Universitätsbibliothek Paderborn

Euklids Data

Euclides

Stuttgart, 1780

Gedanken über die Analysis.

urn:nbn:de:hbz:466:1-48509

Visual Library

Gedanken über die Analysis.

§. 1.

Um von dem Satz A auf den Satz E zu kommen, muß ich oft die Sätze B, C, D durchdenken: es kann nämlich geschehen, daß in meinem Ideen-System A mich nicht unmittelbar auf E, sondern auf B, B auf C, C auf D, D auf E führt, und daß ich nur durch diese Mittelsätze von A auf E kommen kann.

Entwiklung des Begrifs Analysis.

§. 2.

Wie ich mit A anfangen, und vermittelst B, C, D auf E kommen kann; so kann ich auch mit E anfangen, und forschen, woraus E unmittelbar folgt: und wenn ich so den Satz D gefun-

gefunden habe, weiter forschen, woraus D unmittelbar folgt, und so den Satz C finden: und dieses Forschen kann ich so weit treiben, bis ich auf A gekommen bin. In beyden Fällen werde ich die Verknüpfung (oder den Widerspruch) der Sätze A und E gefunden haben. Diese Erforschung der wechselseitigen Beziehung oder Abhängigkeit zweyer Sätze oder zweyer Begriffe, durch Mittelsätze oder Mittelbegriffe, wird die Analysis genannt.

§. 3.

In wie fern die logische Bedeutung des Wortes mit der etymologischen überein=kömmt.

In so fern A einfacher ist als E, kömmt die Benennung eigentlich dem zweyten Verfahren zu; denn da wird E in A aufgelöst. Man kann aber, insonderheit in der Geometrie, den Satz E als schon eingewickelt in dem Satz A, ansehen, folglich läßt sich auch das erste Verfahren eine Analysis nennen. In dem Begrif eines rechtwinklichten Dreyeks, und den auf seinen Seiten beschriebenen Quadraten, liegt schon der Satz, daß das Quadrat der größern Seite den beyden Quadraten der kleinern Seiten gleich ist, und wird durch die Erforschung der Mittelsätze gleichsam nur herausgewickelt.

§. 4.

Es erhellt, daß die Analysis bey Lehrsätzen so wohl als bey Aufgaben Statt findet. Bey einem Lehrsatz sagt man mir, was zwischen A und E für eine Beziehung ist, und ich soll die Mittelbegriffe finden, woraus dieselbe deutlich eingesehen wird. Bey dem Lehrsatz: die drey Winkel eines Dreyeks machen zusammen zween Rechte, muß ich die Mittelsätze finden: wenn zwo Parallel-Linien von einer geraden Linie geschnitten werden, so sind die Wechselswinkel einander gleich: und, Nebenwinkel sind zween Rechten gleich: denn aus der schiklichen Verbindung dieser Sätze mit dem, was vorausgesezt wird, erhellt die Gleichheit der drey Winkel mit zween Rechten. Die Analysis findet bey Lehrsätzen,

§. 5.

Bey einer Aufgabe kommt es gleicherweise darauf an, einen Begrif aus dem andern herzuleiten. Bey der Aufgabe: von einem gegebenen Punct an einen Kreis eine Tangente zu ziehen, soll ich aus der Größe des Kreises und seiner Lage gegen den gegebenen Punct die Tangente bestimmeu; folglich muß ich auch hier die Mittelbegriffe erforschen, wodurch ich auf und bey Aufgaben Statt.

die

die Tangente geführt werde, das ist, ich muß analysiren.

§. 6.

Etwas von der Analysis der Lehrsätze.

Da meine Absicht hier nicht ist, von der Analysis der Lehrsätze zu handeln; so will ich nur eine Anmerkung darüber machen. Man weiß, daß bey dem Beweise eines Lehrsatzes gemeiniglich das schwehrste ist, die Vorbereitungs-Linien zu ziehen, worauf zum Theil die Erfindung der Mittelbegriffe beruht. Diese Linien werden oft durch das zweyte Verfahren (§. 2.) besser gefunden als durch das erste. So kann ich, wenn ich über den Beweis des Pythagorischen Lehrsatzes nachdenke, mich gleich anfangs fragen: woraus fließt die Gleichheit des Quadrates der Hypothenuse mit den beyden Quadraten der zwo übrigen Seiten? — offenbar daraus, daß ein Theil des Quadrates der Hypothenuse dem Quadrate der einen Seite, und der andere Theil dem Quadrate der andern Seite gleich ist. Hieraus folgt, daß ich das Quadrat der Hypothenuse theilen muß, und weil ich es mit Quadraten, mithin mit Parallelogrammen zu thun habe, so ist der nächste Gedanke, daß ich das Quadrat der Hypothenuse in Parallelogramme theile. Da ich aber leicht voraussehen kann, daß ich durch eine auf gerathe wohl gemachte

gemachte Theilung nichts herausbringen werde, so kann ich durch diese Betrachtung darauf kommen, von dem rechten Winkel des Dreyeks, wo ein merkwürdiger Punct ist, die bekannte Parallel-Linie zu ziehen, auf welcher die Erfindung der übrigen Mittelbegriffe beruht. Eben so kann ich bey dem 32sten S. 1. B. Elem. folgendermaassen analysiren: Soll der äussere Winkel eines Dreyeks den beyden innern entgegengesezten gleich seyn, so muß ein Theil desselben dem einen innern, der andere Theil dem andern innern gleich seyn; ich muß also den äussern Winkel in zween Theile theilen, und weil es hier auf die Gleichheit der Winkel ankömmt, so wird die theilende Linie wohl eine mit der gegenüberstehenden Seite des Dreyeks parallele Linie seyn müssen. So habe ich, indem ich mit E anfing, die Vorbereitungs-Linie gefunden, die mich zum Beweise meines Lehrsatzes führt. Eben dieses ließe sich auch an schwehrern Lehrsätzen zeigen.

§. 7.

Von den wesentlichen Theilen einer geometrischen Aufgabe.

Insgemein rechnet man zu einer geometrischen Aufgabe weiter nicht als drey wesentliche Stücke; den Satz, der anzeigt, was gegeben ist und was zu thun gefodert wird; die Construction, wodurch der Forderung ein Genüge geschieht, und den Beweis, worin dargethan wird,

daß der Forderung durch das Verrichtete wirkl
ein Genüge geschehen ist. Der Satz fragt; d
Construction antwortet; der Beweis zeigt, d
die Antwort richtig ist: Construction und Bew
werden mit einem gemeinschaftlichen Nam
Composition genannt. Man sieht aber leich
daß, wenn man über eine Aufgabe selbst na
denken will, zwischen den Satz und die Co
struction ein vierter wesentlicher Theil, d
Analysis, einzuschieben ist, weil ohne sie (§.
die Construction nicht gefunden werden kann.

§. 8.

Allgemeine Regel der Analysis Geometrischer Aufgaben.

In der That hängt von der Analysis al
ab; ist sie gut gemacht, so ist das Problem
viel als aufgelöst, und es hat mit der Com
sition keine sonderliche Schwierigkeit mehr. (
bietet sich also hier die wichtige Frage dar: w
ist die Analysis einer Aufgabe anzustellen
Die allgemeine Regel fließt aus dem Begri
den wir (§. 2.) davon gegeben haben, u
wird ohngefehr so lauten: Man bemerke sorgfält
alle im Satz gegebenen Dinge; forsche nach
was für andere Dinge damit gegeben seyen, u
aus diesen leite man wieder andere Dinge her
bis man endlich findet, daß das Gesuchte g
geben oder bestimmt ist. Auf diese Art hat ma

die Mittelbegriffe zwischen den gegebenen und gesuchten Dingen entdekt, und die Analysis ist gemacht. Es läßt sich aber nach eben diesem §. auch folgende Regel geben: man erwäge, was man unmittelbar zu finden hat, um das Gesuchte zu finden; hat man es bemerkt, so forsche man ferner nach, wodurch dieses bestimmt werde? und so finde man immer aus dem, was bestimmt werden soll, das Bestimmende, bis man auf den ersten Bestimmungs-Grund, das ist, auf das Gegebene oder die Hypothese des Satzes stößt; so ist die Analysis gleicherweise gemacht.

§. 9.

Man heisse das Gegebene bey einer Aufgabe A, und das Gesuchte X, und setze, die Anzahl der Mittel-Begriffe sey etwas groß; so ist es ohne zweifel für den Analysten eine Erleichterung, wenn er nicht nöthig hat, sie alle zu durchdenken, um zu X zu gelangen. Gesezt nun, die Mittelbegriffe zwischen A und X seyen α, β, γ, B, δ, ε; der Analyst aber wäre aus irgend einem Buche gewiß, daß wenn A gegeben ist, auch B gegeben sey, und wenn B gegeben ist, auch X gegeben sey; so hätte er nicht nöthig, die Begriffe α, β, γ, δ, ε, zu durchdenken, sondern er dürfte sich nur auf die Sätze jenes

Gebrauch der Data des Euklides bey der Analysis einer Aufgabe.

Buches berufen, und seine Analysis auf d[en] Mittelbegrif B einschränken. Ein solches Bu[ch] nun sind die Data des Euklids; eine Sam[m]lung von Sätzen, wo gezeigt wird, daß, wa[nn] gewisse Dinge gegeben werden, auch andre [m]it ihnen gegeben sind; ein Magazin von Element[ar]-Problemen, das dem Analysten bey etwas v[er]wickelten Aufgaben eben die Dienste thut, w[ie] das von Elementar-Theoremen bey etwas v[er]wickelten Lehrsätzen: bey beyderley Sätzen w[ird] ihm die Arbeit erleichtert und abgekürzet. [Es] versteht sich aber, daß, um die Composition [zu] bewerkstelligen, die aus den Datis angeführ[ten] Sätze müssen nachgeschlagen werden, wenn d[er] Beweis davon dem Gedächtnisse des Analys[ten] nicht gegenwärtig ist.

§. 10.

Wodurch die Analysis erleichtert wird. Beyspiel.

Die Vergleichung der gegebenen und d[er] gesuchten Dinge wird leichter angestellt, we[nn] man beyde vor Augen liegen hat: die allg[e]meine Regel der Analysis (§. 7.) wird al[so] besser ausgeübt werden, wann man bey ein[er] geometrischen Aufgabe die Figur auf eine m[e]chanische Art sich so vorzeichnet, als wenn d[as] Gesuchte darin schon bekannt wäre. So gerin[g] dieses Hülfsmittel scheinet, so wichtig ist es b[ey] dem analytischen Geschäft. Gesetzt, ich habe das Problem aufzulösen: an zween, der Lage und Größe nach gegebenen Kreise A, B, eine gemeinschaftliche Tangente zu ziehen (Fig. a.) so ziehe ich die Tangente E D auf eine mechanische Art, ob ich wohl noch nicht weiß, wie ich sie geometrisch zu ziehen habe, bloß um ihre Bestimmbarkeit aus den gegebenen Dingen desto leichter einzusehen.

§. 11.

Es ist aber nicht genug, die Tangente E D zu ziehen; ich muß sie auch mit den gesuchten Dingen in Verbindung bringen, um analysiren zu können: die gegebenen und gesuchten Dinge müssen sich in der Figur gleichsam die Hände bieten. Weil nun die Tangente von der Größe und Lage der Kreise abhängt, so ist nichts natürlicher als an die Berührungspuncte E, D, die Halbmesser A E, B D zu ziehen, die Mittelpuncte A, B zu vereinigen, und A B zu verlängern, bis sie der Tangente E D in C begegne. Man kann diese Operation, wodurch man das Gesuchte mit dem Gegebenen durch Zeichnung in Verbindung bringt, die Vorbereitung zur Analysis nennen: sie ist der erste Schritt dazu. Vorbereitung zur Analysis.

 §. 12.

§. 12.

Wirkliche Analysis der zum Beyspiel genommenen Aufgabe.

Nun bemerke ich, daß, um die Tangente zu bestimmen, einer von den Puncten E, D, C muß bestimmt werden; denn wenn einer bestimmt ist, so sind die übrigen bestimmt. Ich will mein Augenmerk auf den Punct C richten, weil er in der Verlängerung der, der Lage und Größe nach gegebenen, A B liegt. Um diesen zu finden, muß ich entweder die Größe von BC oder von AC finden. Ich betrachte die Figur, und bemerke, daß, weil E D eine Tangente beyder Kreise seyn soll, E und D rechte Winkel[a], folglich AE und BD parallel seyn müssen[b]; mithin bekomme ich folgende Proportion[c] A E : D B = A C : C B. Nun sind AE, BD gegeben[d], weil die Kreise der Größe nach gegeben sind, folglich[e] ist ihr Verhältnis gegeben; mithin ist A C : C B gegeben, mithin[f] auch AB : B C; nun ist A B gegeben, folglich auch[g] B C, und der Punct C ist gegeben[h].

a 18. 3.
b 28. 1.
c 4. 6.
d 6. def. dat.
e 1. dat.
f Cor. 6. dat.
g 2. dat.
h 20. dat.

§. 13.

Composition der vorgelegten Aufgabe.

Aus dieser Analysis läßt sich nun folgende Composition herleiten. Zu der Differenz der

Halb-

Halbmesser (man sezt hier, die gegebenen Kreise seyen ungleich,) AF — B D, dem kleinern Halbmesser B D, und der Entfernung der Mittelpuncte A B suche man [i] eine vierte Proportional- i 12. 6.
linie, und verlängere A B, bis B C derselben gleich ist. Von C ziehe man [k] eine Tangente k 17. 3.
an den Kreis B; ich sage, sie wird verlängert auch den Kreis A berühren.

Um dieß zu beweisen, ziehe man von B an den Berührungspunct D den Halbmesser B D, und von A an die verlängerte C D die mit B D parallele A E, so ist [l] A C: B C = A E: l 4. 6.
B D; nun ist (constr.) A F — B D: BD = A B : B C, mithin [m] A F : B D = m 18. 5.
AC : B C, folglich AF : BD = AE : BD, mithin [n] ist AE = AF, das ist, A E ist ein n 9. 5.
Halbmesser, folglich [o] berührt CD den Kreis A o 18. 3.
in E [p]. W. Z. E. p Cor. 16. 3.

Man sieht hieraus, daß das Verfahren (§. 12.) das umgekehrte von diesem ist; denn wie ich daselbst geschlossen: wenn ED eine Tangente beyder Kreise ist, so muß B C die vierte Proportionallinie zu A F — BD, BD, A B seyn; so schliesse ich nun hinwiederum: wenn B C nach dem gefundenen Werth gezogen wird, so kann von C eine Tangente an beyde Kreise gezogen werden, oder die von C an den Kreis B gezogene Tangente wird verlängert, auch den Kreis A berühren. So wird, was bey der Analysis der lezte Schritt war, der erste bey der Composition.

§. 14.

Von den Analytischen Kunstgriffen.

Eine nach (§. 10) angestellte Vorbereitung kann oft zu einer verwickelten Analysis führen, woraus gemeiniglich eine verwickelte Composition entsteht: in diesem Fall muß man das Gesuchte mit dem Gegebenen durch Zeichnung in eine andere Verbindung zu bringen suchen; denn die Zierlichkeit der Geometrischen Auflösungen besteht in der Simplicität und Leichtigkeit der Operationen (*). Besondere Regeln lassen sich hier nicht geben, sondern ein jeder muß durch die

(*) So geräth man bey der vorhergehenden Aufgabe auf eine kürzere Construction, wenn man BL parallel mit CE zieht; denn alsdann ist AL gleich dem Unterschiede der Halbmesser, mithin gegeben, und das △ ABL ist gegeben; woraus sich das Uebrige finden läßt. Sie befindet sich samt der Analysis in Herrn Hofrath Kästners Anfangsgründen der angewandten Mathem. Opt. §. 10. woraus zugleich erhellt, daß der Satz in der Astronomie seinen

Nutzen

die Uebung und das Studium der von großen Meistern gegebenen Beyspiele, sich selbst Analytische Kunstgriffe erwerben. Wenn man aber mit den Datis vertraut ist, und die Verhältnis wahrnimmt, worin das vorgelegte Problem mit einigen Sätzen derselben steht, so wird man bald einsehen, wie die Vorbereitung zu machen ist. Sonst läßt sich das, was Newton in seiner Arithm. Vniv. Sect IV. C. I. §. 17. sagt, auch hier anwenden: Schemata plerumque sunt construenda, idque sæpissime producendo aliquas ex lineis donec secent alias, aut sint assignatæ longitudinis; vel ab insigniori quolibet puncto ducendo lineas aliis parallelas aut perpendiculares, vel insigniora puncta conjungendo, ut & aliter nonnunquam construendo, prout exigunt status problematis, & theoremata quæ ad ejus solutionem adhibentur. Quemadmodum si duæ non concurrentes lineæ datos angulos cum tertia quadam efficiant, producimus forte, ut concurrentes constituant triangulum, cujus anguli & proinde laterum ratio dantur. Vel si quilibet angulus detur,

 aut

Nutzen hat. Ich habe das Problem nach meiner Art aufgelöst, weil mich meine Analysis wirklich auf diese Composition geführt hat. Auch in meiner Composition ließe sich über B C als dem Durchmesser ein Kreis beschreiben, der den Kreis B in D schneiden, und dadurch den Punct D auch bestimmen würde.

aut sit alicui æqualis, triangulum sæpe co plemus specie datum, aut alicui simile, idq vel producendo aliquas ex lineis in schema vel subtensam aliter ducendo. Si triangulu sit obliquangulum, in duo rectangula sæ solvimus, demittendo perpendiculum. Si figuris multilateris agatur, resolvimus triangula, ducendo lineas diagonales, & in cæteris; ad hanc metam semper collima do, ut *schema in triangula vel data vel sim lia, vel rectangula resolvatur.* Die in dem pra tischen Theile dieses Werkchens aufgelösten Pro leme werden für Anfänger hierinnen lehrreic Beyspiele seyn.

§. 15.

Bestimmung der Aufgabe.

Wenn man gewiesen hat, wie die Tangent CE zu ziehen ist; so hat man der Aufgabe, d weiter nichts foderte, ein Genüge gethan. Ma könnte aber ferner fragen, ob es nur eine einzi Linie gebe, die die beyden Kreise berührt? u wenn es mehr als eine giebt, wie viel? Ma sieht leicht, daß es auf der andern Seite von A eine, der CE gleiche Tangente giebt; und da sich noch ein Paar andere ziehen lassen, die d Linie AB schneiden.

Be

Berühren die gegebene Kreise einander, so fallen die zwo leztern Tangenten in eine zusammen, und es giebt in allem nur drey. Schneiden aber die gegebenen Kreise einander, so giebt es weiter nicht als zwey.

Ferner ist eine Aufgabe oft so beschaffen, daß die gegebenen Dinge nicht ganz willkührlich sind, und so können angenommen werden, daß sie nicht beysammen bestehen können; in welchem Fall es unmöglich ist, die Aufgabe aufzulösen. Wenn z. E. gefodert wird, mit drey gegebenen geraden Linien ein Dreyek zu verzeichnen, so können bekanntermaassen die drey Linien eine solche Verhältnis gegen einander haben, daß es unmöglich ist, ein Dreyek damit zu verzeichnen.

Diesen Zusatz, worin gezeigt wird, auf wie vielerley Art die vorgelegte Frage kann beantwortet werden, und in wie fern die Antwort möglich ist, samt einigen andern hieher gehörigen Dingen, heisse ich die Bestimmung der Aufgabe: sie ist den meisten, in dem zweyten Theile dieses Werkchens enthaltenen Aufgaben, wo sie Statt fand, beygefügt worden.

§. 16.

Berech-
nung der
Aufgabe.

Endlich kann man noch fragen: wenn d beyden Halbmesser, und die Entfernung AB m einem gemeinschaftlichen Maaße gemessen und Zahlen ausgedrükt werden, wie viel von diese Maaß auf BC, CD, CE geht? Ferner w viel die Winkel C, DBC Grade, Minuten u w. haben.? Das ist, wenn ich die geometrisch Verzeichnung gefunden habe, so kann ich die ge fundenen Linien und Winkel berechnen. Di Operation heiße ich daher die Berechnun der Aufgabe: sie wird gemeiniglich durch d Trigonometrie bewerkstelliget. Die Berechnun hat ihren Nutzen, weil Linien und Winkel, Zahlen ausgedrükt, zur Praxi oft brauchbar sind, als wenn sie durch blosse geometrische Zeichnung sind gefunden worden. Ich habe die Berechnungen meiner Aufgaben nicht wirklich gemacht, sondern nur angezeigt wie sie zu machen sind: wird aber dem, der die Trigonometrie ein wen inne hat, nicht schwer seyn, sie nach der angezeigten Methode zu bewerkstelligen. Dergleichen Berechnungen lassen sich auch bey den Sätzen d Data anbringen. Herr Hofrath Kästner hat d Gütigkeit gehabt, mir ein Muster davon zu über send senden, das ich meinen Lesern hier mittheilen will: es betrift den 99sten Satz in dieser Ausgabe, (Fig. 101.) welcher in andern Ausgaben der 95ste ist.

Im Durchmesser BC ist D nach Gefallen genommen, DA willkührlich gezogen, AE senkrecht auf DA, und EFG mit DA parallel: so ist der Punct F gegeben, und das Rechtek DA×EG ist gegeben.

1.) Vorläufig erhellt, daß G = DAG.

2.) AEG = 90°, also ist AG ein Durchmesser.

3.) Ist also H der Mittelpunct, so haben die Dreyecke DHA, FHG, an den gleichen Seiten HA, HG, gleiche Winkel liegen, DHA = FHG, DAH = G; also ist FH = HD, folglich ist F gegeben weil D gegeben ist.

4.) Es sey HD = a, der Halbmesser = r, HDA = β; diese drey Größen sind unmittelbar gegeben.

5.) Man nenne DAH = γ, so hat man $\sin\gamma = \frac{a}{r} \cdot \sin\beta$; dieser Winkel ist also gefunden.

6.

6. folglich findet man:

$$AD = \frac{r.\ \sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta}$$

7. auch (3) $GE = 2r.\ \cos\gamma$

8. Folglich $AD \times GE = 2r^2.$

$$\frac{\cos\gamma.\ \sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta}$$

§. 17.

Unterschied der geometrischen und algebraischen Analysis.

Man wird hieraus schon abnehmen könn worin die geometrische Analysis von der alg braischen unterschieden ist. Beyde kommen dar mit einander überein, daß sie das Gesuch aus dem Gegebenen durch Mittelbegriffe z bestimmen suchen; daher sie auch die gemein schaftliche Partial-Benennung Analysis hab Allein darin sind sie wesentlich unterschieden, d die geometrische Analysis alles durch Zeichnun verrichtet, die Figur immer im Gesichte behält und dabey die Linien immer als Linien, die Figuren immer als Figuren behandelt: die algebraisch Analysis hingegen geht mit Linien und Figuren al mit Zahlen um; wendet daher die in der allgemeinen Arithmetik festgeseztenRegeln auf sie an; eilt z

Glei

Gleichungen, und wickelt, ohne mehr an die Figur zu gedenken, durch Auflösung dieser Gleichungen, die gesuchte Größe heraus. Diese Unterscheidungs-Charaktere besser ins Licht zu setzen, will ich folgendes leichtes Beyspiel geben.

§. 18.

Gesezt man soll auf eine geometrische Art die Linie AB (Fig. b.) in zwey Segmente theilen, so daß das Quadrat des größern gleich sey dem Rechtek, das aus der ganzen und dem kleinern Segmente formirt wird: so nimmt der Analyste den zu findenden Punct H aus obigem Grunde (§. 10.) als bekannt an; beschreibt über A B das Quadrat AD; zieht HK mit BD parallel, um das verlangte Rechtek vor Augen zu haben; und verlängert K H und C A, um A G, das Quadrat des Segmentes AH, zu bekommen: so ist das Gegebene mit dem Gesuchten in Verbindung gebracht (§. 11.) Weil nun AB gegeben ist, so ist das Quadrat AD, das ist, $AK + HD$ gegeben; nun ist $HD = AG$ (hyp.) mithin ist $AK + AG$, das ist, C G gegeben. Nun halbire man A C in E, so ist[a] $CG + AEq = EFq$; nun ist CG gegeben, und weil AE, die Hälfte von AC, gegeben ist, so ist A E q gegeben, folglich ist E F q, folglich auch E F gegeben;

Durch ein Beyspiel erläutert.

a 6. 2.

b 4. dat. ben; nun ist A E gegeben, mithin[b] auch A
nun ist A F = A H, folglich ist der Punct
gegeben.

Hieraus läßt sich leicht die Composition
c II. 2. leiten, die ich, weil sie sich im Euklides[c]
findet, und mir es hier bloß um die Analysis
thun ist, nicht hersetzen will (*).

§. 1

(*) Ich habe mich hier, wie oben (§. 12.) der Z
chen bedient, durch A E q aber nichts anders vers
den als das auf der Linie A E errichtete Quadr
Bey einer ähnlichen Gelegenheit fragte ich den H
Hofrath Kästner, ob es nicht wahrscheinlich
daß die Alten bey ihren Analysen sich auch sol
Zeichen bedienten, um sich die allzuhäufige Wi
hohlung ebenderselben Worte zu ersparen? Ich g
be, mir meine Leser verbindlich zu machen, w
ich ihnen die Gedanken dieses philosophischen Ge
ters mittheile: " In Euklids arithmetischen
chern findet man die Zahlen durch Buchstaben an
deutet, freilich nicht mit Buchstaben gerechnet.
sollte also wohl glauben, die Alten hätten sich
kürzender Zeichen bey der Analysis bedient.
brauchten indessen sie nicht so nöthig als wir, w
sie weniger zu lernen hatten, und sich also der w
läuftigen Ausdruckungen der Sätze mit Wort
konnten gefallen lassen. Daß in Ihrer Aufgabe
Analysis durch den Gebrauch der Zeichen wäre al
braisch geworden, werden vermuthlich alle Engl
der sagen, die eben so, geometrische Analysis u
Algebra, durch den Calcul unterscheiden. — Eige
lich sind drey Dinge zu unterscheiden. Die geom
trisch

§. 19.

Der algebraische Analyste nimmt aus eben dem Grund den Punct H als bekannt an, und nennt um mehrerer Bequemlichkeit willen AB $= a$, AH $= x$, mithin HB $= a - x$; weil nun das Quadrat des größern Segmentes AH gleich seyn soll dem Rechtek aus der ganzen AB in das kleinere Segment HB, so ist $xx = a(a - x) = aa - ax$, folglich $xx + ax = aa$; und wenn man $\frac{aa}{4}$ auf beyden Seiten hinzufügt, $xx + ax + \frac{aa}{4} = \frac{5aa}{4}$, oder $(x + \frac{a}{2})^2 = \frac{5aa}{4}$, mithin $x + \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{5aa}{4}}$, folglich $x = \frac{a\sqrt{5} - a}{2} = a\frac{(\sqrt{5} - 1)}{2}$, oder wenn man a zur Einheit annimmt, $x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

§. 20.

trische Analysis bey einer dergleichen Aufgaben: die Rechnung mit Buchstaben, bis zu Erfindung der Gleichung: die Auflösung der Gleichung. Das lezte ist eigentlich Algebra. Die Algebra lehrt nicht die Gleichung finden, sondern sie zur Auflösung behandeln. Jenes ist das Geschäft der Analysis, und wenn man deutlich über die Aufgabe gedacht hat, so ist die Buchstaben-Rechnung nur eine Abkürzung der Ausdrücke unserer Schlüsse, wie alle Rechnungen."

)()(

§. 20.

Betrachtung über die zwo Methoden.

Die Verschiedenheit der zwo Analysen fä in die Augen. Bey jener habe ich die Linie A durch geometrische Zeichnungen, bey dieser, dur Rechnungen, gefunden. Als ich $AB = a$ $AH = x$ sezte, so theilte ich, wenigstens Gedanken, AB in eine gewiße Menge gleich Theile, und suchte, wie viel davon auf A gehen; a und x sind also Zahlen, deren Einh die Linie ist, womit sich AB und AH mess lassen. Hätte ich a und x nicht als Zahlen, so dern als Linien behandelt, so hätte ich bey d Sätzen $a(a-x) = aa - ax$, und $xx + a$ $+ \frac{aa}{4} = (x + \frac{a}{2})^2$, mich auf gewiße, in d Geometrie bewiesenen Lehrsätze berufen müße das aber thut der Algebraist nicht, und wie sol er es bey $\frac{a\sqrt{5} - a}{2} = \frac{a(\sqrt{5} - 1)}{2}$ th können? sondern er verfährt hiebey bloß nach de in der allgemeinen Arithmetik festgesezten Rege die auf der Natur der Zahlen beruhen. Wen er demnach $x = \frac{a(\sqrt{5} - 1)}{2}$ gefunden ha so hat er eigentlich nicht die Linie AH, sondern d Menge der gleichen Theile gefunden, die vo AB auf AH gehen, welches freylich auf ein

hin

hinaus läuft und zur Praxi noch besser ist. Denn ich kann ja A B, wie jede geometrische Einheit, in so viel gleiche Theile theilen, daß, wenn auch x eine Irrationalzahl ist, ich mich dem wahren Wehrte von A H so sehr nähern kann, als ich zu irgend einem Gebrauche nöthig habe.

§. 21.

Ich will hier eine Erinnerung über einen Ausdruk in der algebraischen Geometrie beyfügen. Man habe zwey gleiche Rechtecke; die Grundlinie und Höhe des einen seyen a, b, des andern c, d; so sagt man insgemein, das Rechtek ab ist gleich dem Rechtecke cd. Mit diesem Ausdrucke verbinden diejenigen, die die Algebra auf die Geometrie anwenden, nicht immer einen deutlichen und richtigen Begrif. Eigentlich will der Ausdruk so viel sagen: das Product aus den zwo Zahlen a, b, ist gleich dem Producte der zwo Zahlen c, d; aber diese Producte drücken die Mengen der kleinen Quadrate aus, die in beyden Rechtecken enthalten sind, und zur Seite das gemeinschaftliche Maaß haben, womit sich die Seiten der Rechtecke messen lassen. Oder kürzer: die Menge der kleinen Quadrate in dem einen Rechtek ist gleich der Menge der gleichen Quadrate in dem andern. Dieses wünschte ich daß Anfänger recht deutlich überdächten, damit

Erinnerung über einen Ausdruk in der algebraischen Geometrie.

sie den Grund des abgekürzten Ausdruks einseh möchten: das Rechtek ab ist gleich dem Rech ecke cd. Und wenn man dann daraus schlie

$a = \frac{cd}{b}$, so heißt dieses wiederum weiter nich

als, die Zahl a ist gleich dem Quotienten $\frac{cd}{b}$; ab

alsdann ist die Einheit nicht mehr das kleine Qu drat, womit beyde Rechtecke sich messen lass sondern die Seite dieses Quadrates, oder d

Linie, womit a, b, c, d sich messen lassen, und $\frac{c}{}$

drükt die Menge der Linien aus, die in der Grun linie des Rechteckes enthalten sind. Man h also nicht nöthig, hier den gewöhnlichen Beg der Multiplication zu verlassen, und zu sage man multiplicire Linien mit Linien, welche wenn es nichts ungereimtes sagen soll, einen b sondern Begrif der Multiplication voraussez sondern man multiplicirt immer Zahlen mit Za len, deren Einheit aber eine Linie ist; und d Product derselben, drükt eine Menge Flächen Einheiten aus (*).

§. 22

(*) Als ich dieses schrieb, hatte ich die dritte Ausg be der Anfangsgründe der Geom. von H. Hofr Kästner, mithin auch den beygefügten 67sten Sa noch nicht zu Gesichte bekommen. Daselbst heißt ausdrüklich, „Wenn a, b, c, d, e, f, g, h g rad

§. 22.

Nun will ich noch von den Vortheilen und Inconvenienzen beyder Methoden etwas sagen. Die algebraische Analysis hat den großen Vorzug, daß wenn man durch Erforschung einer Aufgabe einmal auf die Gleichung gekommen ist, alle übrige Operationen nach ohnfehlbarn, in der allgemeinen Arithmetik festgesezten Regeln, vor sich gehen, und also dem, der diese Regeln kennt und sich damit vertraut gemacht hat, sehr leicht seyn müßen; da hingegen bey der geometrischen Analysis eines Problems eine Anstrengung der Aufmerksamkeit bis ans Ende nöthig ist. Nachdem man die Gleichung $xx = aa - ax$, welche ohne vieles Forschen sich hier von selbst darbot, gefunden hatte, so war es für den, der die Regel der Quadratischen Gleichung kennt, ein Spiel, den Wehrt von x zu finden; hingegen brauchte man bey der geometrischen Analysis ein bis ans Ende anhaltendes Nachdenken, um zu zeigen, daß die Linie AH gegeben sey.

Vergleichung der zwo Methoden: Vortheil der Algebraischen Analysis.

rade Linien bedeuten, so pflegt man zu sagen, ein Product aus ein Paar solchen Linien bedeute eine Fläche, aus dreyen einen Körper. — Eigentlich sieht man jede solche Linie als eine Zahl an; was man Producte aus Linien nennt, sind Producte aus Zahlen, und ein solches Product zeigt eine Menge von Quadraten oder Würfeln an."

§. 23.

Beantwortung eines Einwurfes wider die geometrische Analysis.

Warum soll man denn, wird man vielleic[ht] hier einwenden, durch die geometrische Analy[sis] mit Mühe bewerkstelligen, was sich durch [die] Algebra leicht verrichten läßt? Es läßt sich V[er]schiedenes auf diesen Einwurf antworten. S[tu]dirt man die Geometrie nicht bloß um der A[n]übung willen, sondern zugleich, um seinen V[er]stand in Combinirung der Wahrheiten zu sch[är]fen, so muß diejenige Methode, die besonders [hier]zu geschikt ist, einer andern, wo man die Wa[hr]heiten auf eine beynahe mechanische Art find[et] vorgezogen werden. Wer weiter nichts als [cal]culiren und Gleichungen auflösen kann, hat e[s in] der Erfindungskunst noch nicht weit gebracht. [Ich] kann hier nicht umhin, meinen Lesern aus He[rrn] Hofrath Kästners Abhandlung: unde plu[res] insint radices æquationibus, Sectiones ang[u]lorum definientibus, eine Stelle herzusetze[n] worin das, was ich hier behaupte, mit eben[so] viel Scharfsinn als Witze gesagt wird." [H]autem calculis omnibus cum machinis [est] commune, ut labore singula quae agim[us] perpetuo ante oculos habendi, nos leuen[t] ut calculum vel machinam certis legibus tr[ac]tantes, vel eorum inscii quæ durante ope[ra]tione fiunt, id tamen quod desideratur obtin[eamus] ant. DIDEROTUS, aegre ferens quod ad aures chordis artificiose pulsatis demulcendas, digitos fere ab infantia exercitatos habere necesse sit, machinam excogitauit, qua idem præstare possit vel ignarus musices, manubrio axis cuiusdam versato. Qui hac machina, nescius constructionis ejus uteretur, musici elogio omnino non esset ornandus; credo musicos, ut sunt poetæ, & pictores, & omnes fere ingeniosi voluptatum artifices, paulo cerebrosiores, vix eum recepturos, qui machina probe intellecta luderet. Eiusmodi machinæ cum calculo algebraico similitudinem qui animaduertit, is minus mirabitur cur Angli elegantius reputent synthesi aut analysi geometrica uti quam illo; idem etiam algebraicos qui sibi non contemnendi videntur, agnoscet persimiles allobrogibus illis qui per Germaniæ ciuitates ubi maior hominum confluxus est, cursitant, & ad laternæ magicæ miracula aut muris alpini saltus, spectatores machinæ talis, vnde DIDEROTUS suæ ideam sumsisse fatetur, vlulatu inuitant. Quales inprimis illi euadunt, qui elementis Geometriæ obiter ex recentioris cuiusdam scriptoris compendiolo perceptis, neglecta antiquorum lectione, ad algebram quam vocant, grassantur, hoc est calculos litterales utcunque tractare discunt, ad analysin autem ipsam, quæ directrix est calculorum, non pertingunt, quoniam nec ing nium exercitio quodam ad illam formarum nec copias eruditionis geometricæ quibus u tur collegerunt, vulgi tamen oculos horren dis illis signis a + b — x fascinant, pruden tioribus, abecedarii mathematici, sæpe i cum, interdum & bilem mouent."

§. 24.

Zweyte Beantwortung.

Ich antworte zweytens auf den gemacht Einwurf, das viele Aufgaben durch die geom trische Analysis leichter und kürzer als durch d Algebra aufgelöset werden. Hievon wird m Beyspiele unter den dreyßig Aufgaben find die ich diesem Werke beygefügt habe. Dieß g schieht insonderheit, wenn unter den gegeben Dingen Winkel sind: da geräth man bisweil durch die algebraische Analysis auf sehr verwickel Gleichungen; hingegen giebt die geometrische An lysis leichte Mittel an die Hand, das Gesuch zu finden. Durch sie wird also die Auflösu einfach, kurz und zierlich; worauf man b allen Aufgaben zu sehen hat.

§. 25.

Dritte Beantwortung.

Drittens hat man selbst bey der algebra schen Analysis eine Vorbereitung nöthig, w von wir oben (§. 11.) geredet haben: sie ist ein wesentlicher Theil davon; und da sie durch die analytische Methode der Alten am besten studirt wird, so erhellet, wie die geometrische Analysis den Weg zur algebraischen bahnet, und also vor dieser studirt werden sollte. Ich glaube, dieses nicht besser als mit den Worten des berühmten Wolfs in seinen *Elementis Math. Univ.* T. V. *Cap.* IV. bekräftigen zu können. " Veterum Analysin talem non esse, qua, Algebra inventa, carere possimus, haud difficulter ostenditur. Etenim antequam problemata geometrica vel alia in Mathesi mixta ad Geometriam puram reducta, per Algebram solvantur, reducenda sunt ad æquationes. Hæc vero reductio non modo supponit præparationem, methodo Veterum inveniendam, verum etiam ipsamet per eandem methodum est eruenda. — Optime igitur sibi consulunt, qui methodum Veterum cum algebraica recentiorum conjungunt: & merito dolemus cum *Newtono*, quod, illa neglecta, cito nimis pede ad hanc properent, qui inter Mathematicos eminere volunt." Wie wahr dieses sey, kann ich durch mein eigenes Beyspiel versichern. Es ist mir oft wiederfahren, daß, wenn die geometrische Analysis mich auch nicht ganz bis zum Ziel brachte, sie mir doch zu einer einfachern Gleichung verhalf,

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

und mir also die algebraische Auflösung der Fr
ge erleichterte.

§. 26.

Besonderer Vortheil der algebraischen Analysis.

Da die algebraische Analysis die gesuch
Winkel, Linien u. s. w. berechnet (§. 20.)
erhellet, daß sie vornehmlich zur Ausübu
dient, wo es oft nöthig ist, diese Größen in Z
len zu wissen. Die geometrischen Verzei
nungen setzen oft mehrere mechanischen Op
tionen voraus, bey welchen man immer Ge
läuft sich zu irren; und dann ist auch die V
kommenheit unserer Instrumente nicht so gr
daß wir durch Applicirung derselben auf ei
Winkel oder eine Linie, gewiß seyn könnten, a
die kleinern Theile, woran uns oft gelegen i
zu bekommen. Wie unrichtig und unzuverlä
würde man auf solche Art die Verhältnis d
Halbmessers zum Umfange des Kreises besti
men! — Hiebey ist jedoch zu merken, da
wenn man einmal die geometrische Verzeichnu
gefunden hat, die Berechnung der gesuchten D
ge sich gemeiniglich leicht durch die Trigonom
trie bewerkstelligen läßt.

§. 27

§. 27.

Des-Cartes und andere haben gezeigt, wie man die Gleichungen geometrisch construiren könne. So sinnreich dieses ist, so wenig scheint es dem Zwecke gemäß, den man sich bey Anwendung der Algebra auf die Geometrie, vorgesezt hat: da dieser ist, die gesuchten Dinge in Zahlen zu bekommen; so ist alles gethan, wenn man die Gleichung aufgelöst hat. Hernach haben die Constructionen, die man durch die Formeln der Gleichungen erhält, gemeiniglich so wenig Simplicität und Zierlichkeit, daß ihnen die aus geometrischen Analysen hergeleiteten Constructionen weit vorzuziehen sind. Man sehe auch, was Herr Hofr. Kästner hierüber sagt, in seiner Analysis endlicher Größen 507. 111.

Gedanke über die Construction der Gleichungen.

§. 28.

Wenn man bey Erforschung einer Aufgabe auf die Gleichung gekommen ist, so verliert man die Figur aus dem Gesicht; und operirt blindlings (*) nach gewißen Regeln: dadurch verliert

Inconvenienz der algebraischen; Vorzug der geometrischen Analysis.

(*) Dieser Ausdruk ist von Leibnitz, der in den Act. Erud. 1684. mens. Nov. sagt: "Plerumque non totam rei simul naturam intuemur, sed rerum liert man also die anschauende Erkänntnis der Dinge und ihres Zusammenhanges. Ob man nun schon in der Mathematik nicht, wie in andern Wissenschaften, Gefahr läuft, durch dieses bloß symbolische Denken in Irrthum zu gerathen; so ist doch gewiß, daß der Verstand dadurch nicht so geübt wird, als wenn man die Wahrheiten auf eine mehr anschauende Art verbindet. Dieß thut die geometrische Analysis: sie begnügt sich nicht, durch den angenommenen Leitfaden aus dem Labyrinthe zu kommen; sie bemerkt auch die Schritte, die sie thut, alle Oerter, wodurch sie geht; und kann daher, wenn sie zum Ziele gelangt ist, das ganze Feld, das sie durchlaufen hat, besser überschauen. Sie ist also geschikter unser Vermögen, den Zusammenhang der Wahrheiten einzusehen, das ist, unsere Vernunft und unsern Verstand zu üben und zu schärfen. — Die übrigen Vortheile derselben sind in den §§. 23. 24. 25. berührt.

§. 29.

Ob man sagen könne, eine sey der andern vorzuziehen?

Wenn man alles, was wir bey Vergleichung der zwo Methoden gesagt haben, und was sich

loco signis utimur, quorum explicationem in præsenti aliqua cogitatione compendii causa solemus prætermittere, scientes aut credentes, nos eam habere in potestate. — Qualem cogitationem cæcam vel etiam *symbolicam* vocare soleo, qua in Algebra & Arithmetica utimur."

sich noch darüber sagen ließe, erwägt; so wird man finden, daß sie Frage: welche von beyden ist der andern vorzuziehen? wegen ihrer Unbestimmtheit auch nicht schlechthin beantwortet werden kann. Wer bey leichten Aufgaben, wo die Anzahl der Mittelbegriffe gering ist, die Algebra gebraucht, ohne den (§. 26.) angeführten Zwek zu haben, der legt wenigstens keinen sonderlichen Beweis von geometrischer Sagacität ab, ob er gleich übrigens sich als einen geschikten Algebraisten zeigen kann. Aber bey verwickelten Aufgaben, wo auch ein scharfer Verstand, durch die angestrengteste Aufmerksamkeit geleitet, Mühe haben würde, alle Mittelbegriffe deutlich zu durchdenken, da ist die Algebra ein vortrefliches, der Eingeschränktheit unsers Verstandes angemessenes Werkzeug; und wer sich derselben gut zu bedienen weiß, der wird immer Proben von geometrischem Scharfsinn geben, und Dinge finden, die er ohne dieselbe niemals würde gefunden haben.

§. 30.

So viel ist also gewiß, daß die geometrische Analysis vor der algebraischen sollte studirt werden; und daß ein Anfänger, von der Elementar-Geometrie nicht gleich zur Anwendung der Algebra auf die Geometrie, überspringen

soll

soll, ohne vorher durch die geometrische Auflös[ung] vorgelegter Probleme seine Elementar = Geom[e]trie wiederhohlt, seine Verstandeskräfte versu[cht] und sich in der anschauenden Combinirung [der] Wahrheiten geübt zu haben. Dann erst w[ird] er, wann er bey der geometrischen Analysis [un]übersteigliche Schwierigkeiten wird gefunden [ha]ben, mit desto größerm Nutzen und Vergnü[gen] den Weg der Algebra einschlagen.

Vo