Euklids Data

Euclides

Stuttgart, 1780

Sammlung dreyßig geometrischer Aufgaben, nach der geometrisch-analytischen Methode aufgelöst; und als ein praktischer Theil den Datis beygefügt.

urn:nbn:de:hbz:466:1-48509

Sammlung
dreyßig geometrischer Aufgaben,

nach der geometrisch = analytischen Methode
aufgelöst;

und als ein praktischer Theil
den Datis beygefügt.

Aufgabe I.

Ueber einer der Lage und Größe nach gegebenen geraden Linie AB einen Kreis-Abschnitt zu beschreiben, der eines gegebenen Winkels fähig sey. Fig. 103.

Geometrische Analysis.

Man setze, ADB sey der zu findende Kreis-Abschnitt, der des gegebenen, (hier spitzigen) Winkels ADB fähig sey; und der Mittelpunct des Kreises sey C. Von A und B ziehe man AC, BC; so ist[a] der Winkel ACB gleich dem doppelten ADB, mithin gegeben; weil nun AC = CB, so ist[b] AC : CB gegeben, folglich ist das △ ACB der Gattung nach gegeben[c]; mithin ist[d] der Winkel CAB gegeben; demnach weil der Punct A in der, der Lage nach gegebenen AB gegeben ist, so ist[e] AC der Lage nach gegeben; nun ist[d] AB : AC gegeben,

a 20. 3.
b 2. def. dat.
c 44. dat.
d 3. def. dat.
e 22. dat.

und

f 2. dat. und AB ist gegeben, folglich ist[f] AC auch der
g 30. dat. Größe nach gegeben, folglich[g] ist der Punct C
h 6. def. dat. gegeben, folglich[h] ist der Kreis der Lage und Größe nach gegeben.

Construction.

An A lege man den Winkel BAE gleich
i 23. I. dem gegebenen ADB an[i], und von A richte
k 11. I. man über AE die Linie AC senkrecht auf[k]; von B ziehe man[i] BC so daß ABC = CAB. Aus dem Puncte C, wo AC, BC einander schneiden, mit dem Halbmesser CA beschreibe man einen Kreis; so wird dieser Kreis durch B gehen, und der Abschnitt über AB wird des gegebenen Winkels fähig seyn.

Beweis.

Weil BAE dem gegebenen spitzigen Winkel gleich ist, so fällt die senkrechte Linie AC über AB, und CAB ist daher kleiner als ein rechter Winkel; mithin ist auch ABC (= CAB) kleiner als ein rechter; weil also die zween Winkel CAB, CBA zusammen kleiner sind als zween
l axiom. 12. rechte, so[l] werden AC, BC irgendwo einander schneiden: der Punct C ist also in der Construction mit Grund als möglich angenommen worden.

Fer-

Ferner weil CBA = CAB, so ist[m] CB = m 6. 1.
CA, mithin geht der Kreis durch B. Endlich
weil AE senkrecht ist auf CA, so ist[n] AE eine n 16. 3.
Tangente; folglich ist[o] der Winkel BAE gleich o 32. 3.
dem gegebenen Winkel (*constr.*) folglich ist der Kreis-Abschnitt über der Linie AB des gegebenen Winkels fähig. Q. E. D.

Bestimmung.

Wäre der gegebene Winkel ein rechter; so fiele der Punct C auf die Mitte von AB, und AB wäre der Durchmesser des gesuchten Kreises. Wäre aber der gegebene Winkel ein stumpfer; so fiele AC unter AB, und der Punct C läge auf der entgegengesetzten Seite von AB.

Berechnung.

In dem △ ACB ist die Seite AB samt allen Winkeln gegeben; mithin läßt sich AC, der Halbmesser des Kreises, durch die Trigonometrie finden; folglich auch BC; mithin ist der Mittelpunct C bestimmt, und der Kreis-Abschnitt läßt sich gleicherweise beschreiben. Man supponirt nämlich, daß AB in eine gewiße Anzahl gleicher Theile getheilt ist, und findet durch die Trigonometrie, wie viel von dergleichen Theilen

len auf A C gehen. Wir wollen den meisten Aufgaben die Art sie zu berechnen beyfügen, um zu zeigen, daß, wenn man einmal die geometrische Analysis und Composition gefunden hat, die Linien und Winkel sich auch durch arithmetische Operationen finden lassen.

Anmerkung.

Man löset durch Hülfe dieses geometrischen Ortes sehr viele Probleme auf, wo unter den gegebenen Dingen Winkel sind. Ich habe ihn deswegen hieher gesezt, ob er sich gleich im Euklides 33. 3. Elem. befindet.

Aufgabe II.

Die Grundlinie BC, die Summe der beyden Seiten BA, AC, und der Scheitelwinkel BAC, sind gegeben; das Dreyek zu finden. Fig. 104.

Analysis.

ABC sey das zu findende Dreyek. Weil nun B C, und B A + A C gegeben sind, so
a 1. dat. ist a die Verhältnis BC : (BA + AC) gegeben,

ben, folglich weil der, zwischen B A und A C liegende Winkel B A C gegeben ist, so ist[b] das △ B A C der Gattung nach gegeben; nun ist die Grundlinie B C gegeben, folglich[c] ist das △ A B C der Größe nach gegeben; folglich[d] sind die Seiten B A, A C gegeben.

b 48. dat.
c 56. dat.
d 60. dat.

Construction.

Man nehme B D gleich der gegebenen Summe der Seiten; an D lege man den Winkel B D C gleich dem halben gegebenen Winkel an; und aus B beschreibe man mit der gegebenen B C einen Kreis, der die Linie D C in C schneide; von C ziehe man C A so daß der Winkel D C A gleich sey dem Winkel D; so wird △ A B C das gesuchte Dreyek seyn.

Beweis.

Weil $DCA = D$ (*constr.*) so ist[e] $AC = AD$, mithin ist $BA + AC = BD$; ferner weil[f] $BAC = D + DCA = 2D$, so ist, weil D gleich dem halben gegebenen Winkel ist, B A C gleich dem gegebenen Winkel. Q. E. D.

e 6. I.
f 32. I.

Be-

Bestimmung.

Wenn der, aus B mit der gegebenen BC beschriebene Kreis der Linie DC nur in Einem Punct C begegnet, so ist DC eine Tangente, und der Winkel BCD ist ein rechter; in diesem Fall ist, wie sich leicht zeigen läßt, BA = AC, und es giebt nur ein einziges Dreyek, das der Aufgabe genug thut. Schneidet aber der Kreis die Linie DC in zween Puncten, so giebt es zwey solcher Dreyecke, wovon jedes die gegebenen Dinge hat. Erreicht aber der Kreis die Linie DC gar nicht, so hat man etwas Ungereimtes gegeben, und das Dreyek ist unmöglich. Es versteht sich, daß BA + AC größer seyn muß als BC.

Berechnung.

In dem △BDC sind die Seiten BC, BD samt dem Winkel D gegeben, mithin läßt sich der Winkel B finden; und weil der Winkel BAC und die Grundlinie BC gegeben sind, so läßt sich das Uebrige in dem △ ABC berechnen.

Anmerkung.

Wäre anstatt der Summe, der Unterschied der Seiten gegeben; so ließe sich das Problem auf eine ähnliche Art auflösen.

Aufgabe III.

Die Grundlinie B C, der Unterschied der Seiten AC, AB, und der Winkel der Grundlinie ACB, sind gegeben; das Dreyek zu finden. Fig. 105.

Analysis.

ABC sey das zu findende Dreyek. Man mache AD = AB, und ziehe BD; so ist DC, als der Unterschied der Seiten, gegeben; mithin[a] ist BC : CD gegeben, folglich weil der eingeschlossene Winkel C gegeben ist, so ist[b] △ BCD der Gattung nach gegeben; mithin[c] ist der Winkel BDC gegeben, folglich auch der Nebenwinkel BDA, und der, diesem gleiche ABD; mithin auch der Winkel A; weil demnach in dem △ ABC die Winkel gegeben sind, so ist[d] es der Gattung nach gegeben; folglich ist es wegen der gegebenen BC auch[e] der Größe nach gegeben; folglich[f] sind die Seiten BA, AC gegeben.

a 1. dat.
b 44. dat.
c 3. def.
d 43. dat.
e 56. dat.
f 60. dat.

Construction.

An C, den Endpunct der gegebenen BC, lege man den gegebenen Winkel BCA; auf CA nehme man CD gleich dem gegebenen Unterschied der Seiten, und ziehe BD; endlich mache man den Winkel ABD = ADB, und verlängere die Linien, bis sie sich in A schneiden: so wird ABC das gesuchte Dreyek seyn.

Beweis.

Es hat die gegebene Grundlinie BC, den gegebenen Winkel C, und weil der Winkel ABD = ADB, so ist AB = AD, folglich ist AC — AB = DC, dem gegebenen Unterschied der Seiten.

Berechnung.

Sie läßt sich leicht aus der Analysis herleiten.

Bestimmung.

Wenn BA und DA in irgend einem Punct zusammentreffen sollen, so müssen die Winkel ADB, ABD zusammen kleiner als zween rechte seyn; mithin weil sie gleich sind, muß jeder klei-

kleiner als ein rechter seyn; folglich muß BDC ein stumpfer, mithin muß der gegebene Winkel C ein spitziger Winkel seyn. §. 32. I.

Anmerkung.

Wäre der Winkel ABC gegeben, so müßte die Seite AB verlängert werden, bis sie gleich AC wäre; und die Analysis würde der vorhergehenden ähnlich seyn.

Aufgabe IV.

Die Grundlinie BC, der Unterschied der Seiten AC, AB, und der Unterschied der Winkel an der Grundlinie ABC, ACB, sind gegeben; das Dreyek zu finden. Fig. 106.

Analysis.

ABC sey das zu findende Dreyek. Auf AC nehme man AD = AB, und ziehe BD; so ist DC, als der Unterschied der Seiten, gegeben; folglich weil auch BC gegeben ist, so ist BC : CD gegeben. Weil nun AD = AB, so ist der Winkel ADB = ABD, mithin ist der Winkel ABC = ADB + DBC, nun ist ADB = C + DBC, folglich ABC = C + 2DBC, mithin ABC — C = 2DBC; nun ist (*hyp.*) ABC — C gegeben, folglich ist 2DBC, wie auch DBC gegeben; mithin [a] ist das △ DBC der Gattung nach gegeben. Folglich ist, wie in den vorhergehenden Aufgaben gezeigt worden, das △ ABC der Gattung und Größe nach gegeben.

a 47. dat.

Construction.

An B, den Endpunct der gegebenen BC, lege man den Winkel CBD gleich der Hälfte des gegebenen Unterschiedes der Winkel, und aus C schneide man mit CD, dem gegebenen Unterschied der Seiten, die Linie BD in D, und verlängere CD; alsdann mache man den Winkel DBA = ADB, und verlängere BA, DA, bis sie einander in A begegnen: so ist △ ABC das gesuchte Dreyek.

Beweis.

Es hat die gegebene Grundlinie BC; und weil ADB = ABD (*constr.*) so ist AD = AB, mithin ist DC der Unterschied der Seiten. Endlich weil DBC gleich der Hälfte des gegebenen Unterschiedes der Winkel ist, so ist, wie

aus

aus der Analysis erhellet, der Unterschied der Winkel A B C, A C B gleich dem gegebenen Unterschied der Winkel an der Grundlinie.

Berechnung.

Weil in dem △ B D C die Seiten B C, C D samt dem Winkel D B C gegeben sind, so läßt sich der Winkel B D C, mithin auch der Nebenwinkel A D B finden; folglich ist der Winkel A gegeben; folglich läßt sich das △ A B C berechnen.

Bestimmung.

Wenn der aus C mit C D beschriebene Kreis die Linie B D nicht erreicht, so ist das △ A B C unmöglich; berührt er aber die Linie B D nur, so sind die Linien B A, D A parallel, und es giebt auch kein Dreyek; schneidet er aber B D in zween Puncten, so giebt es zwey solcher Dreyecke, die die gegebenen Dinge haben.

Aufgabe V.

Der Scheitelwinkel B A C, und die Segmente B D, D C, in die die Grundlinie durch das von BAC gefällte Loth getheilt wird, sind gegeben; das Dreyek zu finden. Fig. 107.

Analysis.

ABC sey das zu findende Dreyek. Weil demnach die, durch das Loth AD formirten Segmente BD, DC gegeben sind, so ist ihre Verhältnis gegeben; mithin weil von dem gegebenen Winkel BAC die Linie AD auf die Grundlinie unter einem gegebenen Winkel gezogen ist, und die Segmente BD, DC eine gegebene Verhältnis haben, so ist[a] △ ABC der Gattung nach gegeben; und weil die Grundlinie BC gegeben ist, so ist[b] das Dreyek auch der Größe nach gegeben; folglich[c] ist alles übrige gegeben.

a 79. dat.
b 56. dat.
c 60. dat.

Construction.

In einer unbegränzten Linie nehme man BD, DC gleich den gegebenen Segmenten; über BC beschreibe man, nach der ersten Aufgabe, einen des gegebenen Winkels BAC fähigen Kreis = Abschnitt. Aus D richte man DA senkrecht über BC auf, bis sie dem Umfang in A begegne; dann vereinige man BA, CA; so wird ABC das gesuchte Dreyek seyn.

Be-

Beweis.

Weil der Kreis-Abschnitt BAC des gegebenen Winkels fähig ist, so ist der Winkel BAC gleich dem gegebenen Winkel; und es ist klar, daß das Loth die Grundlinie in die gegebenen Segmente theilt.

Berechnung.

Um das Dreyek ABC aus den gegebenen Dingen zu berechnen, muß folgender Lehnsatz vorangeschikt werden.

Wenn man in irgend einem Dreyek ABC von dem Scheitelpunct A ein Loth AD auf die Grundlinie BC herabläßt, so verhält sich die Grundlinie BC zum Unterschied der Segmente DC, BD, wie der Sinus des Scheitelwinkels BAC, zum Sinus des Unterschiedes der Winkel an der Grundlinie, oder $BC : DC - BD = \sin BAC : \sin (ABC - ACB)$. Fig. 108.

Man ziehe CE senkrecht auf AB; aus A mit AB schneide man BC in G, und vereinige AG; von C ziehe man auf die verlängerte AG das Loth CF; so ist wegen des gemeinschaftlichen

Halbmessers AC, CE : CF = sin CAB : sin CAG; nun ist wegen der ähnlichen △△ BEC CFG, CE : CF = BC : GC; folglich BC : GC = sin C A B : sin C A G, nun ist GC = D C — B D, und C A G = A BC — ACB, wie aus *constr.* erhellet; folglich BC : D C — B D = sin A B C : sin (ABC — ACB).

Demnach läßt sich aus den Dingen, die in der Aufgabe gegeben sind, der Unterschied der Winkel an der Grundlinie finden; nun ist, wegen des gegebenen Scheitelwinkels B A C, die Summe dieser Winkel gegeben; folglich lassen sich die Winkel selbst finden; und das übrige in dem △ ABC läßt sich berechnen.

Anmerkung.

Sind die gegebenen Dinge die Grundlinie B C, der Scheitelwinkel BAC, und das Loth AD; so beschreibe man gleicherweise über BC einen des gegebenen Winkels fähigen Kreis-Abschnitt; aus der Mitte von BC richte man das Loth EF auf, bis es dem Umfang in F begegne, und nehme darauf EG = AD; durch G ziehe man GA parallel mit BC, bis sie dem Umfang in A begegne, und vereinige B A, AC; so ist △

△ A B C das gesuchte Dreyek, wie sich leicht beweisen läßt. Er erhellet zugleich, daß das gegebene Loth AD nicht größer seyn darf als E F.

Aufgabe VI.

Der Scheitelwinkel B A C, das Loth AD, und die Verhältnis der Segmente BD, DC, in die die Grundlinie durch das Loth getheilt wird, sind gegeben, das Dreyek zu finden. Fig. 109.

Analysis.

ABC sey das zu findende Dreyek. Demnach weil A D mit der Grundlinie einen gegebenen Winkel macht, und die Verhältnis der Segmente B D, D C gegeben ist, so ist[a] △ ABC der Gattung nach gegeben, und der Winkel ABC ist gegeben; weil nun AEB, als ein rechter, gegeben ist, so ist[b] △ ACD der Gattung nach gegeben, folglich weil AD der Größe nach gegeben ist, so ist[c] △ ABD auch der Größe nach gegeben; mithin[d] ist AB gegeben; aus eben dem Grund ist AC gegeben; folglich ist △ ABC gegeben.

a 79. dat.
b 43. dat.
c 56. dat.
d 60. dat.

Construction.

Auf eine unbegränzte Linie trage man EF, FG gleich den gegebenen Linien, die die Verhältnis der Segmente ausdrücken. Ueber EG beschreibe man einen des gegebenen Scheitelwinkels fähigen Kreis = Abschnitt, und richte aus F ein Loth auf, das dem Umfang in A begegne, und vereinige EA, GA. Von A aus schneide man AF mit dem gegebenen Loth in D, und durch den Punct D ziehe man BC parallel mit EG, so daß sie den Linien AE, AG in B und C begegne; so wird ABC das gesuchte Dreyek seyn.

Beweis.

Es hat den gegebenen Winkel BAC, und das gegebene Loth AD. Ferner weil BC parallel ist mit EG, so ist[e] AD : AF = DB : EF, und AD : AF = DC : FG, folglich[f] DB : EF = DC : FG, und *permutando* BD : DC = EF : FG. Q. E. D.

e 4. 6.
f 11. 5.

Berechnung.

Weil in dem △ AEG der Scheitelwinkel EAG, und die Segmente EF, FG gegeben sind,

sind, so lassen sich, vermittelst des vorhergehenden Lehnsatzes, die Winkel AEG, AGE finden, mithin sind die Winkel ABC, ACB gegeben; nun ist in dem △ ADB das Loth AD gegeben, folglich läßt sich AB finden; und auf gleiche Weise AC; folglich läßt sich das △ ABC berechnen.

Bestimmung.

Ist das Loth $AD < AF$, so liegt BC über EG; ist $AD = AF$, so fällt BC auf EG; ist aber $AD > AF$, so liegt BC unter EG.

Aufgabe VII.

Der Scheitelwinkel BAC, die Summe der Seiten BA, AC, und die Verhältnis der, durchs Loth AD formirten Segmente der Grundlinie, BD, DC, sind gegeben; das Dreyek zu finden. Fig. 110.

Analysis.

BAC sey das zu findende Dreyek. Weil nun der Winkel BAC gegeben ist, und AD mit BC einen gegebenen Winkel macht, auch die Ver-

a 79. dat. Verhältnis BD : DC gegeben ist, so ist [a] das △ ABC der Gattung nach gegeben, mithin ist
b 7. dat. BA : AC gegeben, wie auch [b] BA + AC : BA; nun ist (*hyp.*) BA + AC gegeben, folg-
c 2. dat. lich [c] ist BA gegeben, folglich [d] ist △ ABC
d 56. dat. auch der Größe nach gegeben.

Construction.

Auf einer unbegränzten Linie nehme man EF, FG, gleich den gegebenen Linien, die die Verhältnis der Segmente ausdrücken, und beschreibe über EG einen, des gegebenen Scheitelwinkels fähigen Kreis = Abschnitt. Aus F richte man über EG das Loth FH auf, bis es dem Umfang in H begegne, und vereinige EH, GH. Auf der verlängerten EH nehme man HK = HG, und ziehe GK; alsdann nehme man KB gleich der gegebenen Summe der Seiten, und durch B ziehe man BC parallel mit EG, und CA parallel mit GH; so wird ABC das gesuchte Dreyek seyn.

Beweis.

Weil AC mit HG parallel ist, so ist KA : AC = KH : GH, nun ist KH = HG (*constr.*) mithin ist KA = AC, folglich ist BA + AC = BK, das ist, der

der gegebenen Summe der Seiten. Ferner ist e der Winkel BAC = EHG, das ist, dem gegebenen Scheitelwinkel. Endlich, wenn von A auf BC das Loth AD gefällt wird, so ist BD : DC = EF : FG, wie sich leicht aus 4. 6, und 11. 5 Elem. herleiten läßt; folglich haben die Segmente BD, DC die gegebene Verhältnis, Q. E. D. e 29. 1.

Berechnung.

Vermittelst des Lehnsatzes der Aufgabe V. lassen sich die Winkel an der Grundlinie EG finden, mithin auch die, ihnen gleiche Winkel ABC, ACB; nun ist, weil AC = AK, BAC = 2 K, folglich ist der Winkel K gegeben; folglich, weil BK gegeben ist, so läßt sich in dem △ BKC die Seite BC finden; mithin läßt sich das △ ABC berechnen.

Andere Auflösung. Fig. 111.

Nachdem man, wie vorhin, das △ HEG gefunden hat, so trage man auf die verlängerte HG die Linie HL gleich der gegebenen Summe der Seiten. Ferner mache man auf der verlängerten HE, von E aus, die Linie EM = HG, und vereinige LM; endlich mache man

HK

HK = HG, und durch K ziehe man KC parallel mit ML, und durch C ziehe man CB parallel mit GE; so wird HBC das gesuchte Dreyek seyn.

Beweis.

Weil BC parallel ist mit GF, so ist HC : HG = HB : HE; und weil KC parallel ist mit ML, so ist[f] HC : (HK) HG = CL : KM, mithin ist HB : HE = CL : KM, nun ist (*constr.*) HK = EM, mithin HE = KM; folglich ist HB = CL, folglich BH + HC = HL, das ist, der gegebenen Summe der Seiten. Das übrige läßt sich leicht aus der *constr.* herleiten.

f 4. 6. & 19 5. Cor.

Anmerkung.

Ich habe diese zweyte Auflösung hier beygefügt, um zu weisen, wie einerley Problem sich auf mehrere Arten auflösen läßt. Allein die erstere Auflösung ist geometrischer; die leztere habe ich durch algebraische Kunstgriffe gefunden.

Aufgabe VIII.

Der Scheitelwinkel BAC, die Summe der Seiten BA, AC, und der Unterschied der durchs Loth formirten Segmente BD, DC, sind gegeben; das Dreyek zu finden. Fig. 112.

Analysis.

ABC sey das zu findende Dreyek. Aus A mit der kleinern Seite AC beschreibe man einen Kreis, der die Grundlinie BC in E schneide; man vereinige EA, und verlängere BA, bis sie dem Umfang in F begegne, und ziehe FE; demnach weil AF = AC, so ist BF gleich der Summe der Seiten, mithin gegeben; und weil[a] ED = DC, so ist BE der Unterschied der Seiten, mithin gegeben. Ferner weil[b] der Winkel FEC gleich ist dem halben FAC, dieser aber, als der Nebenwinkel von BAC, gegeben ist, so ist FEC gegeben, mithin ist FEB gegeben; nun ist[c] BF:BE gegeben, folglich[d] ist das △ BEF der Gattung nach gegeben, und der Winkel BFE ist gegeben; mithin ist das △ BEF wegen der gegebenen BE auch der Größe nach gegeben; folglich[e] ist EF gegeben; aus gleichem Grund ist in dem △ AEF die Seite

a 3. 3.
b 20. 3.
c 1. dat.
d 47. dat.
e 60. dat.

AE

AE (= AC) gegeben, woraus erhellet, daß das △ ABC der Gattung und Größe nach gegeben ist.

Construction.

Auf einer unbegränzten Linie nehme man BE gleich dem gegebenen Unterschied der Segmente. Man mache den Winkel CEF gleich dem halben Nebenwinkel des gegebenen Scheitelwinkels; aus B schneide man EF mit der gegebenen Summe der Seiten in F, und vereinige BF; dann mache man den Winkel FEA = AFE; aus A mit AE beschreibe man einen Kreis, der die unbegränzte Linie in C schneide, und ziehe AC; so wird △ ABC das gesuchte Dreyek seyn.

Beweis.

Daß es die gegebene Summe, und den gegebenen Unterschied hat, fällt in die Augen; und weil FEC gleich ist dem halben Nebenwinkel des gegebenen Winkels, so ist FAC gleich diesem Nebenwinkel, und BAC muß daher dem gegebenen Scheitelwinkel gleich seyn. Q. E. D.

Berechnung.

In dem △ BEF sind zwo Seiten und der Winkel BEF gegeben, mithin läßt sich die Seite EF, und die übrigen Winkel finden; folglich läßt sich in dem △ AEF die Seite AF, das ist AC finden; nun ist BA + AC gegeben, mithin läßt sich BA finden; und weil der Scheitelwinkel BAC gegeben ist; so läßt sich das △ BAC berechnen.

Aufgabe IX.

Der Scheitelwinkel BAC, der Unterschied der Seiten BA, AC, und der Unterschied der durchs Loth formirten Segmente BD, DC, sind gegeben; das Dreyek zu finden. Fig. 113.

Analysis.

ABC sey das gesuchte Dreyek. Aus A mit der kleinern Seite AC beschreibe man einen Kreis, der die Grundlinie in E, und die Seite BA in G schneide; man vereinige AE, EG, und verlängere BA bis in F, und vereinige FC; demnach weil BAC gegeben ist, so ist der Nebenwinkel F A C gegeben, mithin ist in dem gleichschenklichten △ AFC der Winkel F gegeben; nun sind[a] die Winkel E + GEC gleich zween rechten, folglich ist GEC gegeben, mithin auch sein Nebenwinkel BEG; nun ist BE der Unterschied der Segmente, folglich gegeben; und eben so ist BG, der Unterschied der Seiten gegeben; folglich ist das △ BEG der Gattung und Größe nach gegeben. Woraus erhellet, daß das △ BAC der Gattung und Größe nach gegeben ist.

a 22. 3.

Construction.

Auf einer unbegränzten Linie nehme man BE gleich dem gegebenen Unterschied der Segmente; an E mache man den Winkel BEn gleich der Hälfte des gegebenen Scheitelwinkels, und aus B schneide man mit dem gegebenen Unterschied der Seiten die Linie En in G; man verlängere BG, und mache den Winkel GEA = AGE; aus dem Punct A, wo GA, EA einander schneiden, mit AE beschreibe man einen Kreis, der die unbegränzte Linie in C schneide, und vereinige AC; so wird △ ABC das gesuchte Dreyek seyn.

Beweis.

Man ziehe das Loth AD, und von F, wo der Kreis die verlängerte BA schneidet, vereinige man FC. Weil nun BEG + GEC gleich sind zween rechten, und eben so[a] F + GEC gleich sind zween rechten, so ist BEG = F, mithin ist F gleich der Hälfte des gegebenen Winkels; nun ist BAC = 2F, folglich ist BAC gleich dem gegebenen Winkel. Q. E. D.

Berechnung.

In dem △ BEG läßt sich die Seite EG samt dem Winkel BGE finden, mithin ist der Winkel AGE gegeben; folglich läßt sich in dem gleichschenklichten Dreyek AGE die Seite AG finden; mithin ist AC gegeben, folglich auch AB, und das △ BAC läßt sich berechnen.

Bestimmung.

Wenn der aus B mit BG beschriebene Kreis die Linie En bloß berührt; so begegnen sich die Linien GA und EA nicht, und das △ BAC läßt sich nicht verzeichnen.

Erreicht er E n gar nicht, so ist das Dreyek gleicherweise unmöglich.

Aufgabe X.

Die Grundlinie BC, das von A auf BC gefällte Loth, und der Unterschied der Winkel an der Grundlinie ABC, ACB, sind gegeben; das Dreyek zu finden. Fig. 114.

Analysis.

ABC sey das zu findende Dreyek. Man
a 5. 4. beschreibe[a] um dasselbe einen Kreis, dessen Mittelpunct O sey; aus D, der Mitte von BC, durch O ziehe man an den Umfang die Linie DF;
b 3. 3. sie wird[b] senkrecht auf BC seyn. Durch A ziehe man AM parallel mit BC, und AM schneide DF in E, und den Umfang in G; und man
c 22. 3. vereinige GC. Nun ist[c] AGC + ABC gleich
d 29. 1. zween rechten Winkeln, und[d] AGC + GCB ist auch gleich zween rechten, folglich ist GCB = ABC, mithin ist ACG gleich dem gegebenen Unterschied der Winkel an der Grundlinie.
e 20. 3. Nun vereinige man AO, so ist[e] der Winkel AOF = ACG, folglich gegeben; ferner ist
f 29. 1. OEA, als ein rechter Winkel[f] gegeben, folg-
g 43. dat. lich[g] ist das △ AOE der Gattung nach gegeben, mithin ist EO : OA, oder EO : OB ge-

gegeben; nun ist in dem, der Gattung und Größe nach gegebenen △ BDE der Winkel BED gegeben, folglich[h] ist das △ BOE der Gattung nach gegeben, und der Winkel EBO ist gegeben; folglich weil der Winkel EBD gegeben ist, so ist der Winkel OBD gegeben, folglich[g] ist das △ OBD der Gattung nach, und, wegen der gegebenen BD, auch der Größe nach gegeben; folglich ist BO gegeben.

h 47. dat.

Hieraus fließt folgende Composition.

Construction.

Man nehme die gegebene Grundlinie BC der Lage nach an, und richte aus ihrer Mitte D das Loth DF auf; auf DF nehme man DE gleich dem gegebenen Loth, und durch E ziehe man HM parallel mit BC; aus D an HM ziehe man DH, so daß EDH gleich ist dem gegebenen Unterschied der Winkel; dann vereinige man EB, und aus D mit DH schneide man die verlängerte EB in Q; aus B ziehe man BO parallel mit QD; und aus O, wo sie dem Loth DF begegnet, ziehe man OA parallel mit DH; so wird der Punct A, wo OA der HM begegnet, der Scheitelpunct, und wenn man AB, AC vereiniget, so wird △ ABC das gesuchte Dreyeck seyn.

Beweis.

Es hat, wie in die Augen fällt, die gegebene Grundlinie, und das gegebene Loth. Ferner ist wegen der Parallel-Linien, EO : ED = OA : DH, und EO : ED = OB : DQ, folglich OA : DH = OB : DQ, nun ist (*constr.*) DH = DQ, mithin ist OA = OB; folglich wird der, aus O mit OB beschriebene Kreis durch A gehen; und er wird, nachdem er HM in G geschnitten hat, auch durch C gehen. Nun vereinige man GC, so ist, wie aus der Analysis erhellet, AOE = ACG; nun ist ACG = ABC — ACB, und AOE = HDE, das ist (*constr.*) dem gegebenen Unterschied der Winkel, folglich haben ABC, ACB den gegebenen Unterschied. Q. E. D.

Berechnung.

In dem △ HDE läßt sich aus den gegebenen Dingen die Seite HD finden, mithin ist die gleiche DQ gegeben; nun läßt sich in dem △ BED der Winkel BED finden, folglich läßt sich in dem △ QDE der Winkel QDE finden; mithin ist der gleiche Winkel BOE gegeben; nun ist AOE gegeben, folglich auch BOA; nun ist BOA = $\frac{1}{2}$ BCA, mithin ist BCA

BCA gegeben, folglich auch ABC, und das △ ABC läßt sich berechnen.

Andere Auflösung. Fig. 115.

ABC sey das zu findende Dreyek. Durch den Scheitelpunct A ziehe man MN parallel mit DC, so ist, wenn die Lage von BC gegeben ist, wegen des gegebenen Lothes auch die Lage von MN gegeben[a]. Aus A mit AC schneide man AB in D, und ziehe CD, so ist der Winkel BCD gleich der Hälfte des Unterschiedes der Winkel, mithin gegeben. a 37. dat.

Nun verlängere man CD, bis sie MN in E schneide; so ist das △ BDC dem △ EDA ähnlich, folglich ist BC : CD = EA : ED; ferner wenn man auf EC von B und A die Linien BG, AF senkrecht zieht, so ist das △ BCG dem △ EAF ähnlich; folglich BC:CG = EA : EF; folglich ist CD : CG = ED : EF, und *componendo* (CD + DE) CE : CG + EF = CD : CG; nun trage man auf die verlängerte CE die Linie CG aus E nach R, so ist CG + EF = RF, mithin CE : RF = CD : ER; oder CE : RF = ($\frac{1}{2}$ CD) FC : $\frac{1}{2}$ ER, folglich $\frac{1}{2}$ ER × CE = RF × FC; nun sind CE, ER gegeben,

lich ist das Rechtek RF × FC gegeben; nun ist die Linie RC der Lage und Größe nach gegeben; folglich läßt sich der Punct F finden, und FA
b 28. dat. ist der Lage nach gegeben; folglich ist b der Punct A gegeben, und das △ ABC ist gegeben.

Construction.

Ueber der gegebenen Grundlinie BC ziehe man MN in der gegebenen Lage; an C mache man den Winkel BCE gleich der Hälfte des gegebenen Unterschiedes; und CE schneide MN in E. Von B ziehe man BG senkrecht auf CE, und auf der verlängerten CE nehme man ER = GC; über RC, als dem Durchmesser, beschreibe man einen Kreis. Nun suche man zwischen CE und $\frac{1}{2}$ ER eine mittlere Proportional-Linie CK, und richte CK von C senkrecht auf; durch K ziehe man KL parallel mit RC; aus L, wo sie dem Umfang des Kreises begegnet, fälle man auf RC das Loth LF; an A, wo LF die MN schneidet, ziehe man BA, CA, so ist △ ABC das gesuchte Dreyek.

Beweis.

Es hat die gegebene Grundlinie, und das gegebene Loth. Ferner ist, wie aus der Analy-
sis

sis erhellet, $CE:RF = CD:ER$, und weil (*constr.*) $\frac{1}{2} ER \times CE = (CKq) LFq$, und [c] $LFq = RF \times FC$, so ist $CE:RF$ c 35. 3. $= FG:\frac{1}{2} ER$; folglich $CD:ER = FC:\frac{1}{2} ER$; weil nun $\frac{1}{2} ER$ die Hälfte von ER ist, so muß FC die Hälfte von CD, das ist DF muß gleich FC seyn; woraus folgt, daß $DA = AC$, und die Winkel ACB, ABC den gegebenen Unterschied haben.

Anmerkung.

So habe ich die Aufgabe aufgelöst, eh ich die vorhergehende Auflösung kannte; man wird leicht urtheilen, daß jene dieser vorzuziehen ist.

Bestimmung.

Wenn KL dem Umfang des Kreises nicht begegnet, so enthält die Aufgabe etwas unmögliches.

Dritte Auflösung. Fig. 116.

Folgende Auflösung ist wegen ihrer Kürze der nächstvorhergehenden vorzuziehen.

ABC sey, wie vorhin, das zu findende Dreyek, und MN die der Lage nach gegebene Linie.

Man mache ACF = ABC, so ist der Winkel BCF der Unterschied der Winkel an der Grundlinie, mithin gegeben, folglich [a] ist der Punct F gegeben. Nun ist FAK = (ABC =) ACF, folglich ist das △ FAK dem △ FCA ähnlich, mithin ist FC : FA = FA : FK; nun ziehe man BD parallel mit CF, so ist FA : FK = AD : DB, folglich FC : FA = AD : DB, mithin ist FC × DB = FA × AD, nun sind FC, DB gegeben, folglich ist FA × AD gegeben; folglich läßt sich der Punct A finden.

a 28. dat.

Construction.

Von C ziehe man an MN die Linie CF so daß BCF gleich sey dem gegebenen Unterschied der Winkel, und aus B ziehe man BD parallel mit CF; über DF, als dem Durchmesser, beschreibe man einen Kreis. Nun suche man zwischen BD, FC eine mittlere Proportional-Linie FH, und setze sie von F senkrecht auf DF; man vereinige H, und E, den Mittelpunct des Kreises; und aus E mit EH schneide man MN

in

in A; an A ziehe man BA, CA, so wird △ ACB das gesuchte Dreyek seyn.

Beweis.

Man vereinige A, und G, wo FH den Umfang des Kreises schneidet, so ist in den △△ EAG, EHF, die Seite EA = EH, EG = EF, und der Winkel GEA = FEH; mithin ist AG = FH, und EGA = EFH, einem rechten Winkel; folglich[b] ist AG eine Tangente; mithin[c] ist (AGq) FHq = AF × AD, oder weil (*constr.*) FHq = DB × FC, so ist DB × FC = AF × AD, folglich AF : DB = FC : AD, nun ist DB : FK = DA : AF, folglich *ex æquo* AF : FK = FC : AF, mithin[d] ist △ AFE dem △ AFC ähnlich, folglich ist der Winkel FAK = FCA, nun ist FAK = ABC, folglich ist FCA = ABC, folglich haben die Winkel an der Grundlinie den gegebenen Unterschied. Q. E. D.

b 16. 3. Cor.
c 26. 3.
d 6. 6.

Aufgabe XI.

Der Scheitelwinkel BAC, der Unterschied der Seiten BA, AB, und die Verhältnis

nis der durchs Loth formirten Segmente BD, DC, sind gegeben; das Dreyek zu finden. Fig. 117.

Analysis.

ABC sey das zu findende Dreyek. Weil demnach das von dem gegebenen Winkel BAC gefällte Loth AD einen gegebenen Winkel mit
a 79. dat. BC macht, und BD:DC gegeben ist, so ist[a]
das △ ABC der Gattung nach gegeben; mit-
b 6. dat. hin ist BA : AC gegeben, folglich[b] ist auch
BA : BA — AC gegeben; nun ist BA—AC gegeben (*hyp.*) folglich auch BA; folglich ist
c 56. dat. das △ BAC auch der Größe nach gegeben[c], und alles darin ist gegeben.

Construction.

Auf eine unbegränzte Linie trage man die Linien EF, FG, die die Verhältnis der Segmente ausdrücken. Ueber EG beschreibe man einen, des gegebenen Scheitelwinkels fähigen Kreis-Abschnitt; aus F richte man ein Loth auf, das dem Umfang in A begegne, und vereinige EA, AG; auf EA trage man EP = AG, und vereinige PG; aus A auf AE trage man AQ gleich dem gegebenen Unterschied

der

der Seiten; durch Q ziehe man QC parallel mit PG; und von C, wo QC die Linie AG schneidet, ziehe man CB parallel mit EG; so wird $\triangle$ ABC das gesuchte Dreyek seyn.

Beweis.

Es hat den gegebenen Scheitelwinkel (*constr.*) und[d] BD : DC = EF : FG; aus eben dem Grund ist AB : AE = AQ : AP; folglich *permutando & dividendo* AB — AQ : AE — AP = AQ : AP, das ist, QB : EP = (AQ : AP =) AC : AG, nun ist (*constr.*) EP = AG, folglich QB = AC, folglich haben die Seiten den gegebenen Unterschied. Q. E. D.

d 4. 6. & 11. 5.

Berechnung.

Nach dem Lehnsatz der Aufg. V. lassen sich in dem $\triangle$ AEG die Winkel an der Grundlinie finden, mithin auch die Winkel ABC, ACB; nun ist (Trig.) $BA + AC : BA - AC = \tan \frac{1}{2}(ABC + ACB) : \tan \frac{1}{2}(ABC - ACB)$, und BA — AC ist gegeben, folglich läßt sich BA + AC finden; folglich ist jede der Seiten BA, AC gegeben; und das Dreyek ABC läßt sich berechnen.

Auf=

Aufgabe XII.

Der Scheitelwinkel B A C, das Loth A D, und der Unterschied der Segmente B D, D C, sind gegeben; das Dreyek zu finden. Fig. 118.

Analysis.

ABC sey das zu findende Dreyek. Aus A ziehe man auf E, der Mitte von BC, die Linie AE; so ist, wie sich leicht beweisen läßt, BD — DC = 2DE; nun ist (*hyp.*) BD−DC gegeben, folglich auch DE; und weil das Loth DA gegeben ist, so ist das △ EDA der Gattung und Größe nach gegeben, mithin ist der
79. dat. Winkel A E D gegeben, folglich[a] ist das △ ABC der Gattung nach gegeben, und der Winkel ACB ist gegeben; folglich ist das △ ADC der Gattung und Größe nach gegeben, und AC ist gegeben; aus eben dem Grund ist BA gegeben; folglich ist das △ ABC der Gattung und Größe nach gegeben.

Construction.

Auf einer unbegränzten Linie R S nehme man ED gleich der Hälfte des gegebenen Unterterschiedes der Seiten; von D richte man D A gleich dem gegebenen Loth auf, und vereinige E A. Auf beyden Seiten von E nehme man nach Willkühr zwo gleiche Linien E F, E G, und beschreibe über F G einen des gegebenen Scheitelwinkels fähigen Kreis-Abschnitt; an H, wo er E A schneidet, von F und G ziehe man F H, G H, und von dem Punct A ziehe man A B, A C parallel mit H F, H G, bis sie der Linie R S in B und C begegnen; so wird △ A B C das gesuchte Dreyek seyn.

Beweis.

Es hat das gegebene Loth. Ferner weil A B mit H F, und A C mit H G parallel ist, so ist[b] der Winkel B A C = F H G, das ist, dem gegebenen Scheitelwinkel. Endlich weil E H : E A = E F : E B, und E H : E A = E G : E C, so ist E F : E B = E G : E C; nun ist (*constr.*) E F = E G, mithin E B = E C, folglich ist B D — D C = 2 E D; nun ist (*constr.*) E D die Hälfte des gegebenen Unterschiedes, folglich haben die Segmente der Grundlinie den gegebenen Unterschied.

b 29. I.

Be-

Berechnung.

Nach dem Lehnsatz der Aufgabe V. lassen sich in dem △ FHG die Winkel an der Grundlinie finden; folglich sind die Winkel ABC, ACB gegeben, mithin läßt sich in dem △ ADC die Seite AC, und in dem △ ADB die Seite AB finden; folglich läßt sich das △ ABC berechnen.

Andere Auflösung. Fig 119.

Die vorhergehende Composition habe ich aus der angestellten Analysis hergeleitet: sie ist, wie man sieht, sehr simpel. Ich habe anderswo eine andere Auflösung eben dieses Problems gefunden, die ich wegen ihrer Zierlichkeit hersetzen will.

Ueber einer unbegränzten Linie RS verzeichne man, wie vorhin, das △ ADE; aus E ziehe man an RS das Loth EM; aus D ziehe man Dn, so daß der Winkel EDn gleich sey dem Ueberschuß des gegebenen, (hier stumpfen) Winkels über einen Rechten; mit Dn schneide man EA aus n in p, und vereinige pn; von A ziehe man AO parallel mit pn, und von O ziehe man OC parallel mit Dn. Aus O als dem Mittelpunct mit dem Halbmesser O C beschreibe man einen Kreis, der die Linie R S in B schneide, und vereinige A C, AB; so wird das △ ABC das gesuchte Dreyek seyn.

Beweis.

Weil ME senkrecht ist auf RS, so ist [c] BE [c 3. 3.]
= EC, folglich, wie vorhin, BD — DC = 2 ED. Ferner ist klar, daß pn:OA = nD:OC, nun ist (*constr.*) pn = nD, mithin OA = OC, folglich geht der Kreis durch den Punct A. Weil nun [d] BOC = 2(ABC [d 20. 3.]
+ ACB), und [e] OE den Winkel BOC halbirt, [e 8. 1.]
so ist EOC = ABC + ACB, folglich OEC + OCE = BAC; nun ist OCE = EDn, und (*constr.*) EDn der Ueberschuß des gegebenen Winkels über einen rechten, folglich, weil OEC ein rechter Winkel ist, so muß BAC dem gegebenen Scheitelwinkel gleich seyn. Q. E. D.

Aufgabe XIII.

Der Kreis = Abschnitt ACB ist der Lage und Größe nach gegeben, den Punct C zu finden, so daß die, von den Endpuncten der geraden Linie A B an C gezogenen Linien AC, BC, die Verhältnis der gegebenen Linien M, N haben. Fig. 120.

Analysis.

Man setze, C sey der zu findende Punct, und AC, CB haben die gegebene Verhältnis; weil nun der Kreis = Abschnitt ACB der Lage
a 8. def. dat. und Größe nach gegeben ist, so ist [a] der Winkel ACB gegeben; folglich weil AC : CB gege-
b 44. dat. ben ist, so ist [b] das △ ACB der Gattung nach gegeben; mithin ist der Winkel B A C gegeben,
c 32. dat. und [c] die Linie A C ist der Lage nach gegeben;
d 28. dat. folglich [d] ist der Punct C gegeben.

Construction.

An B mache man den Winkel ABD = ACB; zu den gegebenen Linien M, N, AB, suche man die vierte Proportional = Linie, und trage sie auf BD von B nach D; man vereinige AD; an C, wo AD den Bogen schneidet, ziehe man AC, BC; so wird AC zu CB die gegebene Verhältnis haben.

Be-

Beweis.

Weil ABD = ACB (*constr.*) und CAB = CAB, so sind die △△ACB, ADB einander ähnlich; folglich ist AC : CB = AB : BD; nun ist (*constr.*) AB : BD = M : N, folglich ist AC : CB = M : N. Q. E. D.

Anmerkung.

Diese Aufgabe ist aus dem Pappus genommen; allein meine Auflösung ist von der seinigen verschieden. Er zieht an den zu findenden Punct C eine Tangente, die der verlängerten AB begegnet, und geräth dadurch auf eine Analysis, die weit nicht so simpel ist als die meinige.

Aufgabe XIV.

Der Unterschied der Seiten AC, AB, der Unterschied der durchs Loth formirten Segmente CD, DB, und der Unterschied der Winkel an der Grundlinie ABC, ACB, sind gegeben; das Dreyek zu finden. Fig. 121.

Analysis.

A B C sey das zu findende Dreyek. Man mache D E = D B, und ziehe A E, so ist A E = A B; aus A mit A E schneide man
a 32. 1. A C in F, und vereinige E F. Demnach weil a der Winkel A B E, das ist, A E B = C A E + A C E, so ist C A E der Unterschied der Winkel an der Grundlinie, folglich gegeben; mithin ist in dem gleichschenklichten △ A F E der Winkel A F E gegeben, folglich auch sein Nebenwinkel E F C; nun ist in dem △ E F C, C D, der Unterschied der Seiten, und E C, der Unterschied der Segmente, gegeben; folglich ist das Dreyek der Gattung und Größe nach gegeben. Hieraus fließt folgende Composition.

Construction.

Man füge dem gegebenen Winkel seinen halben Nebenwinkel bey; und über E C, dem gegebenen Unterschied der Segmente, beschreibe man einen Kreis = Abschnitt E F C, der dieses Winkels fähig sey. Aus C mit C F, dem gegebenen Unterschied der Seiten, schneide man den Bogen in F, und verlängere C F; alsdann mache man den Winkel F E A = A F E; von A, wo F A, E A einander schneiden, fälle man auf die verläng=

längerte CE das Loth AD, und mache DB = DE, und vereinige BA; so ist △ ABC das gesuchte Dreyek.

Beweis.

Er läßt sich leicht aus der Construction und der Analysis herleiten.

Berechnung.

In dem △ EFC läßt sich der Winkel C finden; folglich läßt sich in dem △ AEC AC, und AE, das ist, AB, finden, folglich läßt sich das △ ABC berechnen.

Aufgabe XV.

In ein gegebenes Dreyek ABC ein Dreyek einzuschreiben, das einem gegebenen Dreyek ähnlich (*triangulum specie datum*,) und dessen eine Seite mit der Grundlinie BC parallel sey. Fig. 122.

Analysis.

FDE sey das einzuschreibende Dreyek. Weil nun FE parallel ist mit BC, so ist der Win-

a 43 dat. Winkel AFE (= ABC) gegeben; mithin[a] ist das △ FBD der Gattung nach gegeben, folglich ist BD : DF gegeben; nun ist (*hyp.*)
b 9. dat. FD : DE gegeben, folglich[b] ist BD : DE gegeben; ferner weil das △ EDC der Gattung nach gegeben ist, so ist ED : DC gegeben, folglich[b] ist BD : DC gegeben; nun ist die Linie
c 8. dat. BC gegeben, folglich[c] ist BD gegeben, folglich ist der Punct D gegeben, und weil der Winkel
d 28. dat. BDF gegeben ist, so ist[d] der Punct F gegeben, und weil FE parallel ist mit BC, so ist[d] auch der Punct E gegeben; folglich ist das △ FDE nach allen Theilen bestimmt.

Construction.

An BC lege man das △ BCG an, das
e 18. 6. dem gegebenen Dreyek ähnlich sey[e], und vereinige A, G; von D, wo AG die Linie BC schneidet, ziehe man DF parallel mit BG, und DE parallel mit CG, und vereinige F, E; so ist △ FED das einzuschreibende Dreyek.

Beweis.

Weil FD, BG, und ED, CG parallel
f 29. 1. sind, so ist[f] der Winkel FDE = BGC; aus
g 4. 6. eben dem Grund ist[g] FD : GB = ED : GC;

folg-

folglich [h] ist das △ FDE dem △ BGC ähnlich; und weil AFD = ABG, und EFD = CBG, so ist AFE = ABC, folglich ist FE parallel mit BC. Q. E. D. h 6. 6.

Berechnung.

In dem △ BCG läßt sich BG und der Winkel CBG finden, folglich läßt sich in dem △ ABG der Winkel BAG, mithin in dem △ BAD die Seite BD finden; folglich lassen sich in den △△ BDF, DEC die Seiten DF, DE finden; und das △ FDE ist nach allen Theilen bestimmt.

Zusatz. 1. Fig. 123.

Wäre in der Aufgabe gefodert, daß FE mit AB oder AC überhaupt einen gegebenen Winkel machen soll; so würde man ACH gleich dem gegebenen Winkel machen, und in das △ AHC, wie vorhin, das △ fde einschreiben, und dann durch D die Linien DF, DE mit df, de parallel ziehen: so wird △ FDE das einzuschreibende Dreyek seyn.

Zusatz. 2. Fig. 124.

Auf eine ähnliche Art läßt sich in ein gegebenes Dreyek ein der Gattung nach gegebenes Parallelogramm einschreiben. Ich will hier nur die Figur hersetzen, weil die Verzeichnung und der Beweis sich leicht daraus abnehmen lassen. Hieraus erhellet, wie sich ein Quadrat in ein gegebenes Dreyek einschreiben läßt; eine Aufgabe, wozu Guinée in seiner Application de l' Algèbre à la Géometrie die Algebra gebraucht: die Verzeichnung, die er aus seiner Gleichung herleitet, ist bey weitem nicht so simpel, wie die meinige.

Aufgabe XVI.

In den gegebenen Quadranten ABC einen Kreis einzuschreiben, der den Bogen AB, und die beyden Halbmesser CA, CB berühre. Fig. 125.

Analysis.

EHF sey der einzuschreibende Kreis, sein Mittelpunct sey G, und die Berührungs-Puncte seyen H, F, E.

Man

Man ziehe GH, GF, so ist[a], weil ACB ein rechter Winkel ist, GHCF ein Prllgr, mithin, weil GF = GH, ein Quadrat; folglich ist BCG ein halber rechter Winkel, demnach[b] ist CG der Lage nach gegeben. Nun verlängere man CG, so wird[c] CG durch den Punct E gehen, folglich[d] ist der Punct E gegeben. Man vereinige EF, so ist in dem gleichschenklichten △GEF der Winkel GEF = $\frac{1}{2}$ FGC, mithin gegeben; folglich[d] ist der Punct F gegeben, und weil FG der Lage nach gegeben ist, so ist[d] der Punct G gegeben; folglich[e] ist der Kreis EFH der Lage und Größe nach gegeben.

a 18. 3. & 29. 1.
b 32. dat.
c 11. 3.
d 28. dat.
e 6 def. dat.

Construction.

Man theile den rechten Winkel ACB durch CE in zween gleiche Theile, und die Hälfte ECA wiederum in zween gleiche Theile durch CD; durch den Punct E, wo CE dem Bogen AB begegnet, ziehe man EF parallel mit DC; von F ziehe man FG so daß der Winkel EFG = FEG; aus dem Punct G, wo FG die Linie CE schneidet, mit dem Halbmesser GF beschreibe man einen Kreis; so wird dieser Kreis BC, CA und BA berühren.

Beweis.

f 29. 1. Weil E F parallel ist mit D C, so ist f FEG = DCE, mithin CGF = ACE = GCF, folglich, weil G C F ein halber rechter ist, so ist GFC ein rechter Winkel, mithin g berührt der Kreis die Linie BC in F. Ferner fälle man G H senkrecht auf A C, so ist GH = GF, mithin geht der Kreis durch H, und g berührt daselbst A C. Endlich weil GE = GF, so geht der Kreis durch E, und zwar wird er dem Bogen in keinem andern Punkte begegnen, sonst würde eine aus C an diesen Punct gezogene Linie gleich CE seyn, welches ungereimt ist h; mithin i berührt er den Bogen in E. Q. E. D.

g 16. 8. cor.

h 8. 3.

i 3. def. 3.

Berechnung.

In dem △ ECF ist EC, der Halbmesser des Quadranten, samt den daran liegenden Winkeln gegeben, mithin läßt sich CF finden; folglich läßt sich in dem △ GCF, GF, der Halbmesser des einzuschreibenden Kreises, finden.

Auf-

Aufgabe XVII.

Durch den Punct P, wo zween der Lage und Größe nach gegebene Kreise A, B, einander schneiden, eine der Größe nach gegebene gerade Linie zu ziehen, die dem Umfang eines jeden Kreises wiederum begegne. Fig. 126.

Analysis.

Die gegebene Linie EPF begegne dem Kreis A in E, und dem Kreis B in F. Aus den Mittelpuncten A, B ziehe man AD, BG senkrecht auf EF, so ist[a] DG $= \frac{1}{2}$ EF, mithin gegeben; von B ziehe man Bn parallel mit DG, so ist[b] Bn $=$ DG, mithin gegeben; und weil in dem $\triangle$ ABn auch die Seite AB samt dem rechten Winkel AnB gegeben ist, so ist das $\triangle$ AnB der Gattung und Größe nach gegeben, und der Winkel ABn ist gegeben; folglich[c] ist Bn der Lage nach gegeben; folglich, weil der Punct P gegeben ist, so ist[d] EF der Lage nach gegeben.

a 3. 3.
b 24. 1.
c 22. dat.
d 21. dat.

Con-

Construction.

Aus B, einem der Mittelpuncte, mit der Hälfte der gegebenen Linie beschreibe man einen Kreis o n m; von A, dem andern Mittelpunct, ziehe man eine Tangente an diesen Kreis, und vereinige den Berührungs = Punct n und B; durch P, wo die zween Kreise einander schneiden, ziehe man E F parallel mit B n, so daß sie den beyden Kreisen in E und F begegne; so wird E F der gegebenen Linie gleich seyn.

Beweis.

Er läßt sich leicht aus der Analysis und Construction herleiten.

Bestimmung.

Wenn die Hälfte der gegebenen Linie größer ist, als A B, die Entfernung der Mittelpuncte, so giebt es keine Tangente wie A n, und die gegebene Linie ist zu groß als daß sie durch P auf die verlangte Art könnte angelegt werden.

Uebrigens erhellt, daß, weil es von A zwo Tangenten an den Kreis giebt, man die Linie

EF auch durch den Punct p, wo die Kreise einander noch einmal schneiden, anlegen kann.

Aufgabe XVIII.

Die Linie AB ist der Größe und Lage nach, eine andere EF ist der Lage nach gegeben; auf dieser letztern den Punct zu finden, wo AB dem Auge unter dem größten Winkel erscheinen muß. Fig. 127.

Erforschung und Analysis.

Man wird leicht wahrnehmen, daß sich diese Aufgabe auf folgende reduciren läßt: durch A und B einen Kreis zu beschreiben, der die Linie EF berühre; denn alsdann werden die von dem Berührungs-Punct an A und B gezogenen Linien einen größern Winkel machen, als die von irgend einem andern Punct in EF dahin gezogenen Linien. Demnach weil der Kreis durch A und B gehen soll, so wird sein Mittelpunct in einem, aus der Mitte von AB aufgerichteten Loth CE liegen[a]; er sey D, und der Berührungs-Punct G; und das Loth CE begegne der Linie EF in E. Man vereinige EB, DB, DG, GB, so ist[b] das △ DEG der Gattung nach

a 1. 3.

b 43. dat.

nach gegeben, mithin ist ED:DG, oder ED: DB gegeben; nun ist der Winkel DEB gegeben, folglich [c] ist das △ DEB der Gattung nach gegeben, mithin ist der Winkel EBD gegeben; nun ist EBC gegeben, folglich auch DBC; folglich ist das △ BCD der Gattung und Größe nach gegeben.

c 47. dat.

Construction.

Von E, wo das aus der Mitte C aufgerichtete Loth der Linie EF begegnet, an B ziehe man EB. Von C ziehe man CH senkrecht auf EF, und aus eben dem Punct schneide man mit CH die verlängerte EA in I; alsdann ziehe man BD parallel mit CI, und aus D, wo BD das Loth schneidet, DG parallel mit CH; so wird der aus D mit DG beschriebene Kreis durch A und B gehen, und EF in G berühren; oder das Auge muß sich in G befinden, um die Linie AB unter dem größten Winkel zu sehen.

Beweis.

Es erhellet, daß DB:CI = DG:CH, nun ist (*constr.*) CI = CH, mithin DB = DG; ferner ist DA = DB, folglich wird der Kreis durch B und A gehen, und [d] er berührt

d 16. 3. cor.

rührt E F in G. Daß aber AGB der größte Winkel ist, wird man leicht wahrnehmen, wenn man von irgend einem andern Punct in EF Linien an A, B zieht; denn der Winkel im Kreis-Abschitt, der dem Winkel AGB gleich ist, wird immer der äussere Winkel, folglich größer seyn als der innere entgegengesezte. Q. E. D.

Berechnung.

In dem △ ECB läßt sich EC, mithin in dem △ FCH die Seite CH finden; nun ist CH = CI, folglich läßt sich in dem △ ECI der Winkel CIE finden; nun ist CIE = DBE, folglich ist DBE gegeben, mithin weil CBE gegeben ist, so läßt sich CBD finden; folglich läßt sich das △ DCB berechnen, und DB = DG ist gegeben.

Anmerkung.

Die gegebenen Dinge können zufälligerweise so beschaffen seyn, daß die Linie AG durch den Mittelpunct D geht, wie in der Figur.

Aufgabe XIX.

Die Linien AM, AN sind der Lage nach gegeben, und der Punct P in ihrem Zwischenraum ist gegeben; einen Kreis zu beschreiben, der durch den Punct P gehe, und die beyden Linien berühre. Fig. 128.

Analysis.

Der Mittelpunct des zu findenden Kreises sey E; die Berührungs = Puncte F, G; der Punct, wo die Linien zusammenstoßen, A.

Man vereinige AE, EF, EG, EP, AP; so erhellt, daß in den △△ FAE, GAE die Winkel FAE, GAE einander gleich sind; nun ist wegen der gegebenen Lage der Linien AM, AN, der Winkel FAG gegeben, folglich auch
a 43. dat. seine Hälfte FAE; mithin [a] ist △ AFE der Gattung nach gegeben; folglich ist AE : EF, das ist, AE : EP gegeben; und weil der Win-
b 47. dat. kel EAP gegeben ist, so ist [b] △ AEP der Gat-
c 28. dat. tung nach gegeben; folglich [c] ist der Punct E samt der Linie PE gegeben.

Con-

Construction.

Man halbire den Winkel M A N durch AH, und vereinige AP. Von einem willkühr-lichen Punct C der Linie A H ziehe man CB senkrecht auf AM, und aus C mit CB schneide man AP in D; durch P ziehe man PE parallel mit DC; so wird der, aus E mit EP beschrie-bene Kreis die beyden Linien AM, AN berühren.

Beweis.

Man ziehe E F parallel mit C B, so ist BC : FE = CD : E P, nun ist (*constr.*) BC = CD, mithin F E = E P, mithin geht der Kreis durch F, und weil EF senkrecht ist[e] auf A M, so berührt[f] A M den Kreis. e 29. I. Gleicherweise, wenn man E G senkrecht auf f 16. 3. cor. AN zieht, so ist EG = EF, und AN berührt den Kreis. Q. E. D.

Berechnung.

In dem △ A B C, wenn man AC als gegeben annimmt, läßt sich BC finden; folglich läßt sich in dem △ A D C der Winkel ADC finden, mithin auch der ihm gleiche A P E;

folglich läßt sich in dem $\triangle$ APE die Seite PE das ist, der Halbmesser des gesuchten Kreises finden.

Bestimmung.

Weil der aus C mit CB beschriebene Kreis die Linie AP immer in zween Puncten schneidet, so giebt es zween Kreise, die der Aufgabe genug thun; wenn nämlich der Punct P zwischen AM (oder AN) und der halbirenden Linie liegt. Liegt aber P auf der halbirenden Linie, so giebt es nur Einen Kreis: die Analysis in diesem Falle ist nicht schwehr zu finden.

Aufgabe XX.

Die Linien AM, AN sind der Lage nach gegeben, und der Punct E in ihrem Zwischenraum ist gegeben; durch diesen Punct eine Linie zu ziehen, die den Linien AM, AN begegne, und ein Dreyek beschließe, das einer gegebenen Fläche gleich sey. Fig. 129.

Analysis.

Der zu findende Punct sey C, und die, durch C und E gezogene Linie CEG beschließe das Dreyek GAC, das der gegebenen Fläche gleich sey. Durch den Punct E ziehe man EF parallel mit AN, und über der gegebenen AF unter dem gegebenen Winkel MAN mache man [a] ein Parallelogramm AD, das der gegebenen Fläche gleich sey; nun erhellt offenbar aus der Figur, daß die beyden △△ FGE, HBC zusammengenommen dem △ EHD gleich seyn müßen; nun sind alle diese Dreyecke einander ähnlich, folglich [b] △FGE : △HBC = FEq : BCq, mithin *componendo* △FGE + △HBC ; △HBC = FEq + BCq : BCq; ferner ist △HBC : △EDH = BCq : EDq, folglich *ex æquo* △FGE + HBC : △EDH = FEq + BCq : EDq, weil nun △FGE + HBC = △EDH, so ist FEq + BCq = EDq; nun ist FE, wie auch ED gegeben, folglich ist BC gegeben; und weil der Punct B gegeben ist, so ist auch C gegeben, und die Linie CEG ist der Lage und Größe nach gegeben.

a 45. I.

b 19. 6.

Construction.

Nachdem man [a] das Prllgr AFDB beschrieben hat, so ziehe man aus B die Linie BI senkrecht auf AN, und gleich FE; von I mit ED schneide man AN in C; durch C und den gegebenen Punct E ziehe man CEG; so wird das $\triangle$ AGC gleich seyn dem Prllgr AFDB, das ist, der gegebenen Fläche.

Beweis.

Er läßt sich leicht aus der Analysis und Construction herleiten.

Bestimmung.

Wenn FE = ED, so fällt der Punct C auf B; ist aber FE > ED, so erreicht IC die Linie AN nicht, und man hat ungereimte Dinge gegeben.

Berechnung.

Das Loth von E auf AN ist gegeben, mithin läßt sich, wegen der gegebenen Fläche des Prllgr, die Grundlinie AB finden; nun ist BC $= \sqrt{ED^2 - FE^2}$, mithin läßt sich BC berechnen.

Algebraische Analysis.

Ich will eben diese Aufgabe algebraisch auflösen, um durch ein Beyspiel zu zeigen, wie sehr die geometrischen Analysen den algebraischen vorzuziehen sind.

Man fälle von den Puncten F, G die Lothe FK, GL auf die Grundlinie herab, und setze, wie vorhin, FE parallel mit AC. Demnach ist $AF : FK = AG : GL$, und $GF : FE = AG : AC$, folglich $AF \times GF : FK \times FE = AG^2 : GL \times AC$; nun sey $AF = a$, $GF = x$, $FK = b$, $FE = c$, $AG = a + x$, und die gegebene Fläche $GL \times AC = bp$; folglich $ax : bc = (a + x)^2 : bp$, hieraus folgt $x^2 + \left(\frac{2ac - ap}{c}\right) x + a^2 = 0$, und wenn man, um den Calcul zu erleichtern, $\frac{2ac - ap}{c} = -2ar$ setzt, so erhält man $x - ar = \pm a \sqrt{r^2 - 1}$, folglich ist $x = a\left(r \pm \sqrt{r^2 - 1}\right)$. Es giebt vielleicht eine simplere Art, diese Aufgabe algebraisch aufzulösen; aber schwerlich wird man durch algebraische Kunstgriffe eine so kurze und zierliche Verzeichnung der Figur erhalten, wie die, die uns die geometrische Analysis an die Hand gegeben hat.

Aufgabe XXI.

Die durchs Loth formirten Segmente der Grundlinie AC, CB, und die Summe der Seiten AH + HB, sind gegeben; das Dreyek zu finden. Fig. 130.

Analysis.

AHB sey das zu findende Dreyek. Aus H, dem Scheitelpunct, mit HB beschreibe man einen Kreis, der AB in D, und AH in K schneide, und verlängere AH, bis sie dem Umfang in L begegne; so ist[a] AD × AB = AK × AL; nun sind AD, AB, AL (= AH + HB) gegeben, mithin ist AK gegeben, folglich ist KL, der Durchmesser des Kreises, wei auch HB, der Halbmesser, gegeben; folglich ist in dem Loth CI der Punct H gegeben, und das △ AHB läßt sich finden.

a 36. 3. cor.

Construction.

Auf einer unbegränzten Linie nehme man die Segmente AC, CB; von A ziehe man unter einem willkührlichen Winkel die Linie AE gleich der gegebenen Summe der Seiten, und ver-

vereinige EB; man nehme CD = CB, und mache den Winkel ADG = AEB; mit GF der Hälfte von GE, aus B schneide man das Loth CI in H, und vereinige AH, HB; so ist △ AHB das gesuchte Dreyek.

Beweis.

Weil die △△ ADG, ABE einander ähnlich sind, so ist AD : AG = AE : AB, folglich AD × AB = AG × AE. Nun beschreibe man aus H mit HB einen Kreis, der AH in K schneide; er wird, weil CD = CB ist, AB in D schneiden; demnach, wenn man AH bis L verlängert, so ist [a] AD × AB = AK × AL, folglich AK × AL = AG × AE, oder [b] AFq — GFq = AHq — (HLq) HBq; nun ist (*constr.*) GF = HB, folglich ist AF = AH, mithin AH + HB = AE, der gegebenen Summe der Seiten. Q. E. D.

b 6. 2.

Berechnung.

Weil AE : AB = AD : AG, so läßt sich AG finden, mithin auch GE, und $\frac{1}{2}$ GE = GF = HB, folglich ist HB gegeben, mithin läßt sich AH finden, und das $\triangle$ AHB läßt sich berechnen.

Algebraische Auflösung.

Man setze AC $=$ a, CB $=$ b, AH $+$ HB $=$ c, AH $=$ x, folglich HB $=$ c $-$ x; so erhält man wegen der rechtwinklichten $\triangle\triangle$ AHC, CBH, $x^2 - a^2 = c^2 - 2cx + x^2 - b^2$, folglich $x = \frac{c^2 - b^2 + a^2}{2c}$. Hieraus ließe sich auch eine zimlich einfache Verzeichnung herleiten, die aber nicht so zierlich seyn würde, wie die, die wir aus der geometrischen Analysis hergeleitet haben.

Aufgabe XXII.

EFG ist ein der Lage und Größe nach gegebener Kreis; AD, eine darin liegende gerade Linie, die durch den Mittelpunct B geht, auch der Größe und Lage nach gegeben: auf dem Umfang des Kreises den Punct zu finden, wo AD dem Auge unter dem größten Winkel erscheinen muß. Fig. 131.

Erforschung und Analysis.

Man wird leicht wahrnehmen, daß die Aufgabe sich auf folgende reduciren läßt: einen Kreis zu beschreiben, der durch A und D gehe, und den gegebenen Kreis berühre; denn alsdann werden die, von dem Berührungs-Punct an A und D gezogenen Linien einen größern Winkel machen, als die, von irgend einem andern Punct des Umfanges dahin gezogenen Linien. Dieser Kreis nun sey EAD; sein Mittelpunct, der gewiß[a] auf dem, aus der Mitte von AD aufgerichteten Loth CI liegen wird, sey H; der Berührungs-Punct E; so wird[b] die durch B und H gezogene Linie durch den Berührungs-Punct E gehen. Man vereinige AH, so ist AH + HB = EB; nun ist EB der Halbmesser des gegebenen Kreises, mithin gegeben; folglich ist in dem △ ABH die Summe der Seiten AH + HB gegeben; folglich, weil die durchs Loth formirten Segmente AC, CB auch gegeben sind, so läßt sich, nach der vorhergehenden Aufgabe, der Punct H finden, und[c] der Kreis EAD ist der Lage und Größe nach gegeben.

a I. 3.

b II. 3.

c 6. def. dat.

Construction.

Ueber der Grundlinie AB, die aus den gegebenen Segmenten AC, CB zusammengesezt ist, beschreibe man, nach der vorhergehenden Aufgabe, ein Dreyek, dessen Seiten AH, HB zusammen dem Halbmesser des gegebenen Kreises gleich seyn. Aus dem Scheitelpunct H mit HA beschreibe man einen Kreis; dieser Kreis wird durch D gehen, und den gegebenen Kreis berühren.

Beweis.

Weil CD = AC (*constr.*) so ist HD = HA, mithin geht der Kreis durch D. Nun verlängere man die, durch die zween Mittelpuncte B, H gezogene BH, bis sie dem Umfang des eingeschriebenen Kreises in E begegne; so ist EH = AH, folglich BE = BH + AH, nun ist (*constr.*) BH + AH = dem Halbmesser des gegebenen Kreises, folglich auch BE, das ist, der Punct E ist beyden Kreisen gemein; und zwar haben die Kreise keinen andern Punct gemein, sonst würden die, von B und H an diesen Punct gezogenen Linien ein Dreyek begränzen, wo die Summe zweyer Seiten der dritten

Seite gleich wäre: folglich [d] berühren die zween Kreise einander in E. Q. E. D. d 3. def. 3.

Aufgabe XXIII.

Die Hypothenuse AB, und die Fläche eines rechtwinklichten Dreyeks sind gegeben; das Dreyek zu finden. Fig. 132.

Analysis.

ABC sey das zu findende Dreyek. Aus D, der Mitte der Hypothenuse BC, mit DC beschreibe man einen Kreis; er wird durch den Scheitelpunct A gehen [a]. Durch A ziehe man eine Parallel-Linie mit BC, und beschreibe über DC das Rechtek EDCF; es wird [b] dem △ ABC gleich, mithin gegeben seyn; nun ist DC gegeben, folglich [c] ist die andere Seite DE gegeben, und weil DE der Lage nach gegeben ist, so ist der Punct E gegeben, folglich weil EF parallel ist mit BC, so ist [d] EF der Lage nach gegeben, folglich [e] weil der Kreis der Lage nach gegeben ist, so ist der Punct A gegeben, und das △ BAC ist gegeben.

a 31. 3. cor.
b 41. 1.
c 61. dat.
d 37. dat.
e 28. dat.

Con-

Construction.

Ueber der gegebenen Hypothenuse BC beschreibe man einen Kreis; über DC, der Hälfte von BC, beschreibe man[f] das Rechtek DCFE, das der gegebenen Fläche gleich sey; an A, wo EF den Umfang des Kreises schneidet, von B und C ziehe man BA, CA; so wird △ ABC das gesuchte Dreyek seyn.

f 45. I.

Beweis.

Er läßt sich leicht aus der Analysis und Construction herleiten.

Bestimmung.

Ist ED größer als DC, der Halbmesser des Kreises, so giebt es keinen Durchschnitts-Punct wie A, und die Aufgabe enthält etwas unmögliches.

Algebraische Auflösung.

Die gegebene Fläche sey a^2, BC $=$ b, AB $=$ x, AC $=$ y, so ist $a^2 = \frac{xy}{2}$, oder $4a^2 = 2xy$, und $b^2 = x^2 + y^2$;

die

diese zwo Gleichungen addire man, so bekommt man $x^2 + 2xy + y^2 = b^2 + 4a^2$, folglich $x + y = \sqrt{b^2 + 4a^2}$; und wenn man sie abzieht, $x^2 - 2xy + y^2 = b^2 - 4a^2$, folglich $x - y = \sqrt{b^2 - 4a^2}$; folgl. ist $x = \frac{\sqrt{b^2 + 4a^2} + \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2}$,

und $y = \frac{\sqrt{b^2 + 4a^2} - \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2}$.

Aufgabe XXIV.

Die Grundlinie BC, der Unterschied der Winkel an der Grundlinie, und die, von dem Scheitelpunct auf die Mitte von BC gezogene Linie AD, sind gegeben; das Dreyek zu finden. Fig. 133.

Algebraische Analysis.

ABC sey das zu findende Dreyek. Auf AB nehme man AE = AC, und vereinige EC, so ist BCE gleich dem doppelten Unterschied der Winkel an der Grundlinie, folglich gegeben. Von B ziehe man BF senkrecht auf die verlängerte CE, und von A fälle man auf EC

das

das Loth AG herab: so sind die $\triangle\triangle$ BFE, EAG einander ähnlich, folglich FE : BE = EG : EA; nun heiße man BF = a, FC = b, FE = x, so ist EC = b − x, $EG = \frac{b-x}{2}$, $BE = \sqrt{a^2+x^2}$, folglich $x : \sqrt{a^2+x^2} = \frac{b-x}{2} : EA$, mithin ist $EA = \frac{b-x}{2x}\sqrt{a^2+x^2}$, und (EA + EB), das ist, $AB = \frac{b-x}{2x}\sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{a^2+x^2} = \frac{b+x}{2x}\sqrt{a^2+x^2}$. Nun mache man von folgendem Satze Gebrauch: wenn man von dem Scheitelpunct eines Dreyecks auf die Mitte der Grundlinie eine gerade Linie zieht, so ist die Summe der Quadrate der Seiten gleich der Summe des doppelten Quadrates der gezogenen Linie, und des doppelten Quadrates der Hälfte der Grundlinie; oder ABq + ACq = 2ADq + 2BDq. Man setze, um die Rechnung zu erleichtern, $2ADq + 2BDq = 2c^2$, so wird man, weil AC = AE, die Gleichung erhalten, $\frac{(b+x)^2 \cdot (a^2+x^2)}{4x^2} + \frac{(b-x)^2 \cdot (a^2+x^2)}{4x^2} = 2c^2$; diese Gleichung aufgelöst giebt $x^4 + (a^2 + b^2 - 4c^2$

$4c^2) x^2 = - a^2 b^2$; nun setze man $a^2 + b^2 - 4c^2 = - 2p^2$, so ist $x^4 - 2p^2x^2 + p^4 = p^4 - a^2b^2$, folglich $x^2 - p^2 = \sqrt{p^4 - a^2b^2}$, folglich $x = \sqrt{(p^2 + \sqrt{p^4 - a^2b^2})}$.

So habe ich das Problem aufgelöst, nachdem ich eine geometrische Analyse vergebens gesucht hatte. Nachher habe ich in Simsons Schriften eine geometrische Auflösung davon gefunden, die ich wegen ihrer Zierlichkeit hersetzen will. Fig. 134.

Ueber AB, der gegebenen Grundlinie, beschreibe man den Kreis = Abschnitt AHEB, der des gegebenen Unterschiedes der Winkel an der Grundlinie fähig sey. Man theile AB in zween gleiche Theile in C, und suche, wenn KL die gegebene, vom Scheitelpunct auf die Mitte der Grundlinie gezogene Linie ist, zu KLq, ACq AC die vierte Proportional = Linie, (*) und trage sie auf AB von C nach D; alsdann ziehe man

(*) Man verwandle nämlich [a] das Quadrat KLq in ein Rechtek, das zur Grundlinie AC habe; seine Höhe alsdann sey P, so ist [b] $AC \times P : ACq = P : AC$; folglich darf man nur zu P, AC die dritte Proportional = Linie suchen. *a 45. 1.* *b 1. 6.*

man CS, DI senkrecht auf AB, bis sie dem Umfang des Kreises in S und I begegnen, und vereinige AI; durch G, wo AI die Linie CS schneidet, ziehe man EGH parallel mit AB, und vereinige AE, AH; auf AI nehme man AN = KL, und ziehe durch N die Linie MNP parallel mit EH; sie begegne AE, AH in M und P; so ist △AMP das gesuchte Dreyek.

Beweis.

Weil (*constr.*) CG parallel ist mit DI,
c 4. 6. und KLq:ACq = AC:CD, so ist [c] KLq:
d 1. 6. ACq = AG:GI = AGq : AG×GI [d];
e 35. 3. nun ist [e] AG × GI = EG × GH, das ist, weil EH mit AB parallel, und CG senkrecht auf BA ist, = EGq, folglich KLq : ACq = AGq:EGq, mithin KL : AC = (AG:EG =) AN : NM; nun ist (*constr.*) AN = KL, folglich NM = AC; nun ist, weil EH = 2EG, auch MP = 2MN, folglich ist MP = AB, mithin hat das Dreyek die gegebene Grundlinie, und AN = KL begegnet MP in der Mitte N. Endlich ist wegen der gleichen Bogen BE, AH, der Unterschied der Winkel AHE — AEH, das ist, APM — AMP = AEB, dem gegebenen Unterschied der Winkel an der Grundlinie. Q. E. D.

Auf-

Aufgabe XXV.

Die Grundlinie AB, das Loth HP, und die Summe der beyden Seiten MN, sind gegeben; das Dreyek zu finden. Fig. 135.

Analysis.

AHB sey das zu findende Dreyek, und $AH+HB = MN$, oder $MN - AH = HB$; folglich $MNq - 2MN \times AH + AHq = HBq$, mithin $MNq - 2MN \times AH = HBq - AHq$; nun ist $HBq - AHq = PBq - APq = AB \times (PB - AP)$; und wenn man AB in C in zween gleiche Theile theilt, so ist $PB - AP = 2PC$, folglich ist $MNq - 2MN \times AH = 2AB \times PC$, oder $MNq = 2MN \times AH + 2AB \times PC$; nun setze man anstatt des Rechteckes $2MN \times AH$ ein anderes, das 2AB zur Grundlinie, und irgend eine andere Linie zur Höhe habe; diese Höhe sey PD, so ist $MNq = 2AB \times DC$; auf diese Art hat man anstatt zweyer Rechtecke ein einziges Rechtek bekommen, und die Linie CD, als die dritte Proportional-Linie von 2AB, MN, läßt sich finden, und weil der Punct C gegeben ist, so ist auch der Punct D gegeben.

Nun richte man von D ein unbegränztes Loth auf, und ziehe durch den Scheitelpunct H die Linie E F parallel mit A B, und gleich MN, und vereinige E A; von F ziehe man auf die verlängerte E A die Linie F G parallel mit AH, so ist $EF : FG = EH : AH$ oder $MN : FG = PD : AH$, folglich $MN \times AH = FG \times PD$; nun haben wir oben $MN \times AH = AB \times PD$ gesezt, folglich muß $FG = AB$ seyn. Nun ist, weil E F der Lage und Größe nach gegeben ist, der Punct F gegeben, folglich weil E A der Lage nach gegeben ist, so ist der Punct G gegeben, folglich, weil A H parallel ist mit F G, so ist der Punct H gegeben, und das Dreyek läßt sich finden.

Construction.

Man theile die gegebene Grundlinie AB in zween gleiche Theile in C, und suche zu 2 AB, MN die dritte Proportional-Linie, die man auf der verlängerten B A von C nach D trage; aus D richte man D E, gleich dem gegebenen Loth, senkrecht über D B auf, und ziehe durch E die Linie E F parallel mit D B und gleich MN; aus F mit AB schneide man die verlängerte E A in G; durch A ziehe man A H parallel mit FG, und vereinige H B; so wird $\triangle$ AHB das gesuchte Dreyek seyn.

Beweis.

Er läßt sich leicht aus der Analysis herleiten.

Berechnung.

Weil 2 AB : MN = MN : CD, so ist CD gegeben, mithin auch AD; nun ist ED gegeben, folglich läßt sich in dem △ EDA der Winkel DAE finden, mithin ist der Winkel AEH gegeben; nun ist EF = MN, FG = AB, mithin gegeben, folglich läßt sich in dem △ EFG der Winkel F finden, folglich ist der ihm gleiche HAP gegeben; mithin ist wegen des gegebenen Lothes HP in dem △ HAP die Seite AH gegeben, folglich läßt sich auch die andere Seite HB finden, und das △ AHB läßt sich berechnen.

Bestimmung.

Wenn AB kleiner ist als ein von F auf die verlängerte EA gefälltes Loth, so enthält die Aufgabe etwas unmögliches.

Algebraische Auflösung.

Man heiße $AH + HB = a$, $AB = b$, $HP = c$, $AH = x$, $AP = y$; mithin
a 13. 2. $HB = a - x$, $PB = b - y$; nun ist[a] $ABq + AHq = HBq + 2\,AB \times AP$, das ist $b^2 + x^2 = a^2 - 2ax + x^2 + 2by$, mithin $b^2 - a^2 + 2ax = 2by$, oder, wenn man $b^2 - a^2 = -2p^2$ sezt, $ax - p^2 = by$; nun ist $APq = AHq - HPq$, das ist $y^2 = x^2 - c^2$, folglich $a^2x^2 - 2ap^2x + p^4 = b^2x^2 - b^2c^2$, folglich $x^2 - ax = -\frac{p^4 + b^2c^2}{2p}$; nun setze man, um die Rechnung zu verkürzen, diesen leztern Ausdruk $= \frac{aq}{4}$, so ist $x = \frac{a}{2}\left(1 + \sqrt{a - q}\right)$.

Aufgabe XXVI.

Die Grundlinie AB eines rechtwinklichten Dreyeks ist gegeben, und das Rechtek seiner Seiten ist gleich dem Quadrate des Unterschiedes derselben; das Dreyek zu finden. Fig. 136.

Ana-

Analysis.

ACB sey das zu findende Dreyek. Demnach weil (*hyp.*) $AC \times CB = (AC - CB)q$, so ist $AC \times CB = ACq - 2AC \times CB + CBq$; folglich ist $3\,AC \times CB = ACq + CBq = ABq$; mithin ist $3\,AC : AB = AB : CB$, nun ist[a] wenn man von dem rechten Winkel ACB auf AB das Loth CX herabfällt, $AB : AC = CB : CX$, folglich *ex æquo*, $3AC : AC = AB : CX$, folglich ist $CX = \frac{1}{3}\,AB$. a 8. 6.

Construction.

Ueber der gegebenen Grundlinie AB beschreibe man einen Kreis; von B richte man auf AB ein Loth BD auf, das dem dritten Theil von AB gleich sey; durch D ziehe man mit AB eine Parallel-Linie, die dem Kreis in C begegne: so wird, wenn man AC, CB vereiniget, das △ ACB das gesuchte Dreyek seyn.

Beweis.

Er läßt sich leicht aus der Analysis und Construction herleiten.

Berechnung.

Von dem Mittelpunct des Kreises E ziehe man ED, EC; so sind in dem △ EDB die Seiten EB, BD samt dem rechten Winkel gegeben, folglich läßt sich ED und der Winkel DEB finden; nun ist CDE = DEB, und CE = EB, folglich läßt sich in dem △ CED die Seite CD finden; mithin ist XB gegeben; folglich lassen sich die Seiten CB, CA finden, und das Dreyek ACB läßt sich berechnen.

Aufgabe XXVII.

Die zween Puncte A, B auf dem Umfang des gegebenen Kreises O sind gegeben; den Durchmesser so zu ziehen, daß, wenn man von A, B auf denselben Lothe herabfällt, das zwischen den Endpuncten liegende Segment gleich sey einer gegebenen geraden Linie. Fig. 137.

Analysis.

DOE sey der zu findende Durchmesser, und das, zwischen den Lothen AX, BY liegende Segmente XY sey einer gegebenen geraden

Linie gleich. Man vereinige AB, und ziehe AC parallel mit DE, so ist[a] AY ein Parallelo- a 29. 1.
gramm, mithin AC = XY, folglich ist AC gegeben; nun ist AB samt dem rechten Winkel ACB gegeben, folglich ist das △ ABC der Gattung und Größe nach gegeben, und der Punct C ist gegeben; folglich ist BY der Lage nach gegeben; nun ist der Punct O gegeben, und OYB ist ein rechter Winkel, mithin[b] ist OY b 33. dat.
der Lage nach gegeben, folglich ist der Durchmesser DE der Lage nach gegeben.

Construction.

Man vereinige AB. Aus A mit der gegebenen Linie beschreibe man einen Kreis, an den man[c] von B eine Tangente BC ziehe. Von c 17. 3.
O, dem Mittelpunct des gegebenen Kreises, ziehe man OY senkrecht auf die verlängerte BC, und verlängere OY, bis sie dem Umfang auf beyden Seiten begegne. Von A fälle man auf DE das Loth AX herab, so wird XY = AC, das ist, der gegebenen Linie gleich seyn.

Beweis.

Er läßt sich leicht aus der Analysis und Construction herleiten.

Bestimmung.

Weil es von B an den beschriebenen Kreis zwo Tangenten giebt, so giebt es zween Halbmesser, die der Aufgabe genug thun; und es erhellt, daß weil in dem rechtwinklichten △ ABC, AB größer ist als AC, die gegebene Linie nicht größer seyn darf als AB. Sie kann gleich seyn AB, alsdann ist der zu ziehende Durchmesser parallel mit AB.

Berechnung.

In dem △ ACB läßt sich der Winkel ABC finden; nun vereinige man AO, OB, so läßt sich in dem △ AOB der Winkel ABO finden, folglich ist der Winkel OBY gegeben; mithin läßt sich in dem △ OBY die Seite OY finden, und alles übrige läßt sich berechnen.

Aufgabe XXVIII.

Die drey Puncte A, B, C auf dem Umfang des gegebenen Kreises O sind gegeben; auf der Fläche des Kreises der Punct zu finden, so daß die, von diesen drey Puncten dahin

hin gezogenen Linien zween gegebene Winkel machen. Fig. 138.

Analysis.

Der zu findende Punct sey X. Man vereinige AB, BC, AX, BX, CX; so liegt, weil AB und der Winkel AXB gegeben ist, der Punct X auf dem Umfang eines gegebenen Kreises (Aufg. 1.). Gleicherweise, weil BC, und der Winkel BXC gegeben ist, liegt X auf dem Umfang eines andern gegebenen Kreises: folglich ist X der Durchschnitts-Punct zweyer der Größe und Lage nach gegebenen Kreise, mithin [a] gegeben. Hieraus läßt sich die Composition leicht herleiten. a 28. dat.

Aufgabe XXIX.

Die zwo Linien AM, AN sind der Lage nach, und der Kreis C ist der Lage und Größe nach gegeben; einen Kreis zu finden, der die beyden Linien und den gegebenen Kreis berühre. Fig. 139.

Erforschung und Analysis.

Der zu findende Kreis sey OKD, sein Mittelpunct B, die Berührungs = Puncte O, K, D. Man vereinige BO, BD, BA, so sind die △△ AOB, BDA einander vollkommen
a 18. 3. gleich[a], mithin ist der Winkel OAB = BAD, folglich ist die Lage der Linie AB gegeben, und man ist versichert, daß der Mittelpunct des zu findenden Kreises auf der, den gegebenen
b 11. 3. Winkel MAN halbirenden Linie AR liegt. Nun vereinige man die Mittelpuncte B, C, so wird[b] BC verlängert durch K gehen; mithin ist BK = BD. Nun nehme man BE = BC, so ist ED = CK, mithin gegeben; nun ziehe man durch den Punct E die Linie EP parallel mit AN, bis sie AR in P begegne, so ist BP : BE = PA : ED; nun ist das △ BPE dem
c 43. drt. △ BAD ähnlich, folglich[c] der Gattung nach gegeben, mithin ist die Verhältnis BP : BE gegeben; folglich ist auch PA : ED gegeben; nun ist ED gegeben, folglich ist AP gegeben,
d 29. dat. & 31. dat. folglich ist der Punct P gegeben, folglich[d] sind die Linien PC, PE der Lage nach gegeben. Nun ziehe man von einem willkührlich = angenommenen Punct H auf der Linie AR die Linien HG, HI parallel mit BE, BC, so ist HG : BE = HI : BC; nun ist BE = BC, folglich

HG

H·G = HI, nun ist HG senkrecht auf PE, mithin gegeben, folglich[e] ist HI der Lage und Größe nach gegeben, mithin[d] ist CB der Lage nach gegeben, und[f] der Punct B, wie auch BD ist gegeben, folglich ist der zu findende Kreis der Lage und Größe nach gegeben.

e 34. dat.

f 28. dat.

Construction.

Man halbire den gegebenen Winkel MAN durch die Linie AR. Von einem auf AR willkührlich = angenommenen Punct H fälle man auf AN das Loth HF, und nehme FG = CK, dem Halbmesser des gegebenen Kreises; durch G ziehe man eine Parallel = Linie mit AN, die der Linie AR in P begegne. Nun vereinige man P, C, und aus H mit der gegebenen GH schneide man PC in I; durch C ziehe man CB parallel mit IH, bis sie AR in B begegne; von B fälle man BD senkrecht auf AN: so wird der aus B mit BD beschriebene Kreis die beyden Linien, und den gegebenen Kreis berühren.

Beweis.

Er läßt sich leicht aus der Analysis und Construction herleiten.

Be=

Berechnung.

Wenn man AC vereiniget, und von C auf AM ein Loth zieht, so läßt sich, weil AC und dieses Loth gegeben sind, der Winkel MAC finden; folglich ist der Winkel CAP gegeben; nun ist, wie aus der Analysis erhellet, AP gegeben, folglich läßt sich PC und der Winkel APC finden, mithin auch der Winkel CPB. Nun ist PH willkührlich angenommen worden, mithin gegeben, folglich läßt sich in dem △ PHG, dessen Winkel gegeben sind, HG finden; nun ist HI = HG, folglich läßt sich in dem △ PHI PI finden; folglich, weil PI : PH = PC : PB, so ist PB gegeben; mithin läßt sich in dem △ PBE die Seite BE finden, folglich, weil DE dem Halbmesser des gegebenen Kreises gleich ist, so ist BD, der Halbmesser des gesuchten Kreises, gegeben.

Bestimmung.

Wenn der aus H mit HG beschriebene Kreis die Linie PC in zween Puncten schneidet, so giebt es auf dieser Seite zween Kreise, die der Aufgabe genug thun.

Auf-

Aufgabe XXX.

Die Fläche eines rechtwinklichten Dreyeks, und die Summe der, den rechten Winkel einschließenden Seiten, sind gegeben; das Dreyek zu finden. Fig. 140.

Analysis.

AFG sey das zu findende Dreyek, AF + FG die Summe seiner Seiten, seine Fläche gleich dem Quadrat der Linie PQ. Man verlängere AF so daß FB = FG. Ueber AB beschreibe man aus der Mitte C einen Kreis, und verlängere GF bis sie dem Umfang desselben in E begegne; so ist EF auf AB senkrecht, folglich[a] AF × FB = EFq, nun ist (*hyp.*) $\triangle$ AFG, das ist, $\frac{1}{2}$ AF × FG = PQq, folglich $\frac{1}{2}$ EFq = PQq, oder EFq = 2PQq, mithin ist die Linie EF der Größe nach gegeben, und weil AB, die Summe der Seiten, gegeben ist, so ist die Hälfte AC, der Halbmesser des Kreises, mithin auch CE gegeben: folglich ist in dem rechtwinklichten $\triangle$ CEF die Seite CF gegeben: nun ist der Punct C gegeben, mithin auch der Punct F. Woraus erhellt, daß das $\triangle$ AFG gegeben ist.

a 35. 3.

Con-

Construction.

Ueber AB, der gegebenen Summe der Seiten, beschreibe man den Kreis AFB. Aus dem Mittelpunct C unter einem halben rechten Winkel ziehe man CD = 2PQ; durch D ziehe man DE parallel mit AB, bis sie dem Umfang in E begegne; von E fälle man auf AB das Loth EF herab, und verlängere EF, so daß FG = FB sey; dann vereinige man AG, so ist △ AFG das gesuchte Dreyek.

Beweis.

Von E fälle man auf AB das Loth DH herab, so ist, weil (*constr.*) DCH ein halber rechter Winkel ist, auch CDH ein halber rechter, folglich DH = HC; mithin CDq = 2DHq, nun ist (*constr.*) CD = 2PQ, mithin 4PQq = 2DHq, das ist, 2PQq = DHq; nun ist DH = EF, und EFq = AF × FB = AF × FG, folglich 2PQq = AF × FG, oder PQq = $\frac{1}{2}$ AF × FG. Q. E. D.

Be-

Berechnung.

In dem $\triangle$ CEF ist CE $=$ $\frac{1}{2}$ AB gegeben, und EFq $=$ 2PQq gleicherweise gegeben, folglich ist CF gegeben, mithin ist AF, wie auch FB $=$ FG gegeben, und das $\triangle$ AFG läßt sich berechnen.

Ende der Aufgaben.