Beitrag zur Theorie und Berechnung der hydraulischen Regulatoren für Wasserkraftmaschinen

Schmoll von Eisenwerth, Adolph

Berlin, 1904

Untersuchung der Kolbenbewegung des Servomotors für veränderliche Verstellkraft des Leitapparates

urn:nbn:de:hbz:466:1-44587

II. Teil.

Untersuchung der Kolbenbewegung des Servomotors für veränderliche Verstellkraft des Leitapparates.

Die Bewegungsgleichung für diesen Fall lautet nach S. 17

$$-\frac{dv}{dt} - v^2 a - v^{\frac{3}{2}} b \pm c_0 \pm c_1 s \pm c_2 s^2 \ldots . \pm c_\nu s^\nu = 0.$$

Wir haben gesehen, dass im besonderen Falle ($p_k = k_0 =$ konst.) das Glied $v^{\frac{3}{2}} b = v^2 \frac{b}{\sqrt{v}}$ näherungsweise durch $v^2 \cdot \frac{b}{\sqrt{v_{max}}}$ ersetzt werden durfte, so dass an die Stelle von $- v^2 a - v^{\frac{3}{2}} b$ ein Glied $- v^2 a'$ trat, also die $\frac{3}{2}$te Potenz von v verschwand (S. 27). Es fragt sich nun, ob eine solche Vereinfachung auch im vorliegenden Falle statthaft ist.

Auch hier wird beim Ingangsetzen des Treibkolbens dessen Geschwindigkeit von Null aus bei zunächst noch kleinen Wegen s rasch anwachsen. Ist p_k nicht aussergewöhnlich stark vom Wege s abhängig, so wird daher während der starken Geschwindigkeitssteigerung am Anfang der Bewegung der Druck p_k sich noch nicht viel geändert haben; es gilt daher für den Anfang der Bewegung hinsichtlich des Einflusses von $v^{\frac{3}{2}} \cdot b$ dasselbe wie im Falle $p_k =$ konst.

Bei den nunmehr erreichten grösseren Geschwindigkeiten findet eine raschere Zunahme des zurückgelegten Kolbenweges statt und es machen sich die Aenderungen von p_k deutlicher geltend. Wächst mit zunehmendem Kolbenweg der Widerstandsdruck p_k, so nimmt die Kolbengeschwindigkeit v allmählich wieder ab. Das Maximum von v ist in diesem Falle etwas kleiner als diejenige Geschwindigkeit $v_{0\,max}$, die bei konstanter Wirkung der Anfangsgrösse von p_k ($= p_k$ für $s = 0$) im Maximum eintreten könnte. Wird dagegen mit zunehmendem Kolbenweg der Widerstandsdruck p_k kleiner, so nimmt die Kolbengeschwindigkeit v weiter zu und kann $v_{o max}$ überschreiten. Diese Geschwindigkeitsänderungen im weiteren Verlaufe der Kolbenbewegung liegen nun bei brauchbaren Konstruktionen innerhalb gewisser Grenzen. Jedenfalls darf v nicht unter einen bestimmten Betrag sinken, da sonst die Regulierung ungünstig (mit grosser Schlusszeit) arbeitet. Im allgemeinen wird die Kolbengeschwindigkeit in den Gebieten der grösseren Geschwindigkeiten bleiben, in denen die Aenderungen des Gliedes $\frac{b}{\sqrt{v}}$ gegenüber dem Werte $\frac{b}{\sqrt{v_{o\,max}}}$ nicht mehr von grossem Einfluss sind.

Wir werden daher auch hier, ohne grosse Fehler zu begehen, statt des veränderlichen $\frac{b}{\sqrt{v}}$ das konstante $\frac{b}{\sqrt{v_{o\,max}}}$ setzen dürfen, d. h. an Stelle von

$$- v^2 a - v^{\frac{3}{2}} b$$

setzen wir

$$- v^2 a',$$

wobei

$$a' = a + \frac{b}{\sqrt{v_{o\,max}}}$$

ist, und $v_{o\,max}$ aus der Gleichung folgt:

$$a\, v_{o\,max}^{\;2} + b\, v_{o\,max}^{\;\frac{3}{2}} = c_o\,.$$

Mit dieser Vereinfachung lautet jetzt die Bewegungsgleichung:

$$-\frac{dv}{dt} - v^2 a' \pm c_o \pm c_1 s \pm c_2 s^2 \pm \ldots\ldots$$

$$\pm c_v s^v = 0.$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$\pm c_o \pm c_1 s \pm c_2 s^2 \pm \ldots \pm c_v s^v = \Phi(s),$$

so ist:

$$-\frac{dv}{dt} - v^2 a' + \Phi(s) = 0.$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet (*Forsyth-Maser*, Lehrbuch der Differentialgleichungen (1889) 4. Kap. § 67):

$$v = \sqrt{\frac{\Phi(s) - \left[\frac{\Phi'(s)}{2a'} + \frac{\Phi''(s)}{(2a')^2} + \frac{\Phi'''(s)}{(2a')^3}\right.}{a'}}$$

$$\sqrt{\left. + \ldots \frac{\Phi^v(s)}{(2a')^v}\right] - \frac{C}{e^{2a's}}};$$

dabei bedeutet:

$$\Phi'(s) \ldots \frac{d\,\Phi(s)}{ds},$$

$$\Phi''(s) \ldots \frac{d^2\,\Phi(s)}{ds^2},$$

$$\Phi^v(s) \ldots \frac{d^v\,\Phi(s)}{ds^v},$$

e = Basis der natürlichen Logarithmen.

C ergibt sich aus dem Anfangszustand:

Für $s = 0$ soll sein $v = 0$, also ist

$$C = \Phi(s=0) - \left[\frac{\Phi'(s=0)}{2a'} + \frac{\Phi''(s=0)}{(2a')^2} + \frac{\Phi'''(s=0)}{(2a')^3} + \ldots \frac{\Phi^v(s=0)}{(2a')^v}\right].$$

Aendert sich der Verstellungswiderstand beispielsweise nach einer Geraden derart, dass er mit zunehmendem Weg s grösser wird, so ist

$$\Phi(s) = c_0 - c_1 s,$$

also

$$\Phi'(s) = -c_1,$$

$$\Phi''(s) \text{ usw. bis } \Phi^v(s) = 0.$$

Also:

$$C = c_0 + \frac{c_1}{2a'}$$

und

$$v = \sqrt{\frac{c_0 - c_1 s - \left(\frac{-c_1}{2a'}\right) - \frac{c_0 + \frac{c_1}{2a'}}{e^{2a's}}}{a'}},$$

$$= \frac{1}{a'} \sqrt{\frac{(2a'\,c_0 + c_1)\left(1 - \frac{1}{e^{2a's}}\right) - 2a'c_1 s}{2}}.$$

Mit wachsendem s wächst $e^{2a's}$ rasch, also nimmt $(2a'\,c_0 + c_1)\left(1 - \frac{1}{e^{2a's}}\right)$ vom Werte Null aus rasch zu; dagegen wächst $2a'\,c_1\,s$ langsamer. Daraus folgt, dass v in diesem Falle zunächst rasch zunimmt, ein Maximum erreicht und dann allmählich abnimmt (vergl. die graphische Darstellung Fig. 16)

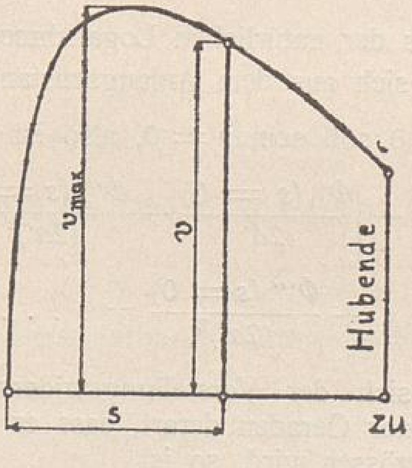

Fig. 16.

Die Lösung $v = \sqrt{\Phi(s)}$ usw. liefert die Kolbengeschwindigkeit v als Funktion des Weges s.

Der Zusammenhang zwischen Weg und Zeit ergibt sich dann mit Hilfe der Beziehung:

$$v = \frac{ds}{dt};\; dt = \frac{1}{v}\,.\,ds.$$

Zeichnen wir mit Benützung der Lösung $v = \sqrt{\Phi(s)}$ usw. eine Kurve:

$$\frac{1}{v} = \text{Funktion } (s),$$

indem wir z. B. die Wege s als Abszissen, die reziproken Werte der zugehörigen Geschwindigkeiten v als Ordinaten auftragen, so stellt das Flächenelement zwischen

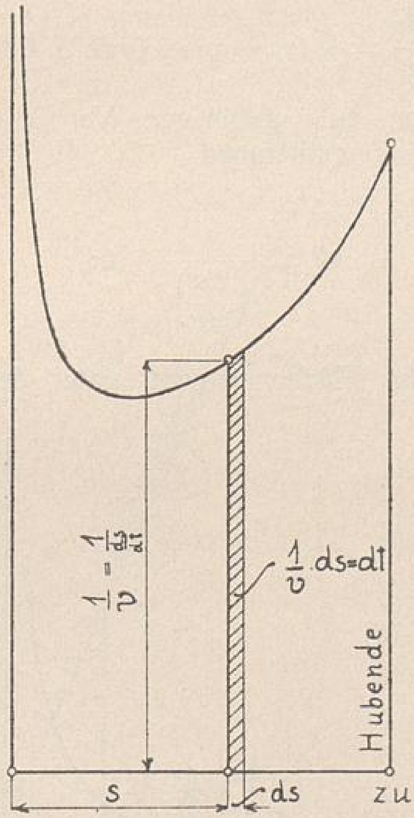

Fig. 17.

zwei um ds entfernten Ordinaten die Zeit dt dar, die für die Zurücklegung des Weges ds erforderlich ist. (Fig. 17). Die Fläche zwischen den zu s_1 und s_2 zugehörigen Ordinaten $\frac{1}{v_1}$ und $\frac{1}{v_2}$ stellt folglich die Zeit dar, die zur Zurücklegung des Weges $s_2 - s_1$ erforderlich ist.

Wir brauchen nun die Zeiten vom Anfang der Bewegung an, also von $s = 0$ an. Dabei ergibt sich die Schwierigkeit, dass die zu $s = 0$ zugehörige Anfangskoordinate $\frac{1}{v}$ unendlich ist, da ja für $s = 0$ auch $v = 0$ ist. Diese Schwierigkeit lässt sich folgendermaassen umgehen:

Wir bestimmen für den Bewegungsanfang die Beschleunigungen $i = \frac{dv}{dt}$ als Funktion von v aus der ursprünglichen Gleichung

$$\frac{dv}{dt} = \Phi(s) - v^2 a' \text{ (vgl. S. 68),}$$

wobei wir den zu v gehörigen Wert s aus der Kurve $v =$ Funktion (s) entnehmen.

Nun ist

$$dt = \frac{1}{\left(\frac{dv}{dt}\right)} \cdot dv,$$

mithin stellt das Flächenelement unter der neuen Kurve

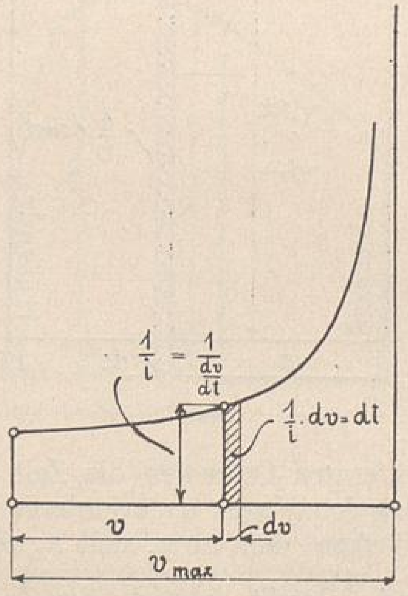

Fig. 18.

$\frac{1}{\left(\frac{dv}{dt}\right)} =$ Funktion (v), begrenzt von zwei um dv entfernten Ordinaten, die Zeit dt dar, während welcher die Geschwindigkeit um dv gewachsen ist. Die Fläche von $v = 0$ an bis $v = v$ stellt die Zeit t dar, die von Anfang der Bewegung bis zur Erreichung der Geschwindigkeit v verstrichen ist. Fig. 18. Da nun die zu den Geschwindigkeiten v zugehörigen Werte s aus der

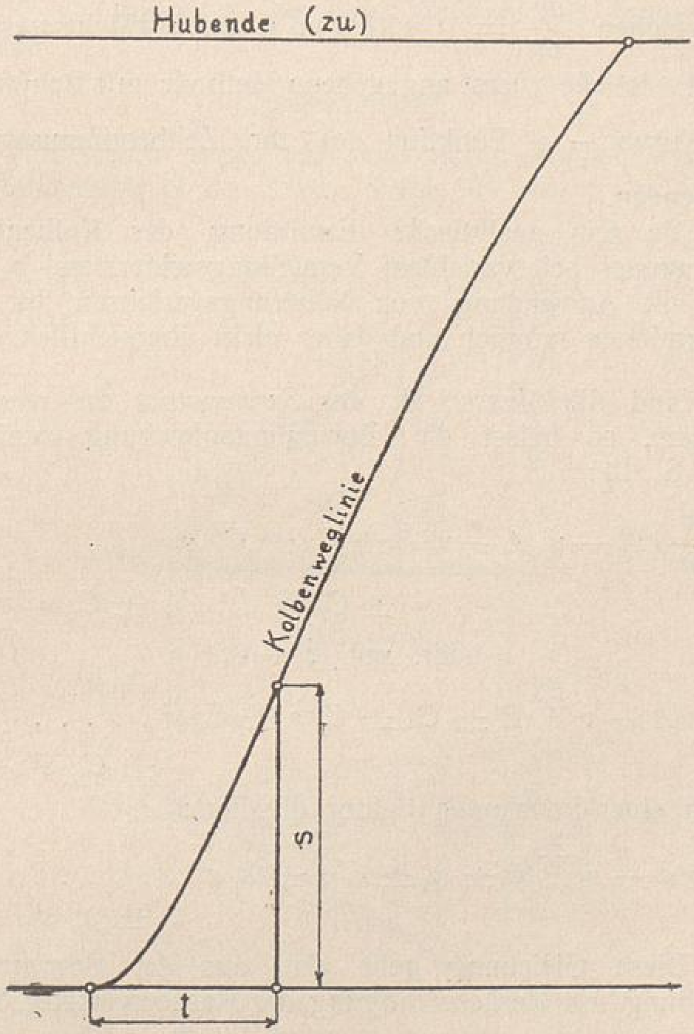

Fig. 19.

Kurve $v =$ Funktion (s) bekannt sind, so sind wir auch imstande, die Zeiten t zu bestimmen, die zum Zurücklegen der Wege s erforderlich sind. Die Zusammenstellung dieser Wertepaare s und t in rechtwinkligen Koordinaten gibt das gesuchte Kolbenwegdiagramm $s =$ Funktion (t), Fig. 19. Die Anfangskoordinaten der hier zur Zeitbestimmung benutzten Kurve $\frac{1}{\left(\frac{dv}{dt}\right)}$ = Funktion (v) liegen im Endlichen, so dass diese Methode für die Verfolgung des Bewegungs*anfanges* zu verwenden ist.

Für den Teil des Bewegungsvorganges dagegen, für welchen $\frac{dv}{dt} = 0$ wird (wo v einen Höchtswert erreicht), ist die zuerst angegebene Methode mit Benützung der Kurve $\frac{1}{v}$ = Funktion (s) zur Zeitbestimmung zu verwenden.

Die rein analytische Ermittlung des Kolbenwegdiagrammes bei variablem Verstellungswiderstand p_k ist nur mit Anwendung von Näherungsverfahren für die Integrationen möglich und daher nicht übersichtlich.

Sind die *Massen* $\mathfrak{M}$ *des Servomotors zu vernachlässigen*, so heisst die Bewegungsgleichung zunächst nach S. 17:

$$-\frac{dv}{dt}\mathfrak{M} - v^2 A - v^{\frac{3}{2}} B \pm C_0 \pm C_1 s$$
$$\pm C_2 s^2 \; . \; . \; . \; . \pm C_\nu s^\nu = 0,$$

oder, mit $\mathfrak{M} = 0$:

$$-v^2 A - v^{\frac{3}{2}} B \pm C_0 \pm C_1 s \pm C_2 s^2 \; . \; . \; . \; . \; .$$
$$\pm C_\nu s^\nu = 0;$$

durch einen konstanten Faktor dividiert:

$$-v^2 a - v^{\frac{3}{2}} b \pm c_0 \pm c_1 s \pm c_2 s^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$
$$\pm c_\nu s^\nu = 0.$$

Diese Gleichung geht also aus der Bewegungsgleichung mit Berücksichtigung der Massenwirkung, S. 17 oder 67, hervor, wenn das Glied $-\frac{dv}{dt}$ gleich 0 gesetzt wird.

Es folgt daher nach S. 68:

$$-v^2 a' + \Phi(s) = 0,$$

$$v = \sqrt{\frac{\Phi(s)}{a'}}.$$

Die weitere Behandlung zur Ermittlung der Zeit bleibt wie vorher, d. h. man zeichnet die Kurve $\frac{1}{v}$ als Funktion von s; das Flächenstück unter der Kurve von $s = s_1$ bis $s = s_2$ gibt die Zeit t, die zur Zurücklegung des Weges $s_2 - s_1$ erforderlich ist. Da stets $v > 0$ sein muss, so ist diese Methode hier immer anwendbar.

Zahlenbeispiel.

Wir setzen denselben Servomotor voraus wie für das Zahlenbeispiel des ersten Teiles (S. 30).

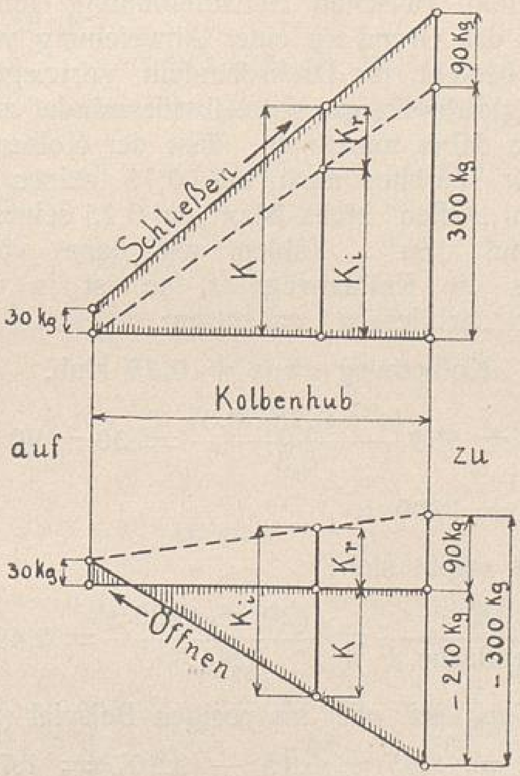

Fig. 20.

Die aufzuwendende Verstellkraft K sei linear abhängig von den Kolbenwegen, und zwar sei

für offene Schaufeln : $K_i = 0$ kg; $K_r = 30$ kg;
für geschlossene Schaufeln: $K_i = 300$ kg; $K_r = 90$ kg.

Für die Schliessbewegung gilt also (vergl. Fig. 20):