Beitrag zur Theorie und Berechnung der hydraulischen Regulatoren für Wasserkraftmaschinen

Schmoll von Eisenwerth, Adolph

Berlin, 1904

Aufstellung der dynamischen Gleichgewichts-Bedingung für die Bewegung des Servomotorkolbens

urn:nbn:de:hbz:466:1-44587

I. Teil.

Aufstellung der dynamischen Gleichgewichtsbedingung für die Bewegung des Servomotorkolbens.

Wir können irgend einen beliebigen Punkt des bewegten Systems (bestehend aus Betriebsflüssigkeit und Reguliergetriebe) der Betrachtung unterwerfen; die in diesem Punkte im Sinne der Bewegung wirkenden Kräfte müssen den der Bewegung entgegenwirkenden Kräften das Gleichgewicht halten.

Der Anschaulichkeit wegen betrachten wir einen Punkt unmittelbar vor der Stelle, an welcher die eigentliche Druckleitung für den Servomotor beginnt. Falls natürliches Gefälle als Betriebskraft vorausgesetzt ist, soll damit die Anschlusstelle der Druckleitung an die Wasserführung zur Turbine (Obergraben, Zuleitungsrohr) gemeint sein, falls künstlich erzeugtes Gefälle in Betracht kommt, soll die Anschlusstelle der Druckleitung an den Windkessel der Pumpe gemeint sein.

1. Unmittelbar vor der Anschlusstelle stehe ein Druck p_o in $^{kg}/_{qcm}$ (Ueberdruck über die Atmosphäre) zur Ueberwindung der Bewegungswiderstände zur Verfügung.

2. Bei etwa vorhandenem Gefälle h (in Metern) zwischen Anschlusstelle und Ausmündung der Leitung wirkt in gleichem Sinne wie p_o noch der Druck

$$p_h = \frac{\gamma \cdot h}{10\,000}$$

(γ = spez. Gewicht der Flüssigkeit in $^{kg}/_{cbm}$).

Dies gilt für doppeltwirkenden Treibkolben. Für einfach wirkenden ist h das Gefälle zwischen Anschlusstelle und Kolbenflächenmitte.

Dem Drucke $p_o + p_h$ entgegen wirken folgende Drucke:

3. p_k herrührend vom Verstellungswiderstande des Regulierapparates;

4. p_w herrührend vom Durchflusswiderstande der ganzen Flüssigkeitsführung von der Anschlusstelle an;

5. p_ρ herrührend von der Stopfbüchsen- und Kolbenreibung am Arbeitszylinder des Servomotors;

6. p_{mf} herrührend von den Massenwiderständen der Flüssigkeit;

7. p_{mg} herrührend von den Massenwiderständen der Getriebeteile.

Wir erhalten somit die *Gleichgewichtsbedingung:*

$$p_o + p_h = p_k + p_w + p_\rho + p_{mf} + p_{mg}\,.$$

Es ist nunmehr die Abhängigkeit der unter 1. bis 7. aufgeführten Drucke von den Grössen: Kolbenweg s, Kolbengeschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt}$ und Kolbenbeschleunigung $i = \frac{dv}{dt}$ festzustellen.

1) p_o.

Bei künstlichem Gefälle (Pumpe in Verbindung mit Windkessel) ist p_o der Druck im Windkessel, kann also bei genügend grossem Windkessel als konstant betrachtet werden.

Bei natürlichem Gefälle können Aenderungen von p_o eintreten, auch wenn der Oberwasserspiegel dieselbe Höhenlage beibehält, sofern die Druckleitung des Servomotors von der Wasserzuführung zur Turbine abzweigt. Denn infolge von Füllungsänderungen der Turbine ändert sich die Geschwindigkeit des Wassers in der Zuführung zur Turbine und es treten dadurch auch Aenderungen des hydraulischen Druckes p_o an der Anschlusstelle der Leitung zum Regulator ein. Da jedoch bei Benutzung eines natürlichen Gefälles dieses selbst beträchtlich gross sein muss, die Geschwindigkeitshöhe in der Rohrleitung zur Turbine dagegen nur einen verhältnismässig kleinen Betrag ausmachen darf, so können die Aenderungen der Geschwindigkeitshöhe und somit auch die Aenderungen von p_o vernachlässigt werden. Aenderungen des Druckes an der Anschlusstelle infolge des Wasserverbrauches des Servomotors selbst können selbstverständlich ohne weiteres unberücksichtigt bleiben.

Wir nehmen daher p_o als *konstant* an.

2) p_h.

Bleibt der Unterwasserspiegel für die Servomotorleitung unverändert, so ist auch p_h *konstant*.

3) p_k.

Es sei K die Kraft, die an der Kolbenstange aufzuwenden ist, um eine Verstellung des Regulierorganes in einem bestimmten Sinne zu erzielen. Dann ist

$$p_k = \frac{K}{\text{Kolbenfläche } F}.$$

K kann in zwei Teile zerlegt werden:

$$K = K_i + K_r.$$

K_i ist an der Kolbenstange aufzuwenden, um bei reibungslos gedachtem Reguliergetriebe den Kräften das Gleichgewicht zu halten, die der Bewegung entgegen gerichtet sind (hydraulische Drücke bei Drehschaufeln, Gewichte bei Schützen usw.).

K_r ist erforderlich, um die Reibung im Reguliergetriebe zu überwinden.

K_i kann sowohl positiv als negativ sein. Bei Regulierung mit Zylinderschütze ist z. B. beim Heben der Schütze K_i aufzuwenden, um dem nicht ausbalancierten Teile des Schützengewichtes das Gleichgewicht zu halten; K_i ist in diesem Falle positiv. Beim Senken der Schütze wirkt dagegen der nicht ausbalancierte Teil als treibende Kraft von der Grösse K_i im Sinne der Bewegung; K_i ist in diesem Falle negativ.

K_r ist selbstverständlich immer positiv.

Die absolute Grösse von K kann somit beim Oeffnen verschieden von der beim Schliessen sein. Daher kann auch p_k beim Oeffnen und Schliessen verschiedene Werte haben, wenn nicht die wirksamen Kolbenflächen entsprechend K für Oeffnen und Schliessen verschieden gross sind. Wenn $K_i > K_r$ ist, kann K und damit p_k negativ ausfallen. Aber auch während der Verstellung des Regulierorganes in *einem* bestimmten Sinne kann die Grösse von p_k sich ändern, z. B. bei drehbaren Leitschaufeln. Hier ändern sich die hydraulischen Drucke auf die Leitschaufelflächen je nach der eingestellten Schaufelweite. Durch geeignete Zwischenglieder mit sich ändernder Uebersetzung zwischen Leitschaufeln und Kolbenstange lässt sich allerdings die Veränderlichkeit von K_i und K_r und somit von p_k in engeren Grenzen halten. Immerhin ist die Abhängigkeit der Grösse p_k von der jeweiligen Stellung des Regulierorganes bezw. vom Kolbenweg s zu beachten.

Diese Abhängigkeit lässt sich bei gegebenen Konstruktionsverhältnissen ohne Schwierigkeit durch eine punktweise ermittelte Kurve veranschaulichen, die beispielsweise als Abszissen die Kolbenwege s, als Ordinaten die Grösse p_k enthält. Eine allgemein gültige mathematische Form für diese Kurve p_k = Funktion (s) lässt sich natürlich nicht angeben. Jedenfalls aber können wir näherungsweise die Funktion durch einen bekannten mathematischen Ausdruck darstellen, wenn die Kurve gezeichnet vorliegt. Für den hier in Betracht kommenden Zweck wird es meist genügen, die Kurve durch eine Gerade zu ersetzen, also p_k durch eine Funktion ersten Grades von s darzustellen, etwa

$$p_k = \pm k_0 \pm k_1 s.$$

Bei höheren Ansprüchen auf Genauigkeit könnte für p_k eine Funktion höheren Grades von s angenommen werden, etwa

$$p_k = \pm k_0 \pm k_1 s \pm k_2 s^2 \pm \ldots \pm k_v s^v.$$

Für die weitere Behandlung ist der Grad der Funktion beliebig, nur muss diese rational und ganz sein.

4) p_w.

Es sei w die gesamte Druckhöhe in m Flüssigkeitssäule, die erforderlich ist, um die Flüssigkeit bei einer bestimmten Kolbengeschwindigkeit v durch die Leitung zu führen. Dann ist der entsprechende Druck in kg/qcm:

$$p_w = \frac{w \cdot \gamma}{10\,000}.$$

w setzt sich aus folgenden Teilen zusammen:

w_1 = Geschwindigkeitshöhe,

w_2 = Widerstandshöhe für Reibung in der geradlinig gedachten Leitung,

w_3 = Widerstandshöhe für Richtungsänderungen der Leitungsachse (Kniee, Krümmer usw.),

w_4 = Widerstandshöhe für Querschnittsänderungen der Leitung.

Die Widerstandshöhen w_1, w_2, w_3, w_4 lassen sich als Vielfache von $\frac{v^2}{2g}$ darstellen; es ist also

$$w_1 = \zeta_1 \cdot \frac{v^2}{2g},$$

$$w_2 = \zeta_2 \cdot \frac{v^2}{2g},$$

$$w_3 = \zeta_3 \cdot \frac{v^2}{2g},$$

$$w_4 = \zeta_4 \cdot \frac{v^2}{2g},$$

wobei die ζ Koeffizienten sind, die sich bei gegebenen Durchflussverhältnissen nach den bekannten Formeln der Hydraulik berechnen lassen. Aus diesen Formeln ergibt sich, dass ζ_1 konstant ist und dass auch die Koeffizienten für die Richtungs- und Querschnittsänderungen, ζ_3 und ζ_4, als unabhängig von der Geschwindigkeit v angesehen werden dürfen; dagegen nimmt ζ_2 (Koeffizient der Reibung in der geradlinig gedachten Leitung) nach *Weisbach, Weston, Lang* u. a. mit kleiner werdender Geschwindigkeit stark zu. Die von *Darcy*, *Dupuit* u. a. angegebenen Koeffizienten, die diese Abhängigkeit nicht aufweisen, gelten nur innerhalb engerer Grenzen der Geschwindigkeit. Bei den hier zu untersuchenden Bewegungserscheinungen ändern sich aber die Geschwindigkeiten von Null bis zu einer maximalen Grösse und zwar treten die grössten Geschwindigkeitsänderungen offenbar bei Beginn der Bewegung auf, also bei verhältnismässig kleinen Werten der Geschwindigkeit. Da nun ζ_2 gerade bei den kleinen Geschwindigkeiten stark veränderlich ist, so werden wir zunächst auf diese Veränderlichkeit Rücksicht nehmen müssen, behalten uns aber zweckmässige Vereinfachungen an geeigneter Stelle vor. Da über andere Betriebsflüssigkeiten als Wasser keine Werte der ζ_2 bekannt sind, so ist im folgenden die für Wasser aufgestellte Form der Beziehungen zwischen ζ_2 und v benützt. Diese Form wird voraussichtlich auch für die bei Regulatoren angewandten Oele gelten, da hierfür nur dünnflüssige Mineralöle in Frage kommen.

Nach *Lang* und *Weisbach* lässt sich ζ_2 durch folgende Formel darstellen:

$$\zeta_2 = \zeta_{2\alpha} + \frac{\zeta_{2\beta}}{\sqrt{v}},$$

wobei $\zeta_{2\alpha}$ und $\zeta_{2\beta}$ von der Länge der Leitungsstrecke, den Querschnittsverhältnissen und der Beschaffenheit der Rohrwandungen abhängen.

Es ist also

$$w_2 = \left(\zeta_{2\alpha} + \frac{\zeta_{2\beta}}{\sqrt{v}}\right)\frac{v^2}{2g}$$

$$= \zeta_{2\alpha}\frac{v^2}{2g} + \zeta_{2\beta}\frac{v^{\frac{3}{2}}}{2g}.$$

Somit ist

$$w = \frac{v}{2g}(\zeta_1 + \zeta_{2\alpha} + \zeta_3 + \zeta_4) + \frac{v^{\frac{3}{2}}}{2g} \cdot \zeta_{2\beta}$$

und schliesslich

$$p_w = \frac{v^2\,\gamma}{2g \cdot 10\,000}(\zeta_1 + \zeta_{2\alpha} + \zeta_3 + \zeta_4) + \frac{v^{\frac{3}{2}} \cdot \gamma}{2g \cdot 10\,000} \cdot \zeta_{2\beta}$$

5) p_ρ.

Die Kolben- und Stopfbüchsenreibung hängt von den Ueberdrücken der abzudichtenden Räume ab. Im Ruhezustande wird die Anpressung der Liderungen durch die konstanten statischen Ueberdrücke bewirkt; zur Ueberwindung des hierbei auftretenden Reibungsbetrages sei ein Druck $p_{\rho\,0}$ erforderlich. Bei der Bewegung des Kolbens werden die Drücke in den Räumen hinter dem Kolben vermindert, entsprechend den Durchflusswiderständen der Flüssigkeit in der Leitung bis zu der betreffenden Dichtungsstelle; die Drücke vor dem Kolben werden vermehrt, entsprechend dem Durchflusswiderstande von der betreffenden Stelle an bis zum Ende der Leitung. Nach 4) sind nun die Durchflusswiderstände proportional v^2 und $v^{\frac{3}{2}}$; mithin kommt bei der Bewegung des Kolbens zu dem (konstanten) Druck $p_{\rho\,0}$ noch ein Betrag hinzu von der Form

$$\pm \rho_1 v^2 \pm \rho_2 v^{\frac{3}{2}}.$$

Man erhält demgemäss

$$p_\rho = p_{\rho\,0} \pm \rho_1 v^2 \pm \rho_2 v^{\frac{3}{2}}.$$

6) p_{mf}.

Es handelt sich hier nur um die Massenwiderstände der Flüssigkeit, die bei Aenderungen der Kolbengeschwindigkeit auftreten. (Die Massenwiderstände, die infolge des Durchganges der Flüssigkeitsmassen durch veränderliche Querschnitte bei einer bestimmten Kolbengeschwindigkeit auftreten, sind bereits unter 4) behandelt worden.)

Es sei f_x in qcm der Querschnitt eines Stückes der Leitung von der Länge l_x in m, so ist die Masse der Flüssigkeit in diesem Stücke

$$m_x = \frac{f_x \cdot l_x \cdot \gamma}{g \cdot 10000}.$$

Bei einer Geschwindigkeit v des Kolbens ist die Geschwindigkeit dieser Flüssigkeitsmasse

$$v_x = v \cdot \frac{F}{f_x}.$$

Aendert sich die Kolbengeschwindigkeit um einen bestimmten Betrag, so ändert sich die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsmasse in derselben Zeit um den $\frac{F}{f_x}$ fachen Betrag, d. h. die Beschleunigung i_x der Flüssigkeitsmasse ist gleich $\frac{F}{f_x}$ mal der Kolbenbeschleunigung $i = \frac{dv}{dt}$, also

$$i_x = \frac{F}{f_x} \cdot \frac{dv}{dt}.$$

Um nur der Flüssigkeitsmasse m_x die Beschleunigung i_x zu erteilen, ist eine Kraft

$$m_x \cdot i_x = \frac{f_x l_x \cdot \gamma}{g \cdot 10000} \cdot \frac{F}{f_x} \cdot \frac{dv}{dt}$$

erforderlich.

Pro Flächeneinheit des Querschnittes f_x ist daher erforderlich der Druck:

$$\frac{f_x l_x \gamma}{g \cdot 10000} \cdot \frac{F}{f_x} \cdot \frac{dv}{dt} \cdot \frac{1}{f_x} = \frac{l_x \cdot \gamma \cdot F}{g \cdot 10000 \cdot f_x} \cdot \frac{dv}{dt}.$$

Die gesamte Flüssigkeitsmasse der Leitung besteht nun aus einzelnen Massenteilchen m_x mit verschieden grossen f_x und l_x. Zur Beschleunigung der gesamten Flüssigkeitsmasse ist daher ein Druck p_{mf} erforderlich, der gleich der Summe der einzelnen Drucke

$$\frac{l_x \cdot \gamma \cdot F}{g \cdot 10000 f_x} \cdot \frac{dv}{dt}$$

ist, also

$$p_{mf} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{\gamma \cdot F}{g \cdot 10000} \cdot \Sigma \frac{l_x}{f_x}.$$

7) p_{mg}.

Ein Massenteilchen m_y des Getriebes habe bei der Bewegung des Kolbens eine Beschleunigung i_y. Die Kraft, die erforderlich ist, um der Masse m_y die Beschleunigung i_y zu erteilen, ist $m_y \,.\, i_y$. Liegt zwischen dem Massenteilchen und dem Kolben ein Zwischenmechanismus mit dem Uebersetzungsverhältnis ψ_y, so ist am Kolben eine ψ_y-mal so grosse Kraft aufzuwenden, also $\psi_y \,.\, m_y \,.\, i_y$. Um den gesamten Massen ihre jeweiligen Beschleunigungen zu erteilen, ist daher am Kolben aufzuwenden die Kraft

$$\Sigma\, \psi_y \,.\, m_y \,.\, i_y \,.$$

Der hierzu erforderliche Druck ist somit

$$p_{mg} = \frac{\Sigma\, \psi_y \,.\, m_y \,.\, i_y}{F}.$$

Anmerkung. Bei manchen Getriebeteilen, z. B. bei den drehbaren Leitschaufeln, ist ψ_y nicht konstant, sondern ändert sich mit dem Kolbenwege s. In diesem Falle kommt zu dem eben betrachteten Massenwiderstande noch ein Betrag hinzu, der von den Aenderungen der Geschwindigkeiten infolge des wechselnden Uebersetzungsverhältnisses herrührt. Ist v_y die Geschwindigkeit des Massenteilchens m_y, so ist

$$v_y = \psi_y \,.\, v.$$

Aendert sich nun während der Zeit dt das Uebersetzungsverhältnis um $d\psi_y$, so ist die dadurch hervorgerufene Geschwindigkeitsänderung des Massenteilchens gleich $d\psi_y \cdot v$, also die entsprechende Beschleunigung:

$$i_y = v \,.\, \frac{d\psi_y}{dt} = v \,.\, \frac{d\psi_y}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v^2 \,.\, \frac{d\psi_y}{ds}.$$

Bleibt ψ_y während des Kolbenhubes konstant, so entspricht immer einer Aenderung der Kolbengeschwindigkeit eine ψ_y-mal so grosse des Massenteilchens m_y, es ist also dann

$$i_y = \psi_y \cdot i = \psi_y \cdot \frac{dv}{dt};$$

mithin ist

$$p_{mg} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{\Sigma\ m_y\ \psi_y{}^2}{F}.$$

Die Ausdrücke 1) bis 7) sind nun in die dynamische Gleichgewichtsbedingung (s. S. 7 u. 8) einzusetzen. Demnach ist die Gleichung zu bilden:

$$1) + 2) = \Sigma\ 3) \text{ bis } 7)$$

oder

$$1) + 2) - \Sigma\ 3) \text{ bis } 7) = 0.$$

Die zu dieser Beschleunigung von m_y erforderliche Kraft ist $m_y \cdot v^2 \cdot \frac{d\,\psi_y}{ds}$; am Kolben ist die ψ_y-fache Kraft nötig, also $m_y \cdot v^2 \cdot \frac{d\,\psi_y}{ds} \cdot \psi_y$; der zugehörige Druck ist somit gleich

$$\frac{m_y \cdot v^2 \cdot \frac{d\,\psi_y}{ds} \cdot \psi_y}{F},$$

und der erforderliche Druck für die Beschleunigung der Gesamtmasse:

$$\frac{v^2}{F} \cdot \Sigma\ m_y \cdot \frac{d\,\psi_y}{ds} \cdot \psi_y.$$

Dieser Betrag kommt für die Teile mit veränderlichem ψ_y noch zu dem Betrage:

$$\frac{dv}{dt} \cdot \frac{\Sigma\ m_y \cdot \psi_y{}^2}{F} \text{ (s. o.)}$$

hinzu.

Bei den Massenteilen mit stark veränderlichem ψ_y ist aber bei den gebräuchlichen Konstruktionen auch der maximale Betrag von ψ_y znmeist so klein, dass der Massenwiderstand dieser Teile den übrigen Widerständen gegenüber vernachlässigt werden kann.

In dieser letzten Gruppierung stellen sich die Ausdrücke 1) bis 7) wie folgt dar:

$$+\begin{cases} 1)\ p_o \\ 2)\ p_h \end{cases}$$

$$-\begin{cases} 3)\ \pm k_o \pm k_1\ s \pm k_2\ s^2 \ldots \pm k_\nu\, s^\nu \\ 4)\ \dfrac{v^2 \cdot \gamma}{2g \cdot 10000}\left(\zeta_1 + \zeta_{2_\alpha} + \zeta_3 + \zeta_4\right) \\ \qquad\qquad + \dfrac{v^{\frac{3}{2}} \cdot \gamma}{2g \cdot 10000} \cdot \zeta_{2\beta} \\ 5)\ p_{\rho o} \pm \rho_1 \cdot v^2 \pm \rho_2 \cdot v^{\frac{3}{2}} \\ 6)\ \dfrac{dv}{dt} \cdot \dfrac{\gamma \cdot F}{g \cdot 10000} \cdot \Sigma \dfrac{l_x}{f_x} \\ 7)\ \dfrac{dv}{dt} \cdot \dfrac{\Sigma\ m_y \cdot \psi_y{}^2}{F} \end{cases}$$

$$= 0.$$

Sämtliche Koeffizienten von s, v, $\frac{dv}{dt}$ und von Potenzen dieser Grössen lassen sich aus den Konstruktionsverhältnissen der Turbine und des Servomotors ermitteln und sind daher als bekannt zu betrachten. Näheres über deren Ausrechnung siehe weiter unten im Abschnitte: „Zahlenbeispiel".

Wir ordnen nun die Glieder obiger Gleichung nach Potenzen von $\frac{dv}{dt}$, v und s und führen die beigefügten Abkürzungen ein:

$$-\frac{dv}{dt}\left[\frac{\gamma \cdot F}{g \cdot 10000}\ \Sigma \frac{l_x}{f_x} + \frac{\Sigma\ m_y \cdot \psi_y{}^2}{F}\right] \equiv -\frac{dv}{dt} \cdot \mathfrak{M}$$

$$-v^2\left[\frac{\gamma}{2\,g\ 10000}\left(\zeta_1 + \zeta_{2_\alpha} + \zeta_3 + \zeta_4\right) \pm \rho_1\right] \equiv -v^2 \cdot A$$

$$-v^{\frac{3}{2}}\left[\frac{\gamma}{2\,g\ 10000} \cdot \zeta_{2\beta} \pm \rho_2\right] \equiv -v^{\frac{3}{2}} \cdot B$$

$$
\begin{array}{ll}
+ p_0 + p_h - (\pm k_0 + p_{\rho 0}) & = \pm C_0 \\
\mp k_1 s & = \pm C_1 s \\
\mp k_2 s^2 & = \pm C_2 s^2 \\
\text{usw.} & \\
\mp k_v s^v & = \pm C_v s^v \\
= 0 & = 0
\end{array}
$$

also:

$$
-\frac{dv}{dt}\mathfrak{M} - v^2 A - v^{\frac{3}{2}} B \pm C_0 \pm C_1 s \pm C_2 s^2 \ldots \pm C_v s^v = 0.
$$

Der Koeffizient von $\frac{dv}{dt}$, $\mathfrak{M}$, stellt die gesamte zu beschleunigende Masse für den qcm Kolbenfläche dar. (Reduzierte Masse.) Dividieren wir durch $\mathfrak{M}$ und setzen wir zur Abkürzung für die durch $\mathfrak{M}$ dividierten Koeffizienten $A, B, C_0 \ldots\ldots\ldots C_v$, die entsprechenden kleinen Buchstaben $a, b, c_0 \ldots\ldots c_v$ ein, so ergibt sich:

$$
-\frac{dv}{dt} - v^2 a - v^{\frac{3}{2}} b \pm c_0 \pm c_1 s \pm c_2 s^2 \ldots \pm c_v s^v = 0.
$$

Dies ist die Differentialgleichung der Kolbenbewegung des Servomotors für den allgemeinen Fall, dass der Verstellwiderstand eine Funktion (v-ten Grades) des Kolbenweges ist.

Ehe wir die Lösung für diesen allgemeinen Fall geben, wollen wir zunächst den besonderen, einfacheren, betrachten, dass der Verstellwiderstand konstant ist.

Untersuchung der Kolbenbewegung des Servomotors für konstante Verstellkraft des Leitapparates.

In diesem Falle ist K und somit auch p_k vom Kolbenweg s unabhängig, $p_k = \pm k_0$.

Es fallen also in obiger Gleichung die Glieder mit s fort und wir erhalten:

$$
\frac{dv}{dt} = \pm c_0 - (v^2 a + v^{\frac{3}{2}} b).
$$