



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

# Universitätsbibliothek Paderborn

## Euklids Data

Euclides

Stuttgart, 1780

Anhang.

[urn:nbn:de:hbz:466:1-48509](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-48509)



## Anhang.

Da der Zweck dieses Werkchens ist zu weisen, wie man durch die Elementar-Geometrie Dinge bewerkstelligen kann, wozu man bisweilen die Algebra gebraucht; so wird es nicht undienlich seyn, hier den Beweis eines Lehrsatzes beizufügen, der sich in den Fluxionen des Mac-Laurin Nro. 623. befindet, den aber Mylord Stanhope durch die Elementar-Geometrie bewiesen hat. Es ist ein besonderer Fall des 45ten Satzes des vortreflichen Tractates, den Robert Simson von den Kegelschnitten geschrieben hat.

### Lehrsatz.

Wenn man auf dem Umfang eines Kreises sechs Puncte nach Willkühr annimmt, und die gezogenen Sehnen, je zwey und zwey, die einander gegenüber liegen, verlängert, bis sie zusammenstoßen; so werden die drey Puncte,

wo

wo die verlängerten Sehnen, je zwey und zwey, zusammenstoßen, in einer geraden Linie liegen.

Man nehme auf dem Umfang des Kreises  $ABC$  nach Willkühr die sechs Punkte  $A, B, C, D, E, F$  an, und ziehe die Sehnen  $AB, BC, CD, DE, EF, FA$ ; dann verlängere man die einander gegenüber liegenden Sehnen  $AB$  und  $ED, BC$  und  $FE, CD$  und  $AF$ , bis sie in den Punkten  $G, H, I$  zusammenstoßen: so werden diese drey Punkte in einer geraden Linie liegen.

### Vorbereitung zum Beweis.

Durch den Punct  $F$  ziehe man  $FL$  parallel mit  $CD$ , bis sie dem Umfang in  $L$  begegne; alsdann ziehe man durch die Punkte  $L$  und  $B$  eine Linie, die der  $GE$  in  $N$  begegne. Gleichweise ziehe man durch den Punct  $B, BK$  parallel mit  $DE$ , bis sie dem Umfang in  $K$  begegne; alsdann ziehe man  $KF$ , die der  $CI$  in  $M$  begegne.

Endlich vereinige man  $HN, HM, BE, CF, BD, DF$ .

$\alpha$

Be

## Beweis.

Weil  $CD$ ,  $LF$  parallel sind, so sind die Bogen  $CBL$ ,  $DEF$  einander gleich, folglich sind die Winkel  $CBL$ ,  $DEF$  einander gleich. Hieraus folgt, daß die Winkel  $NBH$ ,  $NEH$  gleich sind, und daß die Punkte  $N$ ,  $B$ ,  $E$ ,  $H$  auf dem Umfang eines Kreises liegen. (\*) Folglich ist der Winkel  $NHB = (NEB$ , das ist,)  $HCD$ , und da dieß Wechselwinkel sind, so ist  $NH$  parallel mit  $CD$ , folglich auch mit  $LF$ .

Gleicherweise weil  $DE$ ,  $BK$  parallel sind, so sind die Bogen  $DCB$ ,  $EFK$  einander gleich, folglich sind die Winkel  $DCB$ ,  $EFK$ , einander gleich. Hieraus folgt, daß die Winkel  $HCM$ ,  $HFM$  gleich sind, und daß die Punkte  $H$ ,  $C$ ,  $F$ ,  $M$  auf dem Umfang eines Kreises liegen. Folglich ist der Winkel  $HMC = (HFC$ , das ist,)  $MDE$ , und da dieß Wechselwinkel sind, so ist  $MH$  parallel mit  $DE$ , folglich auch mit  $BK$ . Demnach ist  $NHMD$  ein Parallelogramm.

Nun

(\*) Wenn nämlich der, durch  $N$ ,  $B$ ,  $E$  beschriebene Kreis nicht durch  $H$  gieng, so müßte er die Linie  $EH$  in irgend einem andern Punkt schneiden; woraus sich aber leicht eine Ungereimtheit herleiten läßt.

Nun ist in den  $\triangle GBN, FIM$  der Winkel  $GBN = (LBA, \text{ das ist, }) (LFA \text{ oder } FIM, \text{ der Winkel } BGN = (ABK \text{ oder } AFK, \text{ das ist, }) IFM, \text{ endlich ist der Winkel } GNB = (NBK \text{ oder } LFM, \text{ das ist, }) FMI$ . Folglich sind die  $\triangle GNB, FMI$  einander ähnlich, mithin ist  $GN : NB = FM : MI$ . Nun ist angezeigtermaßen der Winkel  $GNB = FMI$ , folglich ist der Winkel  $BND = DMF$ . Ferner ist der Winkel  $NBD = (DFL \text{ oder } ) MDF$ , und der Winkel  $NDB = (DBK, \text{ das ist, }) MFD$ ; folglich sind die  $\triangle BND, DMF$  einander ähnlich, und  $BN : ND = DM : MF$ ; aus dieser und der vorhergehenden Proportion folgt  $GN : ND = DM : MI$ , mithin ist  $GN : GD = (DM : DI = ) NH : DI$ , folglich *permutando*,  $GN : NH = GD : DI$ ; folglich liegen die Punkte  $G, H, I$  in einer geraden Linie. Q. E. D.

### Satz.

Wenn zwei einander gegenüber liegende Sehnen parallel sind, so ist der Satz immer noch wahr: man kann nämlich alsdann sagen, einer der Punkte  $G, H, I$  liege in einer unendlichen Entfernung von den andern, aber immer auf

$\propto 2$

ebens

ebenderfelben geraden Linie. Dieß erhellt aus der Figur: denn wenn man die sechs Punkte B, C, D, E, F, K, angenommen hätte, so wären H und M die Punkte, worin zwey Paare verlängerter Sehnen zusammenstoßen; nun ist bewiesenermaßen H M parallel mit D E und B K, man kann daher sagen, diese drey Linien werden, ins Unendliche verlängert, einander begegnen: der Punkt G liegt also unendlich weit von H. Gleicherweise, wenn alle drey Paare der gegenüberliegenden Sehnen parallel sind, das ist, wenn alle Sehnen gleich sind, so kann man sagen, die gerade Linie, worin die drey Punkte liegen, sey in einer unendlichen Entfernung von dem Kreis.

### Anmerkung.

Dieser Satz ist von allen Kegelschnitten wahr; und Mylord Stanhope beweist ihn von den übrigen Kegelschnitten, indem er sie als perspectivische Projectionen von dem Kreise betrachtet.

