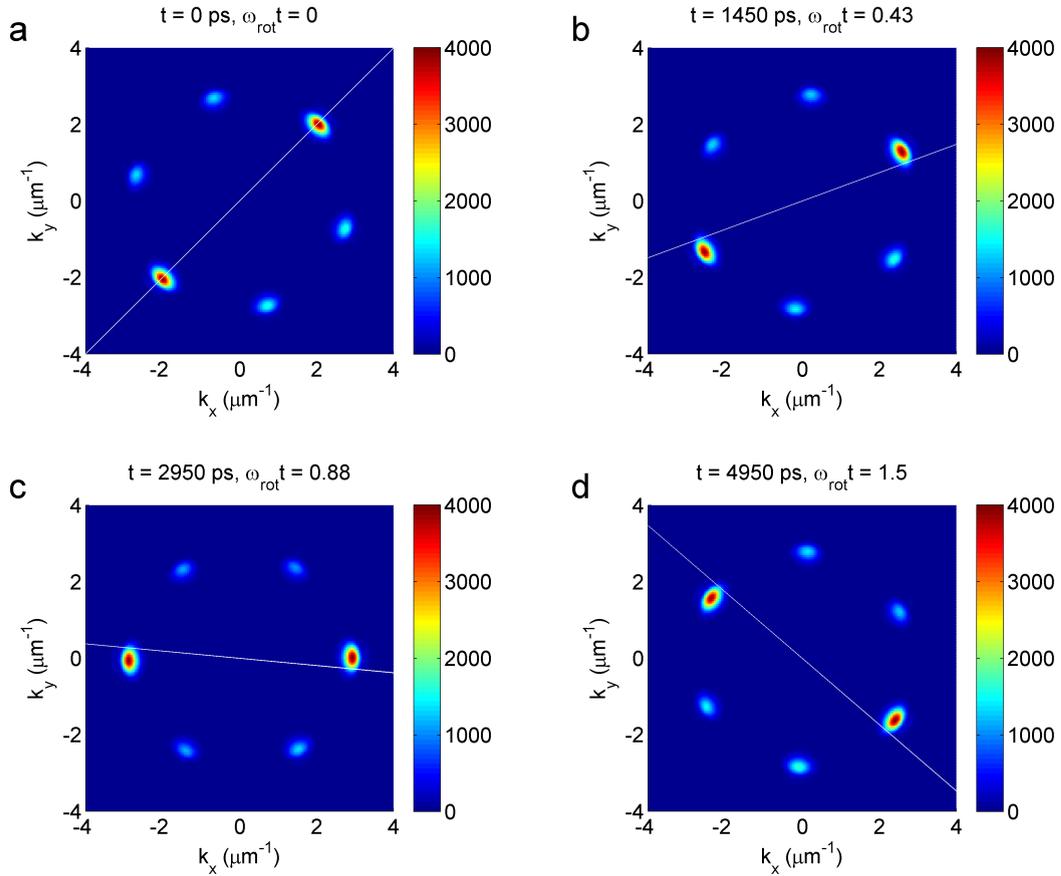


ABBILDUNG 3.20: Rotation des Hexagons durch die Rotation der Polarisationsebene. Die Polarisationsrichtung, die sich zeitlich ändert, ist weiß eingezeichnet. Dargestellt ist die Photondichte im  $\perp$ -Polarisationskanal. Die Einheiten sind willkürlich.

wir den Pump entlang der Orientierungsachse des Hexagons und somit senkrecht zur Polarisationsrichtung verkippen. Dies führt zu einem Übergang des hexagonalen Musters in ein reines Zweipunktmuster, wie in Abb. 3.21 experimentell (a,b) und numerisch (c,d) gezeigt ist. Dieser verläuft nicht kontinuierlich, sondern tritt abrupt ab einem Schwellwert von  $k_{\text{pump}}$  ein, der wiederum von anderen Parametern abhängt. Dies führt zu einer Phasengrenzlinie, sodass wir diesen Übergang auch als “Phasenübergang” bezeichnen.

Im Experiment beträgt dieser Schwellwert  $k_{\text{pump}} \approx 0.1 \mu\text{m}^{-1}$ , in den Rechnungen tritt der Phasenübergang erst bei  $k_{\text{pump}} = 0.33 \mu\text{m}^{-1}$  auf, wie in Abb. 3.22 gezeigt ist. Für die Abb. wurde zu jedem  $k_{\text{pump}}$  eine Simulation gestartet. Nachdem eine Rechnung auskonvergiert war, wurde jeweils die Intensität der beiden helleren und der vier dunkleren Hexagonpunkte gemittelt und über  $k_{\text{pump}}$  aufgetragen. Sichtbar ist eine Schwelle bei  $k_{\text{pump}} = 0.33 \mu\text{m}^{-1}$ , ab der die vier dunkleren Punkte verschwinden und sich das hexagonale Muster zu einem Zweipunktmuster reduziert. Die Anisotropie bewirkt eine Verstimmung der Resonanz der quadratischen Streuprozesse, sodass ab dieser Schwelle ein Hexagon im  $k$ -Raum nicht mehr maßgeblich bevorzugt wird. Aufgrund der nun

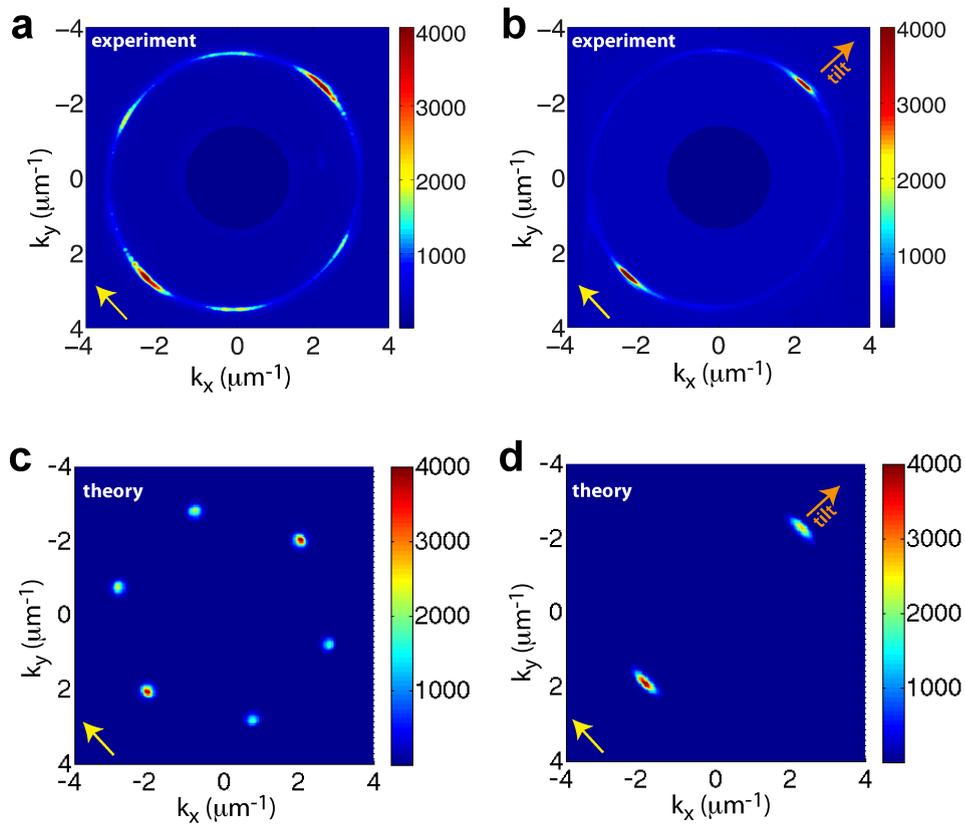


ABBILDUNG 3.21: Messungen (a,b) und Rechnungen (c,d) zu einem Phasenübergang des Hexagons (a,c) in ein Zweipunktmuster (b,d). Die Polarisation des Pumps ist dabei jeweils mit einem gelben Pfeil und die Richtung, in die der Pump verkippt wurde, mit einem orangenen Pfeil gekennzeichnet.

fehlenden, verstärkenden Rückkopplung durch die quadratischen und kubischen Streuprozesse nimmt auch die Intensität der verbleibenden beiden Punkte ab.

### 3.7.7 Schaltprozesse

Das nach einem Phasenübergang verbleibende Zweipunktmuster lässt sich als Grundlage für einen reversiblen, rein optischen Schaltprozess verwenden, wie es anhand einer hexagonalen Schaltgeometrie für skalare Muster z.B. in den Quellen [4, 10, 70] vorgestellt wurde. Aufgrund der leicht gebrochenen vierzähligen Symmetrie unseres Systems bietet sich jedoch ein Schaltprozess dieses Zweipunktmusters in ein Muster an, das gegenüber dem Anfangsmuster um  $90^\circ$  verdreht ist. Dieses wird extern durch einen schwachen,  $\perp$ -polarisierten Probe in dieser Geometrie stimuliert, wie in Abb. 3.23 dargestellt ist. Der Probe und sein Vierwellenmischen überlagern sich nicht nur mit dem anfänglichen Muster (a), sondern verdrängen es (b), bis das Initialmuster vollständig verschwindet

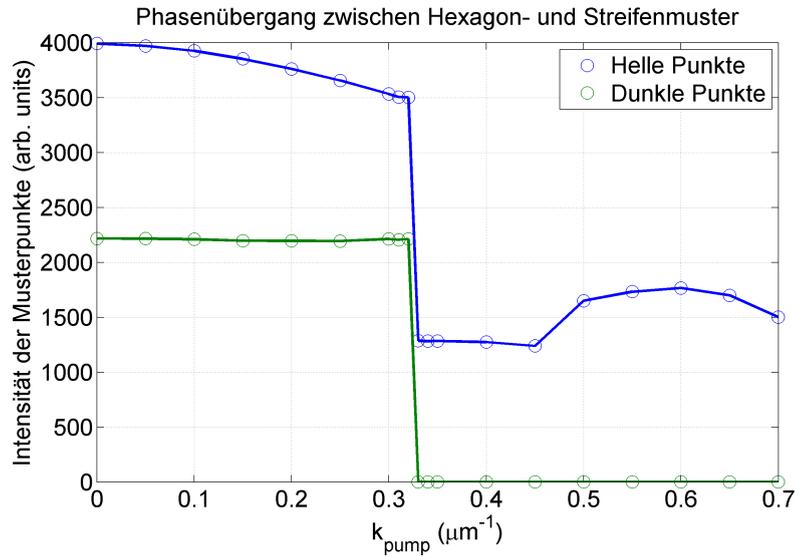


ABBILDUNG 3.22: Phasenübergang zwischen Hexagon und Zweipunktmuster, induziert durch eine Verkippung des Pumps längs der Orientierungsachse. Aufgetragen ist die Intensität der beiden helleren Hexagonpunkte (blau, gemittelt) und die Intensität der vier dunkleren Punkte (grün, gemittelt). Ab einem bestimmten Wert ( $k_{\text{pump}} = 0.33 \mu\text{m}^{-1}$ ) verschwinden die vier dunkleren Punkte abrupt, sodass nur die helleren Punkte verbleiben.

(c). Dieser Prozess ist jedoch reversibel: Nach Ausschalten des Probes kehrt das System wieder in seinen anfänglichen Zustand zurück (d).

Der Verlauf des ganzen Schaltprozesses ist in Abb. 3.24 dargestellt. Obwohl der externe Probe abrupt einsetzt, dauert es mehrere 100 ps, bis das Zielmuster stationär wird.

### 3.8 Zusammenfassung

Dieses Kapitel behandelte eine Vielzahl linearer und nichtlinearer optischer Eigenschaften in einem System mit Polarisationsfreiheitsgrad. Ein Fokus lag hierbei auf der Anregung mit einem linear polarisierten Pump: In diesem Fall treten Effekte auf, die über die Beschreibung in einem skalaren Polaritonfeld hinausgehen. Wir fanden, dass der optische Spin-Hall-Effekt und eine polarisationsabhängige Polaritonstreuung einen interessanten Einfluss auf den Prozess einer Musterbildung haben, der in Kap. 2 schon für ein skalares Feld diskutiert wurde: Durch einen Bruch der Symmetrie folgt die Orientierung des Hexagons der Polarisationsrichtung des anregenden Feldes, sodass sie dynamisch verändert werden kann. Desweiteren bietet die leicht aufgebrochene, vierzählige Symmetrie des Systems zwei senkrecht zueinander stehende Vorzugsachsen. Diese Geometrie ermöglicht z.B. reversible Schaltprozesse zwischen zwei Mustern mit unterschiedlicher Orientierung. Eine genauere Behandlung rein optischer Schaltvorgänge bietet sich für zukünftige Arbeiten an.

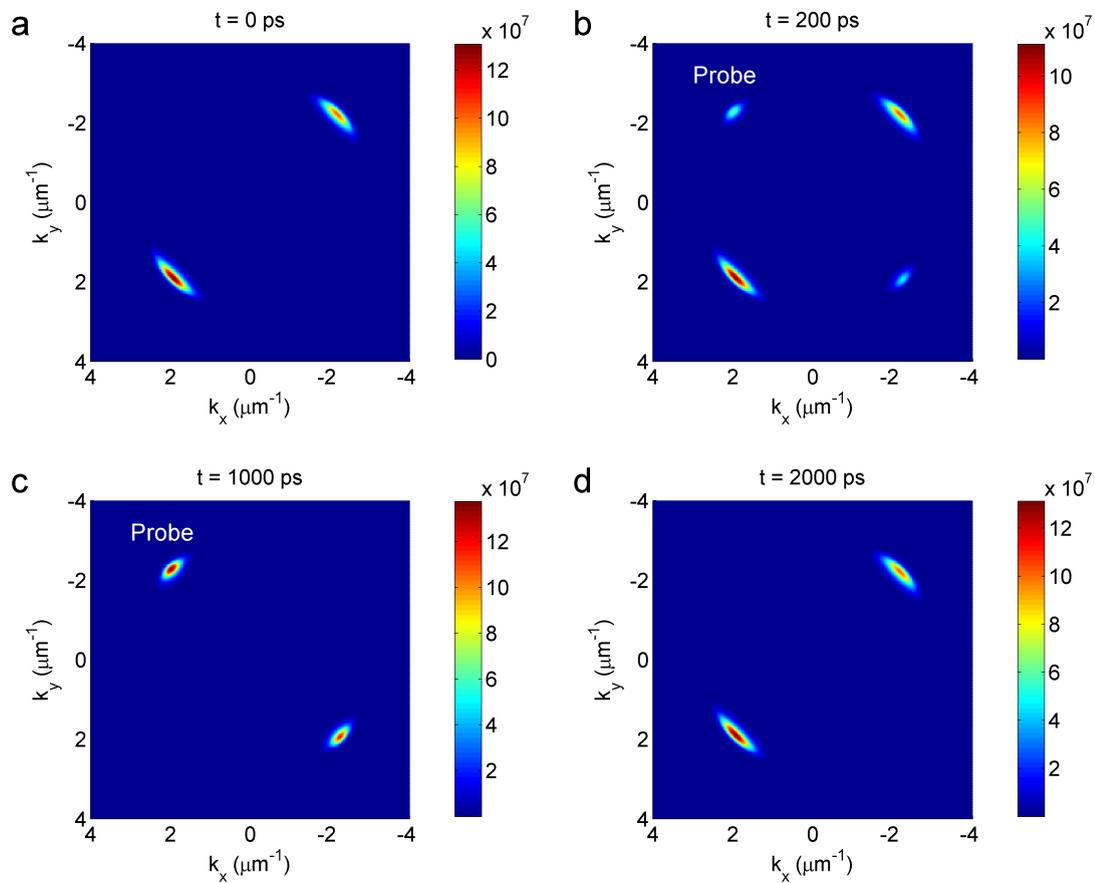


ABBILDUNG 3.23: Momentaufnahmen eines reversiblen Schaltprozesses im  $k$ -Raum. Zu sehen ist im  $\perp$ -Polarisationskanal das Anfangsmuster (a), eine anfängliche Überlagerung mit dem externen Probe (b), das Zielmuster (c) sowie das anfängliche Muster nach Ausschalten des Probes (d).

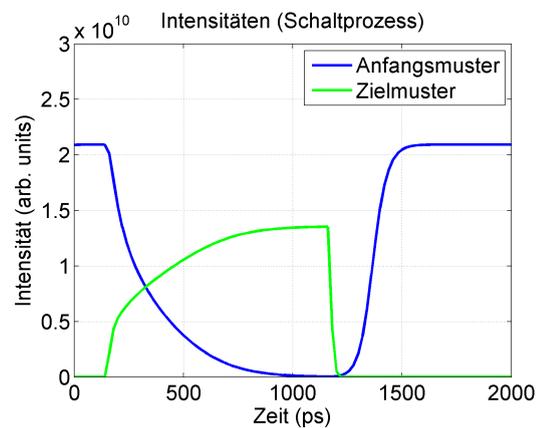


ABBILDUNG 3.24: Gezeigt ist die Intensität des Anfangsmusters und des Zielmusters über der Zeit. Der externe Probe wird nach 140 ps an-, nach 1160 ps ausgeschaltet.

## Kapitel 4

# Rein optisches Steuern von Polaritonkondensaten unter stark verstimmter Anregung

Eine resonante (oder beinahe resonante) Anregung eines Polaritonfelds, wie sie Gegenstand der vorangegangenen Kapitel war, bietet den Vorteil kohärent erzeugter Polaritonen: Deren Energie und Impuls lassen sich in diesem Fall unmittelbar über das anregende Licht kontrollieren. Im Fall nichtresonant gepumpter Polaritonkondensate ist dies nicht der Fall: Es entsteht ein Bose-Einstein-Kondensat kohärenter Polaritonen indirekt über ein inkohärentes, optisch erzeugtes Exzitonreservoir [38–40]. Frequenz und Einfallswinkel des Lasers müssen bei dieser Form der Anregung zwar weniger genau eingestellt werden. Die Phaseninformationen des anregenden Lichts gehen bei diesem Prozess jedoch verloren. Wir zeigen, dass es mit Hilfe von simultan und rein optisch erzeugten Potentialen trotzdem möglich ist, den Fluss so erzeugter Kondensate zu steuern und präsentieren anhand numerischer und experimenteller Daten das in Quelle [3] publizierte Ergebnis einer Zusammenarbeit mit der Gruppe von Professor Manfred Bayer von der TU Dortmund.

### 4.1 Bose-Einstein-Kondensation von Polaritonen

Als überwiegend bosonische Quasiteilchen gehorchen Polaritonen der Bose-Einstein-Statistik und können somit prinzipiell ein Bose-Einstein-Kondensat - also ein vollständig entartetes Quantengas ununterscheidbarer Teilchen [71] - bilden. Voraussetzung für diesen Phasenübergang ist, dass die Materiewellenlänge der Bosonen, die für gewöhnlich sehr klein ist, die Größenordnung der mittleren freien Weglänge erreicht. Möglich wird

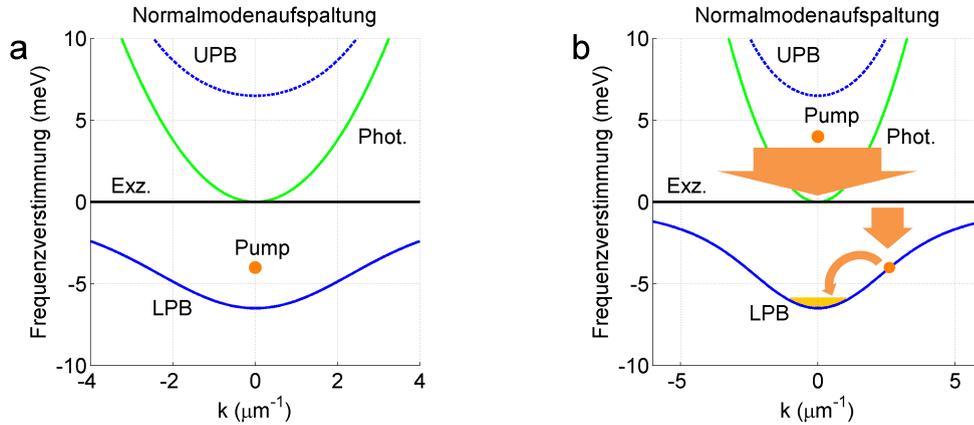


ABBILDUNG 4.1: Schematische Skizze einer kohärenten und einer stark verstimmtten Anregung von Polaritononen. a: Ein fast resonanter Pump erzeugt direkt ein kohärentes Polaritonfeld. b: Ein energetisch stark verstimmtter Pump erzeugt ein heißes Elektron-Loch-Plasma, das zu inkohärenten Exzitonen relaxiert (breite Pfeile). Oberhalb der Kondensationsschwelle entsteht ein Kondensat im Grundzustand durch stimuliertes Einstreuen.

dies nur bei tiefen Temperaturen und hohen Dichten. Die Teilchen befinden sich dann in nur einem einzigen quantenmechanischen Zustand und können somit durch eine makroskopische Wellenfunktion beschrieben werden. Streng genommen handelt es sich jedoch bei dem hier behandelten Prozess nicht um eine Bose-Einstein-Kondensation im thermodynamischen Sinne, da ein zweidimensionales System vorliegt, der Prozess außerhalb eines thermodynamischen Gleichgewichts stattfindet und die Polaritonen eine geringe Lebensdauer von nur wenigen Pikosekunden haben [72]. Allerdings wird der Terminus “Bose-Einstein-Kondensation” für das hier beschriebene Phänomen in der Literatur häufig verwendet, da sich eine spontane Kohärenz auf einer makroskopischen Skala bildet.

Die Kondensation von Polaritononen in Halbleiternmikrokavitäten wurde experimentell erstmals um die Jahrtausendwende von Deng et al. nachgewiesen [38] und ist bis heute Gegenstand aktueller Forschung [73–88]. Im Vergleich zu atomaren Gasen (z.B. Rubidium, bei dem die Bose-Einstein-Kondensation das erste mal überhaupt nachgewiesen werden konnte [89]) ermöglicht die wesentlich geringere Masse der Polaritonen eine Kondensation bei relativ hohen Temperaturen von 19 K [38, 40]. Beobachtet wird, dass die Photolumineszenz stark verstimmt angeregter Polaritononen im Grundzustand ( $k = 0$ ) ab einer bestimmten Pumpleistung  $P_{\text{thr}}$  abrupt ansteigt. Damit einhergehend bildet sich spontan eine räumliche Kohärenz über makroskopische Distanzen aus. Bei diesem Phasenübergang kondensieren die optisch erzeugten, inkohärenten Exzitonen spontan in den Grundzustand. Wie weiter unten erklärt, geschieht dieser Prozess maßgeblich über ein stimuliertes Einstreuen der Exzitonen in das Kondensat [90].

Der Unterschied zu einem resonanten Anregungsschema ist am Beispiel einer einfachen

Kavität in Abb. 4.1 dargestellt: Während bei einer beinahe resonanten Anregung die Pumpfrequenz nur wenige meV über dem Scheitelpunkt des LPB liegt, wird bei der stark verstimmtten Anregung deutlich oberhalb der Exzitonen-Resonanz angeregt. Dabei wird ein heißes Elektron-Loch-Plasma generiert, das jedoch rasch zu gebundenen Exzitonen abkühlt [13]. Das so entstandene Reservoir verliert dabei seine Kohärenz. Die Exzitonen kühlen über Phononen-Emission weiter bis in den Grundzustand ab, wodurch bereits eine Photolumineszenz messbar wird. Die Polaritonen leuchten, aufgelöst nach Impuls- und Frequenzkomponenten, nahezu den gesamten LPB aus, so dass die Emission unter einem großen Öffnungswinkel erfolgt. Der Unterschied zur Kondensation wurde sehr deutlich 2006 von Kasprzak et al. in Quelle [40] veranschaulicht: Oberhalb der Kondensationsschwelle  $P_{\text{thr}}$  wird die Emission auf einen engen Bereich um den Grundzustand bei  $k = 0$  eingeschränkt. Der Grundzustand wird, nicht nur durch die langsame Relaxation der Exzitonen besetzt wie im ersten Fall, sondern zusätzlich durch eine spontane Kondensation, indem die schon vorhandenen, kohärenten Polaritonen die inkohärenten Exzitonen zu resonanten Streuprozessen stimulieren, wie in Abb. 4.1 veranschaulicht wird. Erst ab der Pumpleistung  $P_{\text{thr}}$  ist die Anzahl dieser so ins Kondensat einstreuen- den Exzitonen hoch genug, um die hohe Zerfallsrate der Polaritonen auszugleichen.

Eine Bewegungsgleichung für das Kondensat unter Berücksichtigung der Wechselwirkung mit dem Reservoir lässt sich, wie in der mikroskopischen Vielteilchentheorie üblich [42, 91], näherungsweise über eine Dyson-Gleichung herleiten [92]: Setzen wir als Ansatz für eine wechselwirkungsfreie Dynamik eine skalare, quellenfreie Gross-Pitaevskii-Gl. (vgl. Kap. 2) voraus, wird diese bei Berücksichtigung der Wechselwirkung um einen komplexen, temperaturabhängigen Streuterm  $\Sigma^{x-c}$  erweitert. Im Ortsraum gilt für das Polaritonfeld  $\Psi(x, y, t)$ :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = (\mathbb{H} - i\gamma_p + \Sigma^{x-c}) \Psi + \alpha_1 |\Psi|^2 \Psi. \quad (4.1)$$

Wie in Kap. 2 ist  $\mathbb{H} = \epsilon_0^p - \frac{\hbar^2}{2m_p} \Delta$  der Hamiltonoperator mit der effektiven Masse  $m_p$  und  $\gamma_p$  die Zerfallsrate. Die repulsive Wechselwirkung zwischen den Polaritonen wird hier jedoch mit  $\alpha_1$  bezeichnet. Die neu eingeführte Streuamplitude  $\Sigma^{x-c}$  beinhaltet alle möglichen Streuprozesse zwischen Reservoir  $x$  und Kondensat  $c$ . Berücksichtigt man nur die Wechselwirkung über akustische und longitudinal-optische Phononen [92], ist  $\Sigma^{x-c}$  proportional zur Exzitonendichte  $n_R$ , sodass wir auch  $\Sigma^{x-c} = S^{x-c} n_R$  schreiben können. Die ortsabhängige Dichte  $n_R = n_R(x, y, t)$  spiegelt gleichzeitig die räumliche Geometrie des Anregungsbereichs wider. Trennt man nun  $S^{x-c}$  in Real- und Imaginärteil auf, wird aus Gl. 4.1:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \left( \mathbb{H} + i \left( \frac{\gamma}{2} n_R - \gamma_p \right) \right) \Psi + \alpha_1 |\Psi|^2 \Psi + \alpha_2 n_R \Psi, \quad (4.2)$$

wobei wir hier die Parameter  $\gamma = 2\Im(S^{x-c})$  und  $\alpha_2 = \Re(S^{x-c})$  eingeführt haben. Über die Form von Gl. 4.2 lässt sich der Einfluss des Reservoirs folgendermaßen beschreiben: Der Term  $\frac{\gamma}{2}n_R$  beschreibt das Einstreuen der Exzitonen in das Kondensat, das den Zerfall der Polaritonen  $\gamma_p$  effektiv vermindert. Dieses Einstreuen wird allerdings erst durch das Kondensat  $\Psi$  stimuliert, wodurch sich das Reservoir deutlich von externen Quellen ( $\Psi_{\text{pump}}$ ) unterscheidet. Der Term  $\alpha_2 n_R$  beschreibt die abstoßende Coulomb-Wechselwirkung der Exzitonen. Wie ein externes Potential bewirkt das Reservoir zum Zeitpunkt der Anregung eine Blauverschiebung der Polaritonen. Ab einer Dichte  $n_R > 2\gamma_p\gamma^{-1}$  wird das Kondensat über seinen Zerfall hinaus verstärkt. Dieser Wert bietet jedoch nur eine untere Abschätzung für die Kondensationsschwelle. Zum einen, weil es für die Kondensation einer makroskopischen Phasensynchronisation bedarf. Zum anderen, weil aufgrund der repulsiven Wechselwirkung nicht unerheblich viele Polaritonen aus dem Anregungsbereich herausbeschleunigt werden [41] und für die Stimulation nicht mehr zur Verfügung stehen.

Über die Teilchenzahlerhaltung lässt sich für die Exzitonendichte  $n_R$  die Bewegungsgleichung

$$\hbar\frac{\partial}{\partial t}n_R = -\gamma_X n_R - \gamma|\Psi|^2 n_R + P \quad (4.3)$$

herleiten. Anders als in Gl. (4.2) handelt es sich hierbei um eine reellwertige Gleichung für eine Teilchendichte. Die Dynamik in Gl. (4.3) setzt sich zusammen aus (i) einem phänomenologischen Zerfall der Exzitonen  $\gamma_X$ , (ii) dem Verstärken des Kondensats durch das Einstreuen der Exzitonen  $\gamma|\Psi|^2$ , die dem Reservoir auf diese Weise verloren gehen und (iii) der optischen Anregung  $P$ . Gln. 4.2 und 4.3 beschreiben somit eine gekoppelte Bewegungsgleichung zwischen Kondensat und Reservoir.

Vernachlässigt wurde bislang, dass die Exzitonen  $n_R$  nicht unmittelbar nach Anregung kondensieren können, da Energie- und Impulserhaltung für ein Einstreuen in das Kondensat anfangs nicht gegeben sind [79]. Um diese Dynamik zu berücksichtigen, teilen wir die Exzitonen auf in ein “aktives” Reservoir  $n_A$  - bestehend aus Exzitonen, die bereits kondensieren können und ein “inaktives” Reservoir  $n_I$ , bestehend aus den restlichen Exzitonen. Vereinfachend wird angenommen, dass alle inaktiven Exzitonen “aktiviert” werden, sich das aktive Reservoir also aus dem inaktiven speist. Die Bewegungsgleichungen für dieses Zwei-Reservoir Modell lauten [79]:

$$\hbar\frac{\partial}{\partial t}n_A = -\gamma_A n_A - \gamma|\Psi|^2 n_A + \tau n_I \quad (4.4)$$

$$\hbar\frac{\partial}{\partial t}n_I = -\gamma_I n_I - \tau n_I + P. \quad (4.5)$$

Verglichen mit dem Ein-Reservoir-Modell (Gl. 4.3) streuen nur die aktiven Exzitonen  $n_A$  in das Kondensat  $\Psi$ , während das inaktive Reservoir als Quelle  $\tau n_I$  für das aktive dient. Der hier neu eingeführte Parameter  $\tau$  ist die Rate, mit der die Exzitonen aktiviert werden. Der optische Pump  $P$  regt nur das inaktive Reservoir  $n_I$  an.  $\gamma_A$  ist die Zerfallsrate der aktiven Exzitonen. Neben dem phänomenologischen Zerfall  $\gamma_I$  der inaktiven Exzitonen gehen dem Reservoir  $n_I$  gerade diejenigen Exzitonen verloren, die in das aktive Reservoir übergehen.

Bei einer kontinuierlichen Anregung ( $P(x, y, t) = P(x, y)$ ) erreichen allerdings  $n_I$  so wie auch  $n_A$  schon bald stationäre Dichten. Damit kann jedoch  $\tau n_I$  ebenso als eine kontinuierliche Quelle für das aktive Reservoir gesehen werden, wodurch ein kontinuierlich gepumptes System effektiv durch ein Ein-Reservoir-Modell beschrieben werden kann, was auch in der Literatur üblich ist [41, 76, 78, 92, 95].

Im Fall einer gepulsten Anregung ( $P(x, y, t) = P_0(x, y) \exp\left(\frac{-t^2}{2\sigma^2}\right)$ ) gilt diese Näherung nicht mehr: Durch einen Lichtpuls mit einer Breite  $\sigma$  im Femtosekundenbereich wird ein Reservoir inaktiver Exzitonen ( $n_I(x, y, t = 0)$ ) bevölkert, das als Anfangsbedingung für Gl. 4.5 angenommen werden kann. Es zerfällt daraufhin monoton, während sich das aktive Reservoir zuerst aus dem inaktiven aufbaut, dann jedoch in das (kurzlebige) Kondensat übergeht. Diese Dynamik ist daher wesentlich komplizierter als bei einer kontinuierlich gepumpten Anregung. Systeme, die gepulst angeregt werden, werden daher in der Regel mit einem Zwei-Reservoir-Modell [3, 79, 93, 94] oder gar einem Multi-Reservoir-Modell [96] beschrieben.

## 4.2 Rein optisches Einfangen und Steuern von Polaritonenkondensaten

Berücksichtigen wir in Gl. 4.2 einen Relaxationsmechanismus [94–96] für die Polaritonen und ein Störstellenpotential [56, 57, 59–61], erhalten wir zusammen mit Gln. 4.4 und 4.5 einen vollständigen Satz an gekoppelten Bewegungsgleichungen für das Kondensat  $\Psi$  und die Reservoirs  $n_A$  und  $n_I$ :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \left( \mathbb{H} + i \left( \frac{\gamma}{2} n_A - \gamma_p \right) + V_d \right) \Psi + (\alpha_1 |\Psi|^2 + \alpha_2 n_A + \alpha_3 n_I) \Psi - i\Lambda (n_A + n_I) \mathbb{H} \Psi \quad (4.6)$$

$$\hbar \frac{\partial}{\partial t} n_A = -\gamma_A n_A - \gamma |\Psi|^2 n_A + \tau n_I \quad (4.7)$$

$$\hbar \frac{\partial}{\partial t} n_I = -\gamma_I n_I - \tau n_I + P. \quad (4.8)$$

Wie in Abschn. 2.5 modellieren wir das Störstellenpotential  $V_d$  durch eine zufällig erzeugte Potentiallandschaft im Ortsraum mit einer Amplitude von 0.2 meV “root mean square” und einer Korrelationslänge von  $1 \mu\text{m}$  (vgl. [61]). Ferner verliert das Kondensat bei der Propagation durch das Exzitonenreservoir kinetische Energie durch Streuprozesse: Diese Relaxation [94–96] wird mit Hilfe des Terms  $-i\Lambda(n_A + n_I)\mathbb{H}\Psi$  modelliert (vgl. Quelle [94]). Obwohl im Zwei-Reservoir-Modell das Kondensat nur über das aktive Reservoir  $n_A$  gespeist wird, geht eine abstoßende Wechselwirkung ( $\alpha_3 n_I$ ) sowie ein Beitrag zur Relaxation auch vom inaktiven Reservoir  $n_I$  aus. Für unsere Rechnungen verwenden wir für die effektive Masse  $m_p = 0.35 \cdot 10^{-4} m_e$  und für die Zerfallskonstanten  $\gamma_p = 0.1$  meV,  $\gamma_A = 0.01$  meV und  $\gamma_I = 0.0013$  meV. Für die Coulomb-Matrixelemente wurde  $\alpha_1 = 0.0024$  meV  $\mu\text{m}^2$  und  $\alpha_2 = \alpha_3 = 0.008$  meV  $\mu\text{m}^2$  angenommen, ferner rechnen wir mit  $\gamma = 0.004$  meV  $\mu\text{m}^2$ ,  $\tau = 0.1$  meV und  $\Lambda = 0.00025 \mu\text{m}^{-2}$ .

Die Eigenschaften der Exzitonen als Quelle, aber auch als abstoßendes Potential für das Polaritonenkondensat, führen zu einer nichttrivialen, aber interessanten Dynamik: So werden propagierende Polaritonen an optisch generierten, exzitonenischen Potentialbarrieren einerseits reflektiert, andererseits verstärkt [94]. Aber auch die Dynamik des aus dem Reservoir entstehenden Kondensates hängt stark von dem Ortsraumprofil der Anregung  $P_0(x, y)$  ab [41, 74]: Für starke Potentialgefälle wird die potentielle Energie rasch in kinetische Energie der Polaritonen umgewandelt, was den Kondensaten einen endlichen Impuls verleiht. So können diese aus dem Anregungsbereich hinauspropagieren. Auch wird durch eine geeignete Anregungsgeometrie das Einfangen eines Polaritonenkondensates in einem Potentialminimum von  $\alpha_2 n_A(x, y) + \alpha_3 n_I(x, y)$  möglich [82]. Das wiederum ermöglicht grundsätzlich, den Anregungsbereich  $P_0(x, y)$  räumlich vom Bereich des Kondensats  $\Psi(x, y)$  zu trennen. Wie noch diskutiert wird, spielt der Relaxationsmechanismus hierfür eine entscheidende Rolle. Wir zeigen, dass es nicht nur möglich ist, ein Kondensat in einem Potentialminimum einzufangen, sondern auch, Kondensate gerichtet aus einer Potentiallandschaft herausfließen zu lassen und den so entstandenen Fluss weiter zu manipulieren.

Im Nachfolgenden beschränken wir uns dazu auf den Fall einer gepulsten Anregung. Experimentell<sup>1</sup> wurde hierfür ein Titanium-Saphir Laser mit einer Wellenlänge von 727 nm (1705 meV) und einer Wiederholrate von 75 MHz verwendet [3]. Das Erzeugen geeigneter Potentialgeometrien kann experimentell durch einen “Spatial Light Modulator” (SLM) erreicht werden, indem man die Intensität der anregenden Pulse räumlich moduliert. Wie oben bereits diskutiert, können wir diesen Anregungsfall modellieren, indem wir an Stelle der expliziten Anregung  $P$  von einem anfangs erzeugten Reservoir

<sup>1</sup>Die Experimente wurden von der Gruppe um Prof. Manfred Bayer an der TU Dortmund durchgeführt.

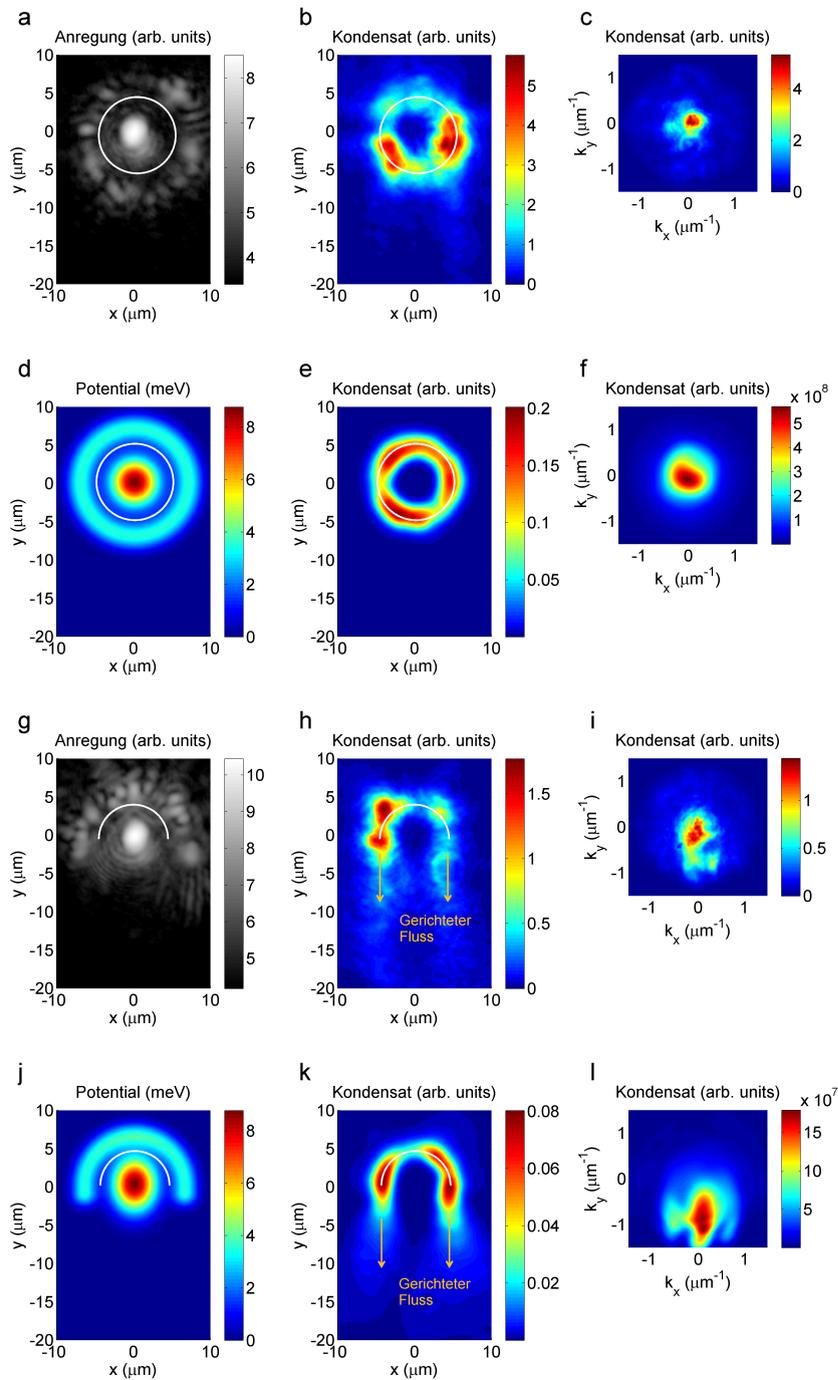


ABBILDUNG 4.2: Gezeigt sind zeitintegrierte Messungen (a-c,g-i) und Rechnungen (d-f,j-l) der Polaritronkondensate für verschiedene Anregungsgeometrien. Die Potentiallandschaft in a und d führt zu einem eingefangenen Kondensat im Ortsraum (b und e) und im  $k$ -Raum (c und f). Eine halboffene Geometrie (g und j) führt zu einem gerichteten Fluss im Ortsraum (h und k) und im  $k$ -Raum (i und l). Die weißen Kreise und Halbkreise markieren die Potentialmulden, in denen sich das Kondensat bildet.

$n_I(x, y, t = 0)$  als Anfangsbedingung für Gl. 4.8 ausgehen: Vernachlässigen wir Sättigungseffekte, können wir annehmen, dass  $n_I(x, y, t = 0)$  ungefähr das Ortsraumprofil des Laserpulses  $P_0(x, y)$  abbildet.

Abb. 4.2 zeigt zeitintegrierte Messungen und Rechnungen für verschiedene Potentialgeometrien sowie die gemessenen und berechneten Kondensate im Orts- und  $k$ -Raum. Für die Messungen zeigt die Abbildung das Intensitätsprofil des anregenden Lichtes und die (nicht polarisationsaufgelöste) Photolumineszenz der Polaritonen, für die Rechnungen das angeregte exzitonische Potential  $n_I$  sowie die direkte, zeitintegrierte Polaritondichte  $|\Psi|^2$ . Die zu sehenden experimentelle Daten sind eine Mittelung über viele einzelne Pulse. Analog dazu zeigen die Abbildungen für die gerechneten Werte jeweils Mittelungen über 30 Einzelrechnungen über jeweils 80 ps. Ein über die Ebene der Kavität zufällig verteiltes, komplexes Polaritonfeld als Anfangsbedingung für  $\Psi$  wurde für jeden dieser Durchläufe neu generiert (für ein konstant gehaltenes Störstellenpotential  $V_d$ ), was zu jeweils unterschiedlichen Kondensatdichten führte. Angenommen wurden anfängliche Polaritondichten in der Größenordnung von  $10^6 \text{ cm}^{-2}$  rms mit einer Korrelationslänge von  $1 \mu\text{m}$ .

Die erste interessante Geometrie, die wir betrachten, fungiert als eine rein optische Falle, um das Kondensat in einem ringförmigen Gebiet einzufangen (Abb. 4.2 a und d). Diese Geometrie besteht aus einem Gaußprofil in der Mitte mit einer Breite von ca.  $2 \mu\text{m}$ . Dieses geometrische Maximum umschließt ein konzentrischer Ring mit einem Radius von ungefähr  $7 \mu\text{m}$ . Die maximale Intensität des Rings ist deutlich geringer als die des Maximums. Im Experiment liegt die Anregungsleistung bei der 18-fachen Kondensationschwelle  $P = P_{\text{thr}}$  (Abb. 4.2 a), in den Rechnungen rechnen wir mit einer maximalen Exzitonendichte von  $\max(n_I) = 1.1 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  (Abb. 4.2 d). Das Polaritonenkondensat bildet sich für diese Geometrie in der ringförmigen Mulde zwischen Peak und Ring, in der das exzitonische Potential ein lokales Minimum aufweist (4.2 b und e). Obwohl die Exzitonendichte während der Kondensation stetig abnimmt, kann die durch sie erzeugte Potentiallandschaft lange genug bestehen, um das Kondensat einzuschließen. Durch die Wechselwirkung mit dem Reservoir relaxiert dieses Kondensat in den Grundzustand nach  $k = 0$ , wie in den Impulsraumbildern gezeigt (4.2 c und f). Ohne einen Relaxationsmechanismus hätten die im Zentrum dieser Anordnung entstehenden Polaritonen genug Energie, um die äußere Potentialbarriere zu überwinden. Ein Einfangen innerhalb des äußeren Ringes wäre daher nicht möglich.

Ersetzt man in der Geometrie in Abb. 4.2 a und d den Ring durch einen Halbkreis (Abb. 4.2 g und j), "öffnet" man die bestehende Falle. Das ermöglicht es dem Kondensat, aus den nun vorhandenen Öffnungen hinauszupropagieren. Um das Potentialgefälle

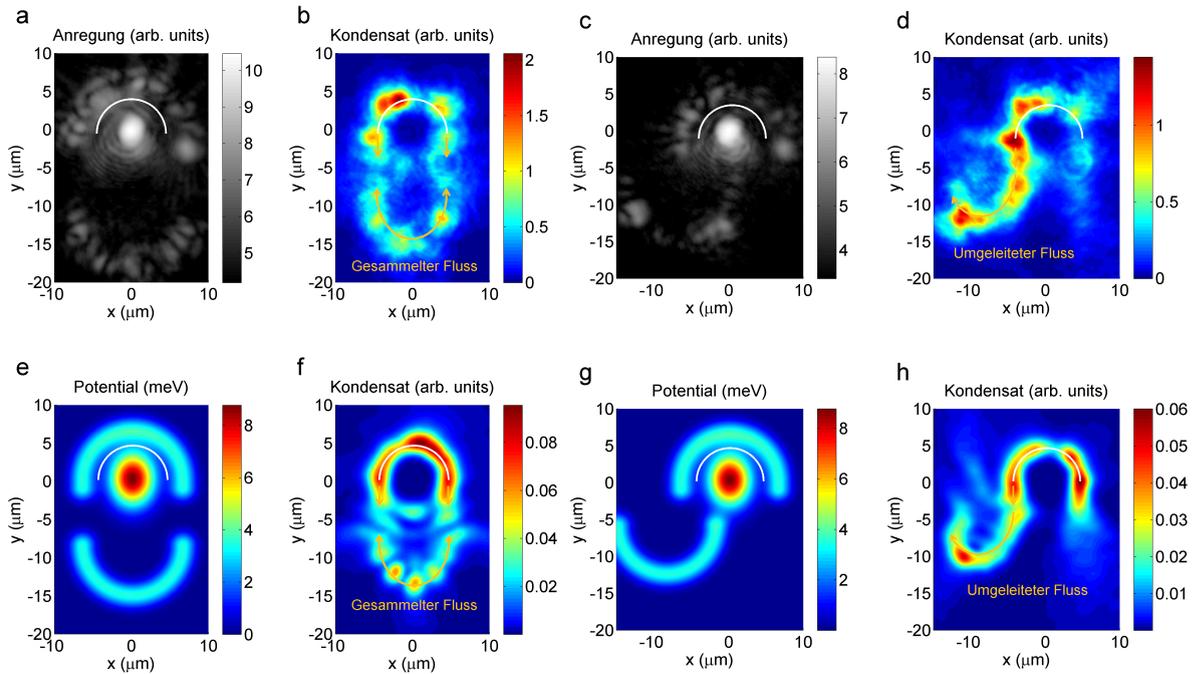


ABBILDUNG 4.3: Demonstriert ist die Manipulation eines gerichteten Polaritonflusses mit Hilfe zusätzlicher Potentialgeometrien mittels Messungen (a-d) und Rechnungen (e-h) wie in Abb. 4.2. Ein zusätzlicher, symmetrisch angeordneter Halbkreis (a und e) kann das Kondensat blockieren und sammeln (b und f). Ein versetzt angeordneter Halbkreis (c und g) kann das ausströmende Kondensat umleiten (d und h).

in die so erzeugte Vorzugsrichtung zu erhöhen, haben wir in den Rechnungen den symmetrischen Gauß-Spot zu einer Ellipse deformiert. Die Coulomb-Abstoßung führt zu einem gerichteten Fluss aus beiden Öffnungen dieser halboffenen Falle (Abb. 4.2 h und k). Die Polaritonen erhalten endliche Impulsbeiträge (Abb. 4.2 i und l) und propagieren über eine Distanz von mehr als  $10 \mu\text{m}$ .

Ist ein so gerichteter Fluss erst einmal erzeugt, können wir ihn durch das Hinzufügen weiterer Potentiallandschaften manipulieren. Diese werden simultan mit der bestehenden halboffenen Falle angeregt. Wir präsentieren hier zwei Beispiele (Abb. 4.3): (i) Über einen zusätzlichen, nach oben geöffneten und nach unten versetzten Halbkreis (Abb. 4.3 a und e) wird der Polaritonfluss, der von der halboffenen Falle ausgestoßen wird, blockiert und gesammelt (Abb. 4.3 b und f). Da während dieses Prozesses Exzitonen in das Kondensat einstreuen, wird das Kondensat gleichzeitig verstärkt. Der blockierte Fluss bildet stehende Wellen aus, wodurch ein charakteristisches Interferenzmuster entsteht. (ii) Ist derselbe Halbkreis wie in Abb. 4.3 c und g noch zusätzlich nach links versetzt, kann dieses zusätzliche Potential den links austretenden Polaritonfluss um nahezu  $180^\circ$  umlenken (Abb. 4.3 d und h). Dieser wird auch in diesem Fall durch die teilweise Propagation durch das Reservoir verstärkt.

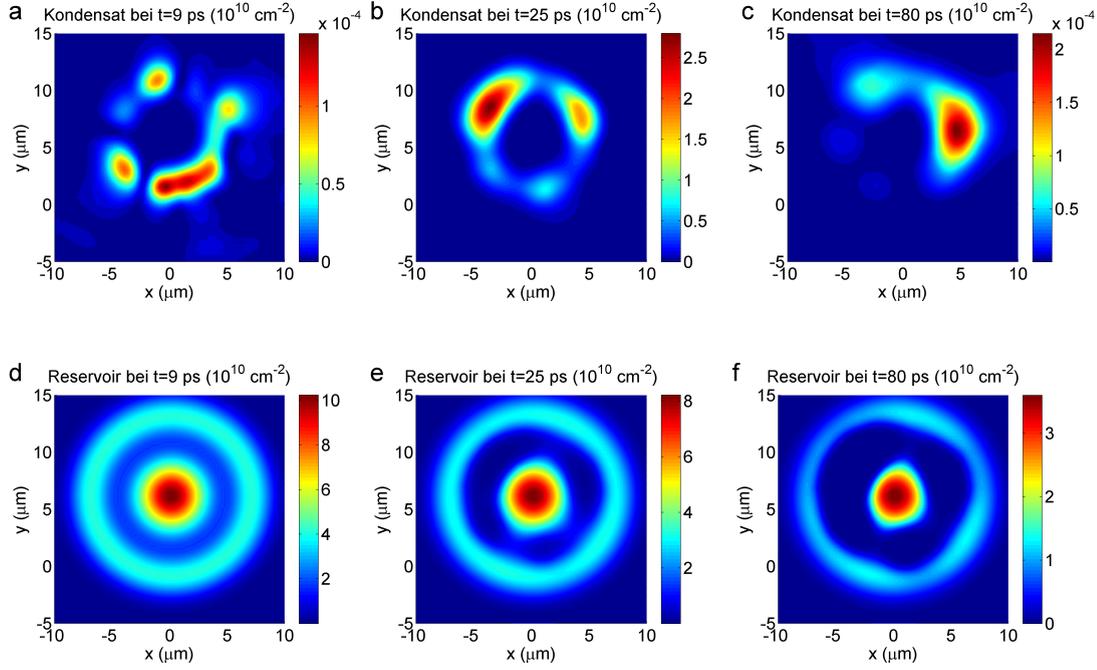


ABBILDUNG 4.4: Zu sehen sind verschiedene Momentaufnahmen der Polaritondichte  $|\Psi|^2$  (a-c) und der gesamten Exzitondichte  $n_A + n_I$  (d-f) im Ortsraum für eine Einzelrechnung: Im Anfangszustand bei  $t = 9$  ps (a und d), auf dem Höhepunkt der Kondensation bei  $t = 25$  ps (b und e) und, nachdem das Kondensat bereits abgeklingen ist, bei  $t = 80$  ps (c und f).

### 4.3 Dynamik der Polaritonenkondensation in rein optischen Fallen

Die bisher gezeigten Abbildungen 4.2 und 4.3 zeigen zeitintegrierte Daten und geben somit keinen Einblick in die Dynamik der Kondensation. Am Beispiel einer Einzelrechnung für die geschlossene Falle (4.2 a und d) gehen wir hier auf den Entstehungsprozess des Kondensates genauer ein. Abb. 4.4 zeigt hierzu die Kondensat- und Reservoirdichte zu verschiedenen Zeitpunkten. Bei Anregung ( $t = 0$ ) wird das inaktive Reservoir  $n_I$  aufgefüllt, das aktive Reservoir ist zu Beginn leer. Baut sich dieses mit der Zeit auf, wird das anfängliche Polaritonfeld  $\Psi(x, y, t = 0)$  (siehe Abschnitt 4.2) durch das Einstreuen aktiver Exzitonen stimuliert verstärkt. Bis die Größenordnung des aktiven Reservoirs jedoch relevant wird, sind die Polaritonen durch die Wechselwirkung mit dem überwiegend inaktiven Reservoir bereits nach wenigen Pikosekunden in das lokale Potentialminimum relaxiert (Abb. 4.4 a). Zu diesem Zeitpunkt ist fast die gesamte Exzitondichte - abgesehen von einer geringen Zerfallsrate - in ihrer Form erhalten geblieben (Abb. 4.4 d). Es werden jedoch immer mehr Exzitonen aktiviert. Erreicht das aktive Reservoir nach ca. 15 ps die Kondensationsschwelle, steigt die Dichte der im Potentialminimum verbliebenen Polaritonen abrupt an, bis diese nach ca. 25 ps ihr Maximum erreicht (Abb. 4.4

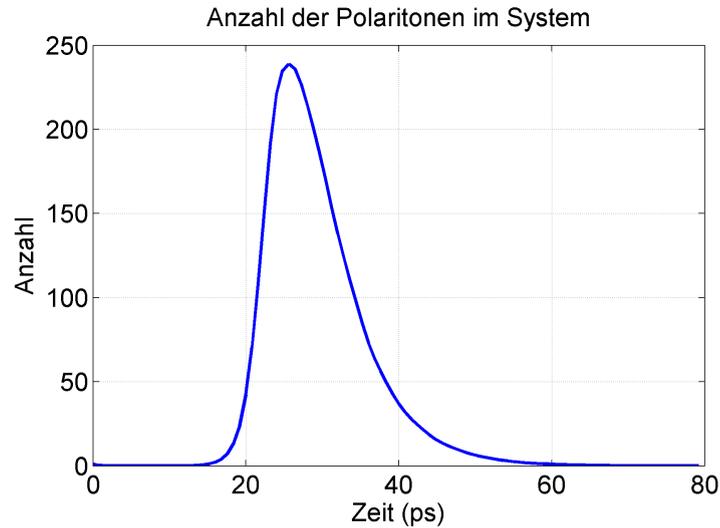


ABBILDUNG 4.5: Gesamte Anzahl der Polaritonen in der Kavität für den Anregungsfall aus Abb. 4.4 in Abhängigkeit von der Zeit.

b). Die maximale Dichte liegt hier bei etwa  $2.5 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2}$ . Durch diese Kondensation werden die Exzitonen überwiegend im Kondensationsbereich und dessen Umgebung aufgebraucht (Abb. 4.4 e). Die Form des Kondensates ist, bedingt durch die zufällige Anfangsbedingung und das Störstellen-Potential  $V_d$ , ungleichmäßig über den ringförmigen Bereich verteilt und von Rechnung zu Rechnung verschieden.

Nachdem bereits die meisten aktiven Exzitonen kondensiert sind, reicht der Nachschub durch das mittlerweile wesentlich schwächer gewordene inaktive Reservoir nicht mehr aus, um die hohe Polaritondichte zu erhalten. Diese klingt somit wieder ab. Bei  $t = 80 \text{ ps}$ , also zu einem Zeitpunkt, an dem bereits fast alle Polaritonen wieder zerfallen sind (Abb. 4.4 c), bleibt immer noch ein nicht unerheblicher Anteil des Reservoirs zurück (Abb. 4.4 f), der als Potentialbarriere wirkt. Auf diese Weise bleibt das Kondensat während seiner gesamten Lebensdauer durch die rein optische Falle eingefangen. Nach Abklang des Kondensats zerfällt das restliche Reservoir nur noch langsam mit den exzitonischen Zerfallsraten  $\gamma_A$  und  $\gamma_I$ .

Abb. 4.5 zeigt ergänzend zu Abb. 4.4 die Zeitabhängigkeit der Gesamtanzahl der kohärenten Polaritonen. Hierbei wurde zu jedem Zeitschritt die Polaritondichte  $|\Psi|^2$  über die gesamte  $x$ - $y$ -Ebene integriert. Zu sehen ist (i) der steile Anstieg der Dichte ab 15 ps, (ii) das Maximum bei 25 ps und (iii) der allmähliche Abklang des Kondensats. Nach ca. 60 ps ist nahezu das gesamte Kondensat wieder zerfallen.

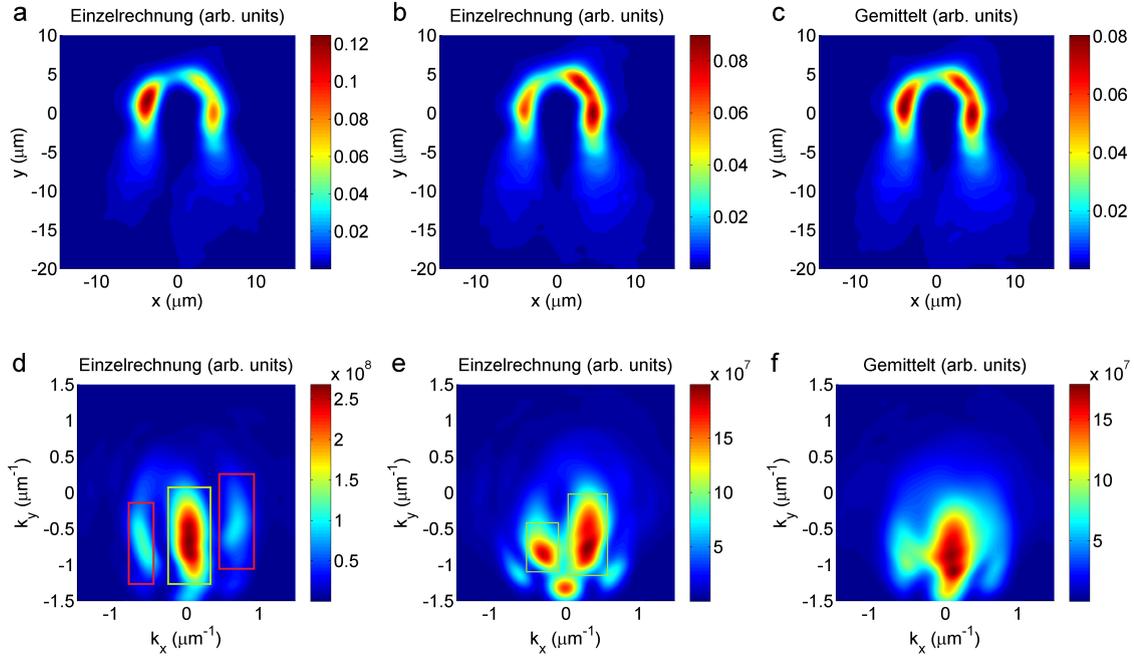


ABBILDUNG 4.6: Zu sehen sind zwei zeitintegrierte Einzelrechnungen für die halboffene Falle (Abb. 4.2 d) im Ortsraum (a und b) und Interferenzmuster im  $k$ -Raum (d und e). Über viele Einzelrechnungen integriert (hier: 30), mitteln sich die Interferenzeffekte weg (c und f).

#### 4.4 Interferenzeffekte kohärenter Polaritonen

Die Kohärenz und die endliche Wellenlänge eines gerichtet propagierenden Polaritonenkondensates kann prinzipiell zu Interferenzeffekten führen. Wir zeigen dies am Beispiel von zeitintegrierten Einzelrechnungen für die halboffene Falle aus Abb. 4.2 j. Aufgrund ihrer Geometrie und einer de-Broglie-Wellenlänge der Polaritonen von ca.  $6.5 \mu\text{m}$  wirkt diese auf den Polaritonfluss wie ein klassischer Doppelspalt: Das links austretende Kondensat interferiert mit dem rechts austretendem, sobald beide Teilkondensate die Potentiallandschaft verlassen haben. Die ungleichmäßige Entstehung des Kondensats, verursacht durch verschiedene Anfangsbedingungen für  $\Psi_0(x, y)$  (vgl. Abschnitt 4.3), führt jedoch zu einem für jede Rechnung anderen Gangunterschied zwischen dem linken und rechten Teilkondensat, wodurch sich für jede Einzelrechnung ein anderes Interferenzmuster ausbildet. Wir zeigen dies in Abb. 4.6 anhand zweier Einzelrechnungen. Durch die unterschiedlichen Anfangsbedingungen sind nicht nur die Ergebnisse im Ortsraum (Abb. 4.6 a und b) verschieden: Bei der ersten Rechnung interferieren beide Teilkondensate konstruktiv bei  $k_x = 0$ , was man unschwer an dem charakteristischen Beugungsmuster im  $k$ -Raum (Abb. 4.6 d) erkennt: Sichtbar ist auf einer Höhe von  $k_y = -0.75 \mu\text{m}^{-1}$  ein Hauptmaximum bei  $k_x \approx 0 \mu\text{m}^{-1}$  (grünes Kästchen) und zwei Nebenmaxima bei

$k_x \approx \pm 0.65 \mu\text{m}^{-1}$  (rote Kästchen). Die zweite Rechnung (Abb. 4.6b und e) zeigt, ebenfalls bei  $k_y = -0.75 \mu\text{m}^{-1}$ , ein Beugungsmuster einer destruktiven Interferenz bei  $k_x = 0$ , jedoch zwei ungefähr gleich hohe Maxima bei  $k_x \approx \pm 0.32 \mu\text{m}^{-1}$  (grüne Kästchen).

Ein Interferenzmaximum ist im Fall eines Doppelspaltes dann zu beobachten, wenn der Gangunterschied beider durch die Spalte propagierender Teilwellen ein Vielfaches der Wellenlänge beträgt. Für den Winkel  $\alpha$ , unter dem man das Maximum erster Ordnung beobachtet, gilt mit der Wellenlänge  $\lambda$  und dem Spaltabstand  $a$ :  $\sin(\alpha) = \frac{\lambda}{a}$ . Im  $k$ -Raum gilt für diesen Winkel unter Berücksichtigung unserer Geometrie  $\tan(\alpha) = \left( \frac{\Delta k_x}{|k_y|} \right)$ , wobei  $\Delta k_x$  der Abstand zweier Maxima ist. Mit einem Abstand  $a = 10 \mu\text{m}$  zwischen linker und rechter Öffnung der Anregungsgeometrie gilt für den Abstand zwischen zwei Maxima  $\Delta k_x = \tan(\sin^{-1}(0.65)) \cdot 0.75 \mu\text{m}^{-1} = 0.64 \mu\text{m}^{-1}$ . Diese Abschätzung stimmt sowohl für das erste (Abb. 4.6 d) als auch das zweite (Abb. 4.6 e) Interferenzmuster gut überein.

Bildet man ein arithmetisches Mittel über viele Rechnungen (und somit über viele Gangunterschiede), mitteln sich die Interferenzeffekte heraus (Abb. 4.6c und f). Das erklärt, wieso auch experimentell keine Beugungsmuster zu beobachten sind (Abb. 4.2 g und k).

## 4.5 Streuung von Polaritonkondensaten an Potentialhindernissen

Ein gerichteter Polaritonfluss kann durch Potentialgeometrien nicht nur umgeleitet oder eingefangen werden, wie in Abb. 4.3 gezeigt, sondern an solchen auch gestreut werden. Eine Streuung an Potentialhindernissen bietet die Möglichkeit, hydrodynamische Effekte wie Verwirbelungen auch in Polaritonkondensaten zu beobachten [97].

Im Rahmen dieser experimentell-theoretischen Zusammenarbeit demonstrieren wir die Streuung eines Kondensats an einem gaußförmigen, rein optisch erzeugten Potential. Die hierbei verwendete Potentialgeometrie ist in Abb. 4.7 a und b dargestellt. Wie in Abb. 4.2 und 4.3 ist bei den experimentellen Werten die Intensität gezeigt, bei den numerischen hingegen das exzitonische Potential. Zwei nach oben geöffnete, vertikal versetzte Halbkreise erzeugen bei Kondensation einen gerichteten Fluss parallel zur  $y$ -Achse. Diese so erzeugte halboffene Falle ist für die numerischen Rechnungen asymmetrisiert, um den Fluss des rechten Teilkondensats zu bevorzugen. An einem simultan erzeugten, zusätzlichen gaußförmigen Spot ("Target") wird das ausströmende Kondensat gestreut. Abb. 4.7 c,e,g zeigen die zeitintegrierten Messungen, Abb. 4.7 d,f,h die zeitintegrierten Rechnungen der Kondensate im Ortsraum für drei verschiedene Targetintensitäten. Die numerischen Werte für die Polaritonendichte sind über zehn Einzelrechnungen gemittelt. Abb. 4.7 c und d zeigen den Kondensatfluss ohne Target. Das Kondensat kann frei

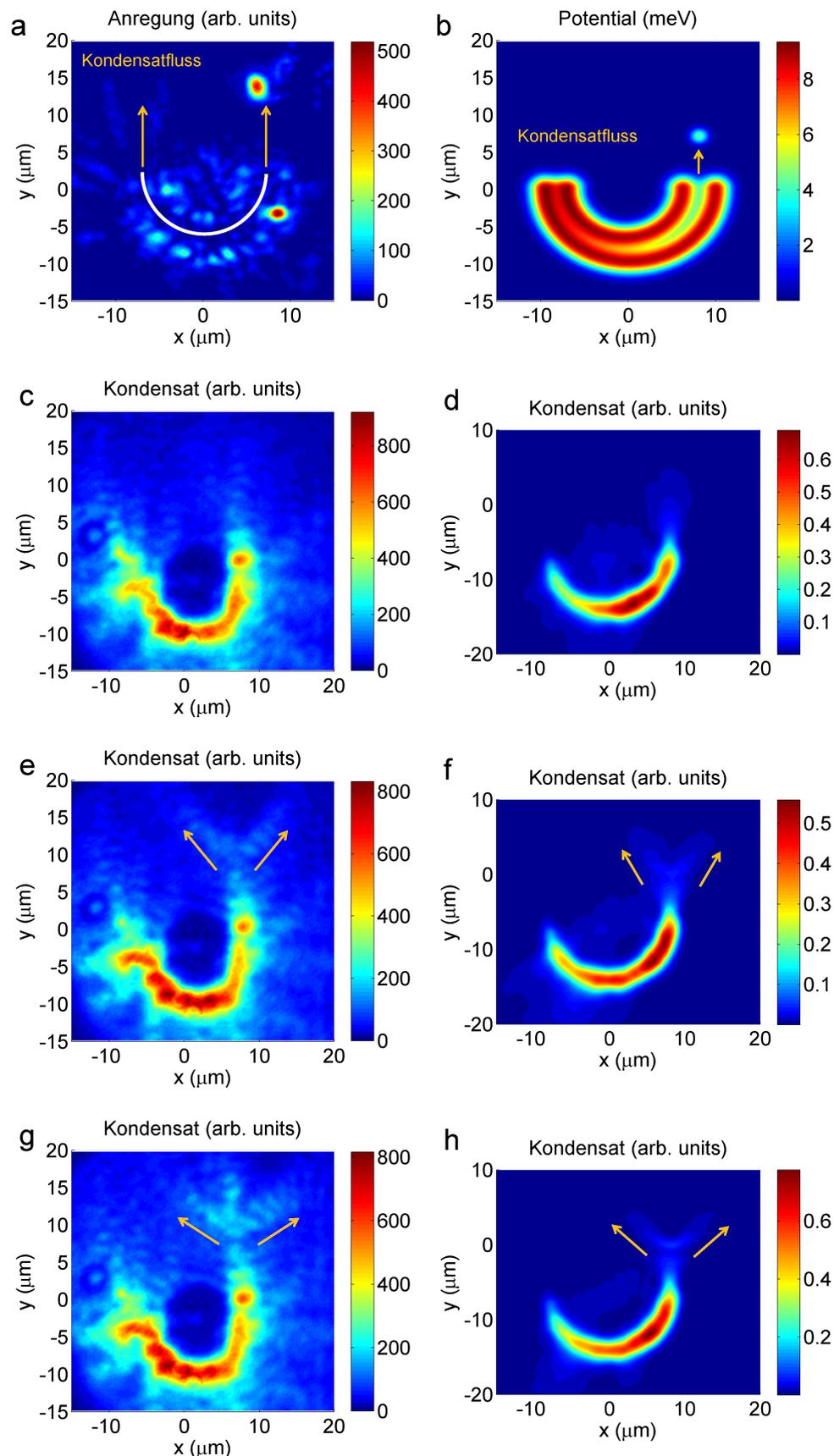


ABBILDUNG 4.7: Zu sehen ist das Anregungsprofil (a) bzw. die Potentiallandschaft (b) für das Streuexperiment bzw. die Simulation. Die Streuung am Target ist für drei verschiedene Targetintensitäten demonstriert. In der linken Spalte sind die experimentellen Photolumineszenzen (c,e,g), in der rechten Spalte die numerisch bestimmten zeitintegrierten Polaritondichten gezeigt (d,f,h). Die eingezeichneten Pfeile zeigen in die Richtungen des geteilten Polaritonflusses.

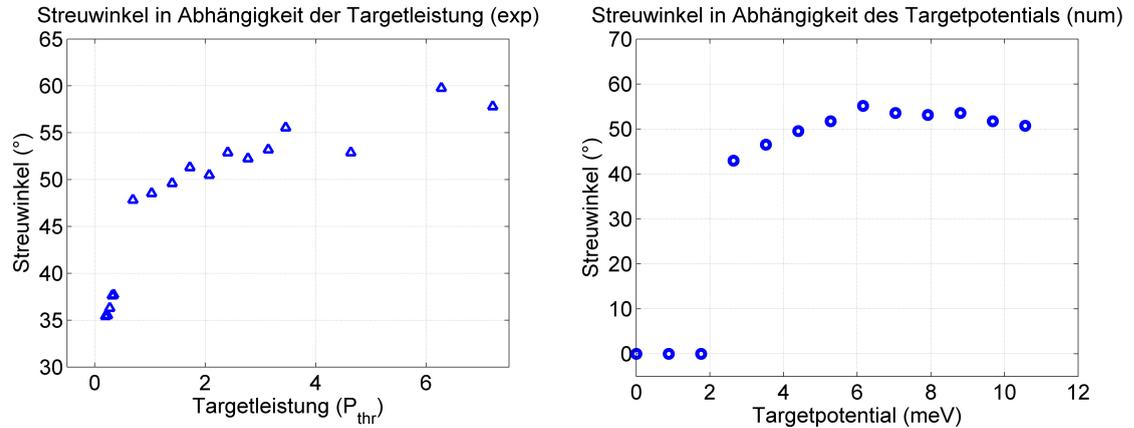


ABBILDUNG 4.8: Gezeigt ist die Abhängigkeit des Streuwinkels  $\alpha$  von der Targetintensität, experimentell (links) und numerisch (rechts).

propagieren. In Abb. 4.7 e und f wurde ein schwaches Target eingeschaltet. Im Experiment wurde dies mit 90% der Leistung angeregt, die zur Kondensation nötig ist ( $P = 0.9 P_{thr}$ ), in der Simulation betrug das Targetpotential 2.64 meV. Durch die Coulombabstoßung bewirkt dieses Target eine Aufspaltung des Kondensats in zwei Teilkondensate, deren Fluss jeweils um den Winkel  $\pm\alpha$  von der  $y$ -Richtung abgelenkt wird. Dieser Winkel wird für höhere Targetintensitäten größer, wie in Abb. 4.7 g und h zu sehen ist (bei einer Target-Leistung  $P = 6.9P_{thr}$  im Experiment und einer Potentialhöhe von 8.8 meV in der Simulation). Wie auch in Abschnitt 4.2 wird das Kondensat durch das Einstreuen aktiver Exzitonen verstärkt.

Die Abhängigkeit des Streuwinkels  $\alpha$  von der Targetintensität ist für Experiment und Simulation in Abb. 4.8 zu sehen. Zur Bestimmung der Winkel wurden die Ergebnisse im Ortsraum für verschiedene Targetintensitäten ausgewertet. Aufgetragen ist der Winkel  $\alpha$  über die Leistung bzw. bei den numerischen Werten über das exzitonische Potential des Targets. Der Winkel  $\alpha$  steigt zunächst abrupt an, um dann eine Sättigung bei ca.  $60^\circ$  im Experiment und bei ca.  $55^\circ$  in der Simulation, zu erreichen. Anders als im Experiment, gibt es in den Simulationen für geringe Targetintensitäten einen Bereich, in dem das Kondensat nicht relevant am Potentialhindernis streut, sondern durch dieses hindurchpropagiert. Es wird daher erst ab einem Schwellwert des Targetpotentials (dieser beträgt hier 2.64 meV) in zwei Teilkondensate aufgespalten. Die Diskrepanz zum Experiment, bei dem kein solcher Schwellwert ablesbar ist, erklärt sich wahrscheinlich durch die höhere kinetische Energien der Polaritonen in den Simulationen und dem geringeren Abstand zum Target.

## 4.6 Zusammenfassung

In diesem Kapitel haben wir in Übereinstimmung mit Experimenten gezeigt, dass es mit Hilfe von Potentiallandschaften möglich ist, einen gerichteten Polaritonfluss unter nichtresonanter Anregung rein optisch zu erzeugen und zu steuern. Der Kondensatfluss entstand hierbei über die Coulomb-Wechselwirkung der Polaritonen mit einer optisch angeregten exzitonischen Potentiallandschaft. Eine Beschreibung des Systems mit Hilfe eines Gleichungssystems, basierend auf der Gross-Pitaevskii-Gleichung, die die Wechselwirkung der Polaritonen mit den Exzitonen im Rahmen eines Zwei-Reservoir-Modells enthielt, lieferte gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten. Im Rahmen dieser Kollaboration wurden neben einer geschlossenen und offenen Kondensatfalle auch das Blockieren und Umlenken des Kondensatflusses (Abschnitt 4.2) wie auch die Streuung an Potentialhindernissen (Abschnitt 4.5) untersucht. Aus den Simulationen lassen sich jedoch auch Erkenntnisse gewinnen, die experimentell nur schwer zugänglich sind. Das betrifft unter anderem die Dynamik des Kondensationsprozesses (Abschnitt 4.3) und auch die Bildung von vereinzelt Interferenzmustern (Abschnitt 4.4).

Ein möglicher Ansatzpunkt für zukünftige Arbeiten wäre unter anderem eine Erweiterung des skalaren Modells um den Polarisationsfreiheitsgrad [84], den wir hier noch nicht berücksichtigt haben und eine detailliertere Untersuchung der Streuung an Potentialhindernissen.

## Kapitel 5

# Zusammenfassung und Ausblick

Diese Arbeit präsentierte den derzeitigen Stand unserer theoretischen Forschung an Exziton-Polaritonen in Halbleitermikrokavitäten. Die Untersuchung eines skalaren Systems unter kohärenter Anregung in Kap. 2 umfasste eine Herleitung gekoppelter Bewegungsgleichungen für die Licht-Materie-Wechselwirkung in einer Mikrokavität, die auf einer semiklassischen Theorie beruhte und als Grundlage zur Beschreibung verschiedener optisch linearer und nichtlinearer Effekte Eingang fand. Untersucht wurden hierbei insbesondere phasenangepasste Streuprozesse dritter Ordnung, auch bekannt als OPO. Eine fundierte analytische Untersuchung dieser Wellenmischprozesse wurde mit Hilfe von Vierwellenmischsimulationen bestätigt und veranschaulicht.

Basierend auf einem stimulierten Einstreuen der Pump polaritonen bewirkt ein Vierwellenmisch-Signal eine konstruktive Rückkopplung an sein erzeugendes Probefeld, sodass ein Probe durch sein eigenes Vierwellenmischen verstärkt wird. Diese Verstärkung lässt sich auch als eine effektive Verminderung der intrinsischen Zerfallsrate  $\gamma_p$  interpretieren. Im Rahmen einer linearen Stabilitätsanalyse ließen sich, abhängig von der Pump polaritondichte und anderen Parametern, “effektive Zerfallsraten” für axiale und nichtaxiale Moden berechnen. Da Moden mit einer negativen Zerfallsrate spontan anwachsen, bot diese Methode ein Verfahren, um die optische Stabilität eines homogenen Polaritonfeldes zu beurteilen. Im Fall einer optischen Instabilität führte ein exponentielles Anwachsen nichtaxialer Felder zu einem Bruch der Symmetrie und zur Bildung eines hexagonalen Musters, wie durch Simulationen gezeigt wurde. Für diese Simulationen wurde ein der Realität nachempfundenes Störstellenpotential modelliert, wie es durch eine leicht fluktuierende Schichtdicke der Mikrokavität auftritt. Die hexagonale Geometrie wurde dabei durch die Resonanz sog. “quadratischer Streuprozesse” bewirkt, an denen mehrere nichtaxiale Moden involviert waren. Wir fanden, dass die Ausbildung eines derartigen Musters allerdings nur in einem beschränkten Dichteintervall stattfinden kann, da sonst

ein Übergang in einen erneut optisch stabilen Zustand eintritt. Die Entschlüsselung dieses Phänomens wäre ein Ausblick für eine zukünftige Forschung. Desweiteren wäre eine Untersuchung der hier behandelten Wellenmischprozesse, der optischen Stabilität und der Musterbildung auch für nichtaxiale Pump polaritonen oder für andere Arten der Anisotropie von großem Interesse.

In Kap. 3 wurde das Modell um den Polarisationsfreiheitsgrad erweitert. Nachdem die Analogie zwischen der Musterbildung in einem skalaren Feld und in einem zirkular polarisierten Feld behandelt wurde, wurden die in Kap. 2 beschriebenen Eigenschaften sukzessiv für ein System mit linear polarisierter Anregung diskutiert. Dabei kam es auch schon im optisch linearen Fall zu neuen Effekten, wie der durch die TE-TM-Aufspaltung verursachte optische Spin-Hall-Effekt. Diesbezüglich ist ein Ausblick - und Gegenstand jetziger Forschung - die Untersuchung nichtlinearer Einflüsse auf den OSHE. Eine Analyse entarteter und nichtentarteter Vierwellenmischprozesse ergab ein bevorzugtes Streuen  $x$ -polarisierter Pump polaritonen in  $y$ -polarisierte Moden. Jedoch entdeckten wir für die "quadratischen Prozesse" polarisationsselektive Auswahlregeln, die einer Musterbildung mit lediglich  $y$ -polarisierten, nichtaxialen Feldern entgegenstanden. Beiden nichtlinearen Effekten lag eine spinabhängige Exziton-Exziton-Wechselwirkung zugrunde. Die Erweiterung der LSA auf ein System linear polarisierter Pump polaritonen hat einen Bruch der in Kap. 2 diskutierten azimuthalen Symmetrie aufgezeigt. Das hexagonale Muster, das sich für optisch instabile Felder bildete, bekam aufgrund der TE-TM-Aufspaltung eine Vorzugsrichtung, die fest mit der Polarisationsrichtung der Pump polaritonen verknüpft war. Die Orientierungsachse eines solchen Musters ließ sich so mit der Polarisationsrichtung "mitdrehen". Ein Symmetriebruch entlang der Orientierungsachse, Frequenzverschiebungen und das Auftreten eines beweglichen Ortsraumusters waren zusätzliche Effekte, die in einem skalaren Modell nicht auftraten.

Im Rahmen einer theoretisch-experimentellen Zusammenarbeit konnte unsere Theorie durch polarisationsabhängige Vierwellenmisch-Experimente qualitativ bestätigt werden, auch wurde die Existenz eines Fernfeldmusters oberhalb einer Intensitätsschwelle nachgewiesen und die feste Ausrichtung dieses Musters zur Polarisationssebene des Pumps. Experimentell konnte jedoch das dynamische Ortsraummuster bislang nicht beobachtet werden. Eine weitere Diskrepanz lag in der Elongation des experimentell beobachteten Fernfeldmusters, vermutlich verursacht durch resonante Rayleigh-Streuung an Störstellen. Ein solcher Effekt eines Störstellenpotentials auf das hexagonale Muster konnte numerisch bislang nicht bestätigt werden. Neben der Erklärung dieser Unterschiede wäre auch die genauere Untersuchung von Schaltprozessen, insbesondere unter dem Gesichtspunkt ihrer Performance, ein Ausblick für eine zukünftige Forschung. Eine

---

detaillierte Untersuchung der Phasenbeziehungen, der Wellenmischprozesse und der Musterbildung in Doppelkavitäten ist bereits heute Gegenstand einer aktuellen Zusammenarbeit.

In Kap. 4 wurde der Prozess der Polaritonkondensation für eine nichtresonante und gepulste Anregung untersucht. Nach der Herleitung eines Zwei-Reservoir-Modells für inkohärente Exzitonen haben wir mit Hilfe numerischer Rechnungen die Kondensation für verschiedene, rein optische Anregungsgeometrien untersucht. So erzeugte Potentiallandschaften konnten bspw. das entstehende Kondensat in einem Potentialminimum einfangen oder aber gerichtet aus der Geometrie herausfließen lassen. Der so entstandene Fluss konnte nachträglich mit Hilfe weiterer, simultan erzeugter Anregungsgeometrien gesteuert werden, was wir anhand einer geeigneten Geometrie für eine Blockade und einer Umleitung des Kondensates gezeigt haben. Die Ergebnisse unserer Simulationen stimmten hierbei qualitativ gut mit experimentell gemessenen Photolumineszenzen überein, jedoch ergaben sich auch hier quantitative Unterschiede: So propagiert das Kondensat im Experiment überraschenderweise über eine längere Distanz. Ein Ausblick weiterer Forschung auf diesem Gebiet wäre die Berücksichtigung des Polarisationsfreiheitsgrades und eine Verwendung gekoppelter Bewegungsgleichungen für  $E$ - und  $p$ -Feld. Letztere würde auch die Untersuchung des spezifischen nichtlinearen Einflusses von Coulomb-Wechselwirkung und Phasenraumfüllung ermöglichen.



# Anhang A

## Details zur Analyse

### A.1 Herleitung der Gross-Pitaevskii-Gleichung

Die gekoppelten Bewegungsgln. für  $E$ - und  $p$ -Feld lauten:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} E = (\mathbb{H}_c - i\gamma_c) E - \Omega_x p + E_{\text{pump}} \quad (\text{A.1})$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} p = (\mathbb{H}_x - i\gamma_x) p - \Omega_x (1 - \alpha_{\text{PSF}} |p|^2) E + V_{\text{HF}} |p|^2 p. \quad (\text{A.2})$$

Mit diesen kann nun für den unteren Polaritonenzweig  $\Psi^{\text{LPB}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (E + p)$  eine Bewegungsgleichung für  $\Psi^{\text{LPB}}$  hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} \sqrt{2}i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi^{\text{LPB}} &= (\mathbb{H}_c - i\gamma_c) E + (\mathbb{H}_x - i\gamma_x) p - \Omega_x (E + p) \\ &\quad + \alpha_{\text{PSF}} \Omega_x |p|^2 E + V_{\text{HF}} |p|^2 p + E_{\text{pump}}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Für  $E$  und  $p$  gelten  $E = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi^{\text{LPB}} + \Psi^{\text{UPB}})$  und  $p = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi^{\text{LPB}} - \Psi^{\text{UPB}})$ . Unter Vernachlässigung der Besetzung auf dem UPB gilt somit  $E = p = \frac{1}{\sqrt{2}} \Psi^{\text{LPB}}$ . Damit wird Gl.

A.3 zu

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi^{\text{LPB}} &= \left[ \frac{1}{2} (\mathbb{H}_c + \mathbb{H}_x) - \Omega_x - \frac{i}{2} (\gamma_c + \gamma_x) \right] \Psi^{\text{LPB}} \\ &\quad + \frac{1}{4} (\alpha_{\text{PSF}} \Omega_x + V_{\text{HF}}) |\Psi^{\text{LPB}}|^2 \Psi^{\text{LPB}} + \frac{1}{\sqrt{2}} E_{\text{pump}}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Mit  $\mathbb{H}_p \equiv \frac{1}{2} (\mathbb{H}_c + \mathbb{H}_x) - \Omega_x$ ,  $\gamma_p \equiv \frac{1}{2} (\gamma_c + \gamma_x)$ ,  $\alpha \equiv \frac{1}{4} (\alpha_{\text{PSF}} \Omega_x + V_{\text{HF}})$ ,  $\Psi \equiv \Psi^{\text{LPB}}$  und  $\Psi_{\text{pump}} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_{\text{pump}}$  folgt die Gross-Pitaevskii-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = (\mathbb{H}_p - i\gamma_p) \Psi + \alpha |\Psi|^2 \Psi + \Psi_{\text{pump}}. \quad (\text{A.5})$$

## A.2 Auftreten einer S-Kurve infolge kubischer Nichtlinearität

Betrachtet man ein homogenes Polaritonfeld mit einer stationären Dichte, vereinfacht sich die GPE zu:

$$(\hbar\omega_p - \epsilon_0^p + i\gamma_p - \alpha|\Psi_0|^2) \Psi_0 = \Psi_{\text{pump},0}. \quad (\text{A.6})$$

Bildet man für beide Seiten von Gl. A.6 das Betragsquadrat, ergibt für die Polaritondichte  $n_p \equiv |\Psi_0|^2$  und die Intensität  $I \equiv |\Psi_{\text{pump},0}|^2$  die kubische Gleichung:

$$\left[ (\hbar\omega_p - \epsilon_0^p - \alpha n_p)^2 + \gamma_p^2 \right] n_p = I. \quad (\text{A.7})$$

Mit  $\Delta\hbar\omega_p \equiv \omega_p - \epsilon_0^p$  folgt

$$\alpha^2 n_p^3 - 2\alpha\Delta\hbar\omega_p n_p^2 + (\Delta\hbar^2\omega_p^2 + \gamma_p^2) n_p = I. \quad (\text{A.8})$$

Man kann somit jeder Dichte  $n_p$  eine eindeutige Intensität  $I = I(n_p)$  zuweisen. Für  $\alpha \neq 0$  ist die Funktion  $I(n_p)$  ein Polynom dritter Ordnung und genau dann nicht mehr bijektiv, wenn  $I$  mehr als eine Extremstelle hat. Um ein Kriterium dafür herzuleiten, bilden wir die erste Ableitung  $I'(n_p)$ :

$$I'(n_p) = 3\alpha^2 n_p^2 - 4\alpha\Delta\hbar\omega_p n_p + \Delta\hbar^2\omega_p^2 + \gamma_p^2. \quad (\text{A.9})$$

Für eine Extremstelle gilt  $I'(n_p) = 0$ , sodass

$$n_p = \frac{2\Delta\hbar\omega_p \pm \sqrt{\Delta\hbar^2\omega_p^2 - 3\gamma_p^2}}{3\alpha}. \quad (\text{A.10})$$

$I$  hat somit nur dann zwei Extremstellen, wenn  $\Delta\hbar^2\omega_p^2 - 3\gamma_p^2 > 0$ . Somit bildet der Verlauf  $I \rightarrow n_p$  eine S-Kurve, wenn  $\hbar\omega_p > \epsilon_0^p + \sqrt{3}\gamma_p$ .

## A.3 Herleitung der LSA

Hier leiten wir die lineare Stabilitätsanalyse für ein skalares, einkomponentiges Polaritonfeld her. Die Herleitung der LSA für kompliziertere Fälle erfolgt analog. Ein Polaritonfeld setzt sich, wie in Abschn. 2.4 diskutiert, aus einem axialen und zwei nichtaxialen Anteilen zusammen:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \left( \Psi_0 + \Psi_{\text{noise}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \Psi_{\text{fwm}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \right) e^{-i\omega_p t}. \quad (\text{A.11})$$

Einsetzen in die Gross-Pitaevskii-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = (\mathbb{H}_p - i\gamma_p) \Psi(\mathbf{r}, t) + \alpha |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \Psi(\mathbf{r}, t) + \Psi_{\text{pump}}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{A.12})$$

ergibt durch die Auswertung der linken Seite einerseits:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \hbar\omega_p \Psi(\mathbf{r}, t) + i\hbar \left( \frac{\partial}{\partial t} \Psi_{\text{noise}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \frac{\partial}{\partial t} \Psi_{\text{fwm}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \right) e^{-i\omega_p t}. \quad (\text{A.13})$$

Dabei wurde angenommen wurde, dass  $\Psi_0$  zeitlich konstant bleibt. Andererseits ergibt sich durch Auswertung der rechten Seite:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) &= \left( (\epsilon_{\mathbf{k}}^p - i\gamma_p) \Psi_{\text{noise}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + (\epsilon_{-\mathbf{k}}^p - i\gamma_p) \Psi_{\text{fwm}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \right) e^{-i\omega_p t} \\ &+ \alpha \left( |\Psi_0|^2 \Psi_0 + 2|\Psi_0|^2 \left( \Psi_{\text{noise}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \Psi_{\text{fwm}} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \right) \right) e^{-i\omega_p t} \\ &+ \alpha \Psi_0^2 \left( \Psi_{\text{noise}}^* e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \Psi_{\text{fwm}}^* e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \right) e^{-i\omega_p t} + \Psi_{\text{pump}}, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

wobei alle quadratischen und kubischen Terme in  $\Psi_{\text{noise}}$  und  $\Psi_{\text{fwm}}$  vernachlässigt wurden. Gleichsetzen der Gln. A.13 und A.14 und ein Anwenden von  $\int d\mathbf{r} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$  ergibt:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_{\text{noise}} = (\epsilon_{\mathbf{k}}^p + 2\alpha |\Psi_0|^2 - \hbar\omega_p - i\gamma_p) \Psi_{\text{noise}} + \alpha \Psi_0^2 \Psi_{\text{fwm}}^*. \quad (\text{A.15})$$

Ein Anwenden von  $\int d\mathbf{r} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$  auf Gln. A.13 und A.14 mit einer anschließenden komplexen Konjugation ergibt:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi_{\text{fwm}}^* = -(\epsilon_{\mathbf{k}}^p + 2\alpha |\Psi_0|^2 - \hbar\omega_p + i\gamma_p) \Psi_{\text{fwm}}^* - \alpha \Psi_0^{*2} \Psi_{\text{noise}}. \quad (\text{A.16})$$

In den Gln. A.15 und A.16 wurde dabei  $\epsilon_{\mathbf{k}}^p = \epsilon_{-\mathbf{k}}^p \equiv \epsilon_{\mathbf{k}}^p$  verwendet. Mit  $\Delta\epsilon_{\mathbf{k}} = \epsilon_{\mathbf{k}}^p + 2\alpha |\Psi_0|^2 - \hbar\omega_p - i\gamma_p$  ergeben Gln. A.15 und A.16 in Matrixschreibweise

$$\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \Psi_{\text{noise}} \\ \Psi_{\text{fwm}}^* \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} \Delta\epsilon_{\mathbf{k}} & \alpha \Psi_0^2 \\ -\alpha \Psi_0^{*2} & -\Delta\epsilon_{\mathbf{k}}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_{\text{noise}} \\ \Psi_{\text{fwm}}^* \end{pmatrix} \equiv \mathbb{M} \begin{pmatrix} \Psi_{\text{noise}} \\ \Psi_{\text{fwm}}^* \end{pmatrix} \quad (\text{A.17})$$

das Ergebnis in Abschn. 2.4 .



## Anhang B

# Numerische Details

Die in Kap. 2 und 3 verwendeten Anregungsprofile bestehen aus einem runden, konstanten Plateau um den Ursprung des Koordinatensystems mit einem Radius  $r_0$  und einer gaußförmigen Verteilung ( $\exp(-(r - r_0)^2/(2\sigma_1^2))$ ) außerhalb dieses Bereiches. Diese fällt für größere Radien mit der Funktion  $\exp(-(r - r_0)^6/(2\sigma_2^6))$  ab, wobei ein stetig differenzierbarer Übergang stattfindet. Um Reflektionen der Polaritonen am Rand der Kavität zu vermeiden, wurde in der Nähe der Ränder die Zerfallsrate  $\gamma_c$  kontinuierlich erhöht. Zur Lösung der Differentialgleichungen wird das Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung [51] mit Zeitschritten von ca. 5 fs verwendet. Als Anfangsbedingung für  $E$  und  $p$  wurden zum Pump formgleiche Felder eingesetzt, wie sie im optisch stabilen Fall näherungsweise zu erwarten gewesen wären.

Die Differentialoperatoren, die in der Bewegungsgleichung für das  $E$ -Feld

$$i\hbar\dot{E}^\pm = (\mathbb{H} - i\gamma_c) E^\pm + \mathbb{H}^\pm E^\mp - \Omega_x p^\pm + E_{\text{pump}}^\pm \quad (\text{B.1})$$

vorkamen, d.h. der Diagonalanteil

$$\mathbb{H} = -\frac{\hbar^2}{4} (m_{TM}^{-1} + m_{TE}^{-1}) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad (\text{B.2})$$

und der durch die TE-TM-Aufspaltung bedingte nichtdiagonale Operator

$$\mathbb{H}^\pm = -\frac{\hbar^2}{4} (m_{TM}^{-1} - m_{TE}^{-1}) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \mp 2i \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (\text{B.3})$$

wurden auf einem diskreten  $N \times N$ -Ortsraumgitter folgendermaßen implementiert: Das zweidimensionale Feld  $E^\pm(x, y)$  entspricht einem diskretisierten Feld  $E_{m,n}^\pm \equiv E^\pm(x_m, y_n)$ , wobei  $x_m$  und  $y_n$  die Gitterpunkte sind. Dieses zweidimensionale Feld wurde nun in ein eindimensionales transformiert, was über die Zuweisung  $E_{m,n}^\pm \rightarrow E_i^\pm$  mit  $i = m \cdot N + n$

geschah. Die Ableitungen im Ortsraum,  $\partial^2/\partial x^2$  und  $\partial^2/\partial y^2$  sind damit

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} E_i^\pm = \delta^{-2} (E_{i+N}^\pm + E_{i-N}^\pm - 2E_i^\pm) \quad (\text{B.4})$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} E_i^\pm = \delta^{-2} (E_{i+1}^\pm + E_{i-1}^\pm - 2E_i^\pm), \quad (\text{B.5})$$

wobei  $\delta$  den Abstand zweier benachbarter Gitterpunkte bezeichnet, die wir für  $x$ - und  $y$ -Richtung gleichgesetzt haben. Die gemischte Ableitung wird auf dem Ortsraumgitter zu

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} E_i^\mp = (2\delta)^{-2} (E_{i+N+1}^\mp - E_{i+N-1}^\mp - E_{i-N+1}^\mp + E_{i-N-1}^\mp). \quad (\text{B.6})$$

Somit ist

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) E_i^\pm = \delta^{-2} (E_{i+N}^\pm + E_{i-N}^\pm + E_{i+1}^\pm + E_{i-1}^\pm - 4E_i^\pm) \quad (\text{B.7})$$

und

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \mp 2i \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) E_i^\mp &= \delta^{-2} (E_{i+N}^\mp + E_{i-N}^\mp - E_{i+1}^\mp - E_{i-1}^\mp) \\ &\mp 0.5i\delta^{-2} (E_{i+N+1}^\mp - E_{i+N-1}^\mp - E_{i-N+1}^\mp + E_{i-N-1}^\mp). \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Ortspunkte, die über den Rand der Kavität hinausgegangen wären, fanden keinen Eingang in Gl. B.7 und B.8.

# Literaturverzeichnis

- [1] V. Ardizzone, P. Lewandowski, M. H. Luk, Y. C. Tse, N. H. Kwong, A. Lücke, M. Abbarchi, E. Baudin, E. Galopin, J. Bloch, A. Lemaître, P. T. Leung, P. Rousignol, R. Binder, J. Tignon, and S. Schumacher, “Formation and control of Turing patterns in a coherent quantum fluid,” *Scientific Reports* **3**, 3016 (2013).
- [2] P. Lewandowski, O. Lafont, C. Y. Tsang, P. T. Leung, M. H. Luk, N. H. Kwong, R. Binder, J. Tignon, E. Baudin, and S. Schumacher, “Beyond the optical spin Hall effect: nonlinear wave mixing of spinor polaritons in semiconductor microcavities”, (unpublished).
- [3] J. Schmutzler, P. Lewandowski, M. Aßmann, S. Schumacher, M. Kamp, C. Schneider, S. Höfling, and M. Bayer, “All-optical flow control of a polariton condensate using nonresonant excitation,” *Phys. Rev. B* **91**, 195308 (2015).
- [4] M. H. Luk, Y. C. Tse, N. H. Kwong, P. T. Leung, P. Lewandowski, R. Binder, and S. Schumacher, “Transverse optical instability patterns in semiconductor microcavities: Polariton scattering and low-intensity all-optical switching,” *Phys. Rev. B* **87**, 205307 (2013).
- [5] R. W. Boyd, *Nonlinear Optics*, Academic Press, 3rd edition (2008).
- [6] S. Schmitt-Rink, D.S. Chemla, and D.A.B. Miller, “Linear and nonlinear optical properties of semiconductor quantum wells,” *Advances in Physics* **38**, 89 (1989).
- [7] W. W. Chow, S. W. Koch, *Semiconductor - Laser Fundamentals*, Springer (1999).
- [8] A. M. C. Dawes, L. Illing, S. M. Clark, and D. J. Gauthier, “All-optical Switching in Rubidium vapor,” *Science* **308**, 672 (2005).
- [9] S. Schumacher, N. H. Kwong, R. Binder, and A. L. Smirl, “Low intensity directional switching of light in semiconductor microcavities,” *Phys. Stat. Sol. RRL* **3**, 10 (2009).

- [10] A. M. C. Dawes, D. J. Gauthier, S. Schumacher, N. H. Kwong, R. Binder, and A. L. Smirl, "Transverse optical patterns for ultra-low-light-level all-optical switching," *Laser Photonics Rev.* **4**, 221 (2010).
- [11] N. H. Kwong, R. Takayama, I. Rumyantsev, M. Kuwata-Gonokami, and R. Binder, "Third-order exciton-correlation and nonlinear cavity-polariton effects in semiconductor microcavities," *Phys. Rev. B* **64**, 045316 (2001).
- [12] R. Takayama, N. H. Kwong, I. Rumyantsev, M. Kuwata-Gonokami, and R. Binder, "T-matrix analysis of biexcitonic correlations in the nonlinear optical response of semiconductor quantum wells," *Eur. Phys. J. B* **25**, 445 (2002).
- [13] D. Sanvitto, V. Timofeev, *Exciton Polaritons in Microcavities*, New Frontiers, Springer Series in Solid-State Sciences 172 (2012).
- [14] A. Kavokin, J. J. Baumberg, G. Malpuech, and F. P. Laussy, *Microcavities*, Series on Semiconductor Science and Technology, Oxford University Press, USA, 2nd ed. (2011).
- [15] J.-R. Chen, T.-C. Lu, Y.-C. Wu, S.-C. Lin, W.-F. Hsieh, S.-C. Wang, and H. Deng, "Characteristics of exciton-polaritons in ZnO-based hybrid microcavities," *Optics Express* **19**, 4101 (2011).
- [16] K. Bando, H. Nagai, M. Amano, K. Kanezashi, S. Kumeta, and H. Kondo, "Cavity Polaritons in Single-Crystalline Organic Microcavity Prepared at Room Temperature Using a Simple Solution Technique," *Applied Physics Express* **6**, 111601 (2013).
- [17] E. Kammann, H. Ohadi, M. Maragkou, A. V. Kavokin, and P. G. Lagoudakis, "Crossover from photon to exciton-polariton lasing," *New Journal of Physics* **14**, 105003 (2012).
- [18] W. Schäfer, M. Wegener, *Semiconductor Optics and Transport Phenomena*, Springer Verlag (2002).
- [19] D. Ballarini, D. Sanvitto, A. Amo, L. Viña, M. Wouters, I. Carusotto, A. Lemaitre, and J. Bloch, "Observation of Long-Lived Polariton States in Semiconductor Microcavities across the Parametric Threshold," *Phys. Rev. Lett.* **102**, 056402 (2009).
- [20] J. J. Baumberg, P. G. Savvidis, R. M. Stevenson, A. I. Tartakovskii, M. S. Skolnick, D. M. Whittaker, and J. S. Roberts, "Parametric oscillation in a vertical microcavity: A polariton condensate or micro-optical parametric oscillation," *Phys. Rev. B* **62**, R16247 (2000).

- [21] D. Taj, T. Lecomte, C. Diederichs, P. Roussignol, C. Delalande, and J. Tignon, “Interbranch parametric oscillation in the weak coupling regime for semiconductor vertical multimicrocavities,” *Phys. Rev. B* **80**, 081308 (2009).
- [22] P. G. Savvidis, J. J. Baumberg, R. M. Stevenson, M. S. Skolnick, D. M. Whittaker, and J. S. Roberts, “Angle-resonant stimulated polariton amplifier,” *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1547 (2000).
- [23] C. Diederichs, J. Tignon, G. Dasbach, C. Ciuti, A. Lemaître, J. Bloch, P. Roussignol, and D. Delalande, “Parametric oscillation in vertical triple microcavities,” *Nature* **440**, 904 (2006).
- [24] A. Kavokin, P. G. Lagoudakis, G. Malpuech, and J. J. Baumberg, “Polarization rotation in parametric scattering of polaritons in semiconductor microcavities,” *Phys. Rev. B* **67**, 195321 (2003).
- [25] S. Savasta, O. Di Stefano, and R. Girlanda, “Many-Body and Correlation Effects on Parametric Polariton Amplification in Semiconductor Microcavities,” *Phys. Rev. Lett.* **90**, 096403 (2003).
- [26] H. Saito, T. Aioi, and T. Kadokura, “Order-disorder Oscillations in Exciton-Polariton Superfluids,” *Phys. Rev. Lett.* **110**, 026401 (2013).
- [27] O. A. Egorov, A. Werner, T. C. H. Liew, E. A. Ostrovskaya and F. Lederer, “Motion of patterns in polariton quantum fluids with spin-orbit interaction,” *Phys. Rev. B* **89**, 235302 (2014).
- [28] R. Kheradmand, M. Sahrai, H. Tajalli, G. Tissoni, and L. A. Lugiato, “All-optical switching in semiconductor microresonators based on pattern selection,” *Eur. Phys. J. D* **47**, 107 (2008).
- [29] N. H. Kwong, R. Takayama, I. Rumyantsev, M. Kuwata-Gonokami, and R. Binder, “Evidence of Nonperturbative Continuum Correlations in Two-Dimensional Exciton Systems in Semiconductor Microcavities,” *Phys. Rev. Lett.* **87**, 027402 (2001).
- [30] M. Lindberg, Y. Z. Hu, R. Binder, and S. W. Koch, “ $\chi^{(3)}$  formalism in optically excited semiconductors and its applications in four-wave-mixing spectroscopy,” *Phys. Rev. B* **50**, 18060 (1994).
- [31] T. Meier, P. Thomas, S. W. Koch, *Coherent Semiconductor Optics*, Springer (2010).
- [32] G. Panzarini, L. C. Andreani, A. Armitage, D. Baxter, M. S. Skolnick, V. N. Astratov, J. S. Roberts, A. V. Kavokin, M. R. Vladimirova, and M. A. Kaliteevski, “Exciton-light coupling in single and coupled semiconductor microcavities: Polariton dispersion and polarization splitting,” *Phys. Rev. B* **59**, 5082 (1999).

- [33] A. Kavokin, G. Malpuech and M. Glazov, “Optical Spin Hall Effect,” *Phys. Rev. Lett.* **95**, 136601 (2005).
- [34] C. Leyder, M. Romanelli, J. P. Karr, E. Giacobino, T. C. H. Liew, M. M. Glazov, A. V. Kavokin, G. Malpuech and A. Bramati, “Observation of the optical spin Hall effect,” *Nature Physics* **3**, 628 (2007).
- [35] Y. K. Kato, R. C. Myers, A. C. Gossard, D. D. Awschalom, “Observation of the Spin Hall Effect in Semiconductors,” *Science* **306**, 1910 (2004).
- [36] E. Kammann, T. C. H. Liew, H. Ohadi, P. Cilibrizzi, P. Tsotsis, Z. Hatzopoulos, P. G. Savvidis, A. V. Kavokin, and P. G. Lagoudakis, “Nonlinear Optical Spin Hall Effect and Long-Range Spin Transport in Polariton Lasers,” *Phys. Rev. Lett.* **109**, 036404 (2012).
- [37] W. Langbein, I Shelykh, D. Solnyshkov, G. Malpuech, Y. Rubo, and A. Kavokin, “Polarization beats in ballistic propagation of exciton-polaritons in microcavities,” *Phys. Rev. B* **75**, 075323 (2007).
- [38] H. Deng, G. Weihs, C. Santori, J. Bloch, and Y. Yamamoto, “Condensation of Semiconductor Microcavity Exciton Polaritons,” *Science* **4**, 298 (2002).
- [39] H. Deng, H. Haug, and Y. Yamamoto, “Exciton-polariton Bose-Einstein condensation,” *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1489 (2010).
- [40] J. Kasprzak, M. Richard, S. Kundermann, A. Baas, P. Jeambrun, J. M. J. Keeling, F. M. Marchetti, M. H. Szymańska, R. André, J. L. Staehli, V. Savona, P. B. Littlewood, B. Deveaud, and L. S. Dang, “Bose-Einstein condensation of exciton polaritons,” *Nature* **443**, 409 (2006).
- [41] M. Wouters, I. Carusotto, and C. Ciuti, “Spatial and spectral shape of inhomogeneous nonequilibrium exciton-polariton condensates,” *Phys. Rev. B* **77**, 115340 (2008).
- [42] H. Haug, S. W. Koch, *Quantum Theory of the Optical and Electronic Properties of Semiconductors*, World Scientific Publishing, 4th ed. (2005).
- [43] V. M. Axt and A. Stahl, “A dynamics-controlled truncation scheme for the hierarchy of density matrices in semiconductor optics,” *Z. Phys. B* **93**, 195 (1994).
- [44] B. Sermage, S. Long, B. Deveaud, and D. Katzer, “Lifetime of excitons in GaAs quantum wells,” *Le Journal de Physique IV* **03**, C5 (1993).
- [45] C. Weisbuch, M. Nishioka, A. Ishikawa and Y. Arakawa, “Observation of the Coupled Exciton-Photon Mode Splitting in a Semiconductor Quantum Microcavity,” *Phys. Rev. Lett.* **69**, 3314 (1992).

- [46] D. Ballarini, M. De Giorgi, E. Cancellieri, R. Houdré, E. Giacobino, R. Cingolani, A. Bramati, G. Gigli, and D. Sanvitto, “All-optical polariton transistor,” *Nature Communications* **4**, 1778 (2013).
- [47] A. Yariv and D. M. Pepper, “Amplified reflection, phase conjugation, and oscillation in degenerate four-wave mixing,” *Optics Letters* (1977).
- [48] G. Grynberg, “Mirrorless four-wave mixing oscillation in atomic vapors,” *Optics Communications* **66**, 321 (1988).
- [49] S. Schumacher, N. H. Kwong, and R. Binder, “Large optical gain from four-wave mixing instabilities in semiconductor quantum wells,” *EPL* **81**, 27003 (2008).
- [50] M. Buck, L. Wischmeier, S. Schumacher, G. Czycholl, F. Jahnke, T. Voss, I. Rückmann, and J. Gutowski, “Light-polarization and intensity dependence of higher-order nonlinearities in excitonic FWM signals,” *Eur. Phys. J. B* **42**, 175 (2004).
- [51] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press (2007).
- [52] S. Schumacher, N. H. Kwong, and R. Binder, “Influence of exciton-exciton correlations on the polarization characteristics of polariton amplification in semiconductor microcavities,” *Phys. Rev. B* **76**, 245324 (2007).
- [53] S. Schumacher, “Spatial anisotropy of polariton amplification in planar semiconductor microcavities induced by polarization anisotropy,” *Phys. Rev. B* **77**, 073302 (2008).
- [54] W. J. Firth and C. Paré, “Transverse modulational instabilities for counterpropagating beams in Kerr media,” *Optics Letters* **13**, 1096 (1988).
- [55] S. Schumacher, N. H. Kwong, R. Binder, and A. L. Smirl, “Optical instabilities in semiconductor quantum-well systems driven by phase-space filling,” *Phys. Status Solidi B* **246**, 307 (2009).
- [56] V. Savona, W. Langbein, “Realistic heterointerface model for excitonic states in growth-interrupted GaAs quantum wells,” *Phys. Rev. B* **74**, 075311 (2006).
- [57] M. Gurioli, F. Bogani, D. S. Wiersma, P. Roussignol, G. Cassabois, G. Khitrova, and H. Gibbs, “Experimental study of disorder in a semiconductor microcavity,” *Phys. Rev. B* **64**, 165309 (2001).
- [58] G. Malpuech, A. Kavokin, W. Langbein, and J. M. Hvam, “Resonant Rayleigh Scattering of Exciton-Polaritons in multiple quantum wells,” *Phys. Rev. Lett* **85**, 650–653 (2000).

- [59] A.V. Shchegrov, J. Bloch, D. Birkedal, and J. Shah, “Theory of Resonant Rayleigh Scattering from Semiconductor Microcavities: Signatures of disorder,” *Phys. Rev. Lett.* **84**, 3478 (2000).
- [60] T. C. H. Liew and V. Savona, “Optically erasing disorder in semiconductor microcavities with dynamic nuclear polarization,” *Phys. Rev. Lett.* **106**, 146404 (2011).
- [61] V. Savona, “Effect of interface disorder on quantum well excitons and microcavity polaritons,” *J. Phys.: Condens. Matter* **19**, 295208 (2007).
- [62] Z. Vörös and G. Weihs, “Rayleigh scattering in coupled microcavities: Theory,” *J. Phys: Condens. Matter* **26**, 485303 (2014).
- [63] M. C. Cross and P. C. Hohenberg, “Pattern formation outside of equilibrium,” *Rev. Mod. Phys.* **65**, 851 (1993).
- [64] J. B. Geddes, R. A. Indik, J. V. Moloney, and W. J. Firth, “Hexagons and squares in a passive nonlinear optical system,” *Phys. Rev. A* **50**, 3471 (1994).
- [65] Andreas Lücke, “Rein-optisches Schalten transversaler Polaritonmuster in Halbleiternmikrokavitäten,” Bachelorarbeit, Universität Paderborn (2012).
- [66] I. A. Shelykh, A. V. Kavokin, Y. Rubo, T. C. H. Liew, and G. Malpuech, “Polariton polarization-sensitive phenomena in planar semiconductor microcavities,” *Semiconductor Science and Technology* **25**, 013001 (2010).
- [67] I. Carusotto and C. Ciuti, “Quantum fluids of light,” *Rev. Mod. Phys.* **85**, 299 (2013).
- [68] H. Flayac, I. A. Shelykh, D. D. Solnyshkov, and G. Malpuech, “Topological stability of the half-vortices in spinor exciton-polariton condensates,” *Phys. Rev. B* **81**, 045318 (2010).
- [69] H. Flayac, D. D. Solnyshkov, and G. Malpuech, “Oblique half-solitons and their generation in exciton-polariton condensates,” *Phys. Rev. B* **83**, 193305 (2011).
- [70] Y. C. Tse, “A Low-dimensional Population-competition Model for Analyzing Transverse Optical Patterns,” Master Thesis, The University of Hong Kong (2012).
- [71] F. Schwabl, *Statistische Mechanik*, Springer (2006).
- [72] D. Snoke, “Condensed-matter physics: Coherent questions,” *Nature* **443**, 403 (2006).

- [73] D. Sanitto, S. Pigeon, A. Amo, D. Ballarini, M. De Giorgi, I. Carusotto, R. Hivet, F. Pisanello, V. G. Sala, P. S. S. Guimaraes, R. Houdré, E. Giacobino, C. Ciuti, A. Bramati, and G. Gigli, “All-optical control of the quantum flow of a polariton condensate,” *Nature Photonics* **5**, 610 (2011).
- [74] E. Wertz, L. Ferrier, D. D. Solnyshkov, R. Johne, D. Sanvitto, A. Lemaître, I. Sagnes, R. Grousson, A. V. Kavokin, P. Senellart, G. Malpuech, and J. Bloch, “Spontaneous formation and optical manipulation of extended polariton condensates,” *Nat. Phys.* **6**, 860 (2010).
- [75] M. O. Borgh, J. Keeling, and N. G. Berloff, “Spatial pattern formation and polarization dynamics of a nonequilibrium spinor polariton condensate,” *Phys. Rev. B* **81**, 235302 (2010).
- [76] K. G. Lagoudakis, M. Wouters, M. Richard, A. Baas, I. Carusotto, R. André, L. S. Dang, and B. Deveaud-Plédran, “Quantized vortices in an exciton-polariton condensate,” *Nature Physics* **4**, 706 (2008).
- [77] G. Christmann, G. Tosi, N. G. Berloff, P. Tsotsis, P. S. Eldridge, Z. Hatzopoulos, P. G. Savvidis, and J. J. Baumberg, “Polariton ring condensates and sunflower ripples in an expanding quantum liquid,” *Phys. Rev. B* **85**, 235305 (2012).
- [78] F. Manni, K. G. Lagoudakis, T. C. H. Liew, R. André, and B. Deveaud-Plédran, “Spontaneous Pattern Formation in a Polariton Condensate,” *Phys. Rev. Lett.* **107**, 106401 (2011).
- [79] K. G. Lagoudakis, F. Manni, B. Pietka, M. Wouters, T. C. H. Liew, V. Savona, A. V. Kavokin, R. André, and B. Deveaud-Plédran, “Probing the Dynamics of Spontaneous Quantum Vortices in Polariton Superfluids,” *Phys. Rev. Lett.* **106**, 115301 (2011).
- [80] J. Schmutzler, T. Kazimierczuk, Ö. Bayraktar, M. Aßmann, M. Bayer, S. Brodbeck, M. Kamp, C. Schneider, and S. Höfling, “Influence of interactions with non-condensed particles on the coherence of a one-dimensional polariton condensate,” *Phys. Rev. B* **89**, 115119 (2014).
- [81] J. S. Tempel, S. Veit, M. Aßmann, L. E. Kreilkamp, A. Rahimi-Iman, A. Löffler, S. Höfling, S. Reitzenstein, L. Worschech, A. Forchel, and M. Bayer, “Characterization of two-threshold behavior of the emission from a GaAs microcavity,” *Phys. Rev. B* **85**, 075318 (2012).
- [82] A. Askitopoulos, H. Ohadi, A. V. Kavokin, Z. Hatzopoulos, P. G. Savvidis, and P. G. Lagoudakis, “Polariton condensation in an optically induced two-dimensional potential,” *Phys. Rev. B* **88**, 041308 (2013).

- [83] D. Tanese, D. D. Solnyshkov, A. Amo, L. Ferrier, E. Bernet-Rollande, E. Wertz, I. Sagnes, A. Lemaître, P. Senellart, G. Malpuech, and J. Bloch, “Backscattering Suppression in Supersonic 1D Polariton Condensates,” *Phys. Rev. Lett.* **108**, 036405 (2012).
- [84] G. Roumpos, C.-W. Lai, T. C. H. Liew, Y. G. Rubo, A. V. Kavokin, and Yoshihisa Yamamoto, “Signature of the microcavity exciton-polariton relaxation mechanism in the polarization of emitted light,” *Phys. Rev. B* **79**, 195310 (2009).
- [85] J.-M. Ménard, C. Poellmann, M. Porer, U. Leierseder, E. Galopin, A. Lemaître, A. Amo, J. Bloch, and R. Huber, “Revealing the dark side of a bright exciton-polariton condensate,” *Nat. Comm.* **5**, 4648 (2014).
- [86] H. S. Nguyen, D. Vishnevsky, C. Sturm, D. Tanese, D. Solnyshkov, E. Galopin, A. Lemaître, I. Sagnes, A. Amo, G. Malpuech, and J. Bloch, “Realization of a Double Barrier Resonant Tunneling Diode for Cavity Polaritons,” *Phys. Rev. Lett.* **110**, 236601 (2013).
- [87] M. Wouters and I. Carusotto, “Superfluidity and Critical Velocities in Nonequilibrium Bose-Einstein Condensates,” *Phys. Rev. Lett.* **105**, 020602 (2010).
- [88] M. Wouters, “Stability of nonequilibrium polariton superflow in the presence of a cylindrical defect,” *Phys. Rev. B* **84**, 224515 (2011).
- [89] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, “Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor,” *Science* **269**, 5221 (1995).
- [90] R. Huang, F. Tassone, and Y. Yamamoto, “Experimental evidence of stimulated scattering of excitons into microcavity polaritons,” *Phys. Rev. B* **61**, R7854 (2000).
- [91] W. Gasser, E. Heiner, K. Elk, *Greensche Funktionen in Festkörper- und Vielteilchenphysik*, Wiley-VCH (2001).
- [92] H. Haug, T. D. Doan, and D. B. Tran Thoai, “Quantum kinetic derivation of the nonequilibrium Gross-Pitaevskii equation for nonresonant excitation of microcavity polaritons,” *Phys. Rev. B* **89**, 155302 (2014).
- [93] P. Stepnicki and M. Matuszewski, “Tight-Binding model for exciton-polariton condensates in external potentials,” *Phys. Rev. A* **88**, 033626 (2013).
- [94] E. Wertz, A. Amo, D. D. Solnyshkov, L. Ferrier, T. C. H. Liew, D. Sanvitto, P. Senellart, I. Sagnes, A. Lemaître, A. V. Kavokin, G. Malpuech, and J. Bloch, “Propagation and Amplification Dynamics of 1D Polariton Condensates,” *Phys. Rev. Lett.* **109**, 216404 (2012) and Supplement.

- 
- [95] M. Wouters, T. C. H. Liew, and V. Savona, “Energy relaxation in one-dimensional polariton condensates,” *Phys. Rev. B* **82**, 245315 (2010).
- [96] C. Antón, T. C. H. Liew, G. Tosi, M. D. Martín, T. Gao, Z. Hatzopoulos, P. S. Eldridge, P. G. Savvidis, and L. Viña, “Energy relaxation of exciton-polariton condensates in quasi-one dimensional microcavities,” *Phys. Rev. B* **88**, 035313 (2013).
- [97] A. Amo, S. Pigeon, D. Sanvitto, V. G. Sala, R. Hivet, I. Carusotto, F. Pisanello, G. Leménager, R. Houdré, E. Giacobino, C. Ciuti, and A. Bramati, “Polariton Superfluids Reveal Quantum Hydrodynamic Solitons,” *Science* **332**, 1167 (2011).
- [98] Hyatt Gibbs, *Optical Bistability: Controlling Light with Light*, Academic Press (1985).



## Anhang C

# Danksagung

An dieser Stelle danke ich allen, die im Rahmen dieser Arbeit mit mir zusammengearbeitet haben. Ein Dankeschön geht an unsere weltweiten Kollaborationspartner, an **Chris Chan** in Hongkong, an **Samuel Luk**, **Rolf Binder** und **Nai H. Kwong** in Tucson, an **Vincenzo Ardizzone**, **Omblin Lafont**, **Emmanuel Baudin** und **Jerome Tignon** in Paris und an **Dominik Niemietz**, **Johannes Schmutzler**, **Marc Aßmann** und **Manfred Bayer** in Dortmund.

Ich bedanke mich auch bei meinen ehemaligen und jetzigen Mitarbeitern in Paderborn, **Andreas Lücke**, **Christian Hölscher** und **Martin Babilon**.

Insbesondere danke ich meinem Betreuer, **Stefan Schumacher**, für seine intensive Betreuung, seine Unterstützung und Hilfe.

Außerdem danke ich noch herzlichst **Reinold Podzimski**, **Christian Wiebeler** und **Matthias Reichelt** für ihre beratende Unterstützung beim Entstehen dieser Arbeit. Ein Dank geht auch an unsere Sekretärin **Simone Lange**, die ihre Arbeit immer mit vollem Einsatz erfüllte. Desweiteren danke ich meiner Arbeitsgruppe “**Theoretische Optoelektronik und Photonik**” und allen, die ich in meiner Aufzählung vergessen haben sollte.

Ferner danke ich unserer Graduiertenschule **GRK 1464**, dem hiesigen Rechenzentrum **PC<sup>2</sup>** und dem Sonderforschungsbereich **SFB TRR 142**, die diese Arbeit finanziell ermöglicht haben.

Für ihren moralischen Support bedanke ich mich insbesondere bei meiner kleinen Familie, **Daria** und **Dominik Lewandowski**.