



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Universitätsbibliothek Paderborn

Euklids Data

Euclides

Stuttgart, 1780

[Euklids Data.]

[urn:nbn:de:hbz:466:1-48509](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-48509)

Satz I.

(*) 1.

Wenn zwei Größen gegeben sind, so ist ihre Verhältniß gegeben. Fig. 1.

Es seyen A, B zwei gegebene Größen; so ist $A : B$ gegeben.

Weil A eine gegebene GröÙe ist, so läÙt sich a eine ihr gleiche GröÙe finden; diese sey C. a 1. def. Eben so läÙt sich, weil B gegeben ist, eine ihr dat. gleiche GröÙe finden; diese sey D. Weil nun $A = C$, und $B = D$, so ist b $A : B = C : D$. b. 7. 5. folglich ist die Verhältniß der gegebenen Größen C, D, die mit $A : B$ einerley ist, gefunden.

Satz II.

2.

Wenn eine gegebene GröÙe zu einer andern eine gegebene Verhältniß hat, "und wenn zu den zwei Größen, wodurch die gegebene Verhältniß ausgedrückt wird, und der gegebenen GröÙe sich eine vierte Proportional-GröÙe finden läÙt,,"; so ist die andere GröÙe gegeben. Fig. 2.

Die gegebene GröÙe A habe zu der GröÙe B eine gegebene Verhältniß; wenn zu den drey genannten Größen sich eine vierte Proportional-GröÙe finden läÙt; so ist B der GröÙe nach gegeben.

U 5

Weil

(*) Die Ziffern an dem Rande deuten die Zahlen in den andern Ausgaben an.

a I. def.

Weil A gegeben ist, so läßt a sich eine ihr gleiche Größe finden; diese sey C. Und weil A : B gegeben ist, so läßt sich eine ihr gleiche Verhältnis finden; es sey die Verhältnis der gegebenen Größen E : F. Nun finde man zu den Größen E, F, C eine vierte Proportionale Größe D, welches kraft der Hypothese möglich ist. Da also $A : B = E : F$, und $E : F = C : D$;

b II. 5.

so ist b $A : B = C : D$. Nun

c I4. 5.

$A = C$, folglich c $B = D$. Mithin ist

a I. def.

Größe B gegeben, a weil eine ihr gleiche D gefunden worden.

3.

Satz III.

Wenn gegebene Größen zu einander hinzugefügt werden, so ist ihre Summe gegeben. Fig. 3.

Die gegebenen Größen A B, B C seyen einander hinzugefügt; so wird ihre Summe A C gegeben seyn.

a I. def.

Weil A B gegeben ist, so läßt a sich eine ihr gleiche Größe finden; sie sey D E; und weil B C gegeben ist, so läßt sich eine ihr gleiche Größe finden; sie sey E F. Weil nun $A B = D E$, und $B C = E F$ ist, so ist $(A B + B C) = (D E + E F) = D F$; folglich ist A C gegeben, weil die ihr gleiche D F ist gefunden worden.

Satz

Satz IV.

4.

Wenn eine gegebene Größe von einer gegebenen Größe weggenommen wird, so ist der Rest gegeben. Fig. 4.

Von der gegebenen Größe $A B$ werde die gegebene $A C$ weggenommen; so ist der Rest $C B$ gegeben.

Weil $A B$ gegeben ist, so läßt a sich eine a 1. def. ihr gleiche Größe finden; diese sey $D E$; und weil $A C$ gegeben ist, so läßt sich eine ihr gleiche Größe finden; diese sey $D F$. Da nun $A B = D E$, $A C = D F$; so ist der Rest $C B$ dem Rest $F E$ gleich. Mithin ist $C B$ gegeben a , weil eine ihr gleiche $F E$ ist gefunden worden.

Satz V.

12.

Wenn von drey Größen die erste samt der zweyten, und eben so die zweyte samt der dritten gegeben ist; so ist entweder die erste gleich der dritten, oder eine davon ist um eine gegebene Größe größer als die andere. Fig 5.

Die drey Größen seyen $A B$, $B C$, $C D$, wovon $A B$ samt $B C$, das ist, $A C$ gegeben sey; und gleicherweise sey $B C$ samt $C D$, das ist, $B D$ gegeben. Entweder ist $A B = C D$, oder eine davon ist um eine gegebene Größe größer als die andere.

Weil

Weil AC , BD , jede für sich, gegeben sind, so sind sie entweder einander gleich, oder nicht. Gesezt, sie seyen einander gleich; weil nun $AC = BD$, so nehme man den gemeinschaftlichen Theil BC hinweg, so wird der Rest AB dem Rest CD gleich seyn.

Wenn sie aber ungleich sind, so sey $AC > BD$, und man mache $CE = BD$. Demnach ist CE gegeben, weil BD gegeben ist; und a 4. dat. die Ganze AC gegeben ist, so ist a der Rest AE gegeben; und weil $EC = BD$, so $(EC - BC =) EB = (BD - BC =) CD$. Weil nun AE gegeben ist, so ist A größer als E , das ist, als C , um die gegebene Größe AE .

3.

Satz VI.

Wenn eine Größe eine gegebene Verhältniß zu einem ihrer Theile hat, so wird auch zu dem andern Theil eine gegebene Verhältniß haben. Fig. 6.

Die Größe AB habe zu AC , einem ihrer Theile, eine gegebene Verhältniß, so wird auch zu dem andern Theil BC eine gegebene Verhältniß haben.

a 2. def.

Weil $AB : AC$ gegeben ist, so läßt a eine ihr gleiche Verhältniß finden; es sey die Verhältniß der gegebenen Größe DE zu der gegebenen

nen DF. Weil nun DE, DF, gegeben sind,
 so ist ^b der Rest FE gegeben; und weil $AB:AC$ ^b 4. dat.
 $\equiv DE:DF$, so ist *convertendo* ^c $AB:BC$ ^c 19. 5.
 $\equiv DE:EF$; folglich ist $AB:BC$ gegeben,
 weil die ihr gleiche Verhältniß der gegebenen
 Größen DE, EF ist gefunden worden.

Zusatz. Hieraus folgt, daß die Theile AC, CB
 eine gegebene Verhältniß zu einander haben;
 denn $AB:BC \equiv DE:EF$, mithin *di-*
videndo ^d $AC:CB \equiv DF:FE$; da nun ^a 17. 5.
 DF, FE gegeben sind, so ist ^a $AC:CB$ ^a 2. def.
 gegeben.

Satz VII.

6.

Wenn zwei Größen, die eine gegebene
 Verhältniß zu einander haben, zusammenge-
 fügt werden; so wird die gesammte Größe zu
 jeder von ihnen eine gegebene Verhältniß ha-
 ben. Fig. 7.

Die Größen AB, BC, die eine gegebene
 Verhältniß zu einander haben, seyen zusammen-
 gefügt; so wird die gesammte Größe AC zu je-
 der von den Größen AB, BC eine gegebene
 Verhältniß haben.

Weil $AB:BC$ gegeben ist, so läßt ^a sich ^a 2. def.
 eine ihr gleiche Verhältniß finden; es sey die
 Verhältniß der gegebenen Größen DE, EF.
 Weil nun DE, EF gegeben sind, so ist die ge-
 samnte

- b 3. dat. sammt D F gegeben^b ; und weil $AB:BC =$
 c 18. 5. $DE:EF$, so ist *componendo*^c $AC:CB =$
 d 19. 5. $DF:FE$, und *convertendo*^d $AC:AB =$
 $DF:DE$; folglich weil AC zu jeder der Größen
 A B, B C sich verhält, wie D F zu jeder der an
 a 2. def. dern D E, E F, so ist^a $AC:AB$, und $AC:BC$
 gegeben.

7.

Satz VIII.

Wenn eine gegebene Größe in zweien
 Theile getheilt ist, die eine gegebene Ver-
 hältnis zu einander haben, und wenn zu der
 Summe der zwei Größen, wodurch die ge-
 gebene Verhältnis ausgedrückt ist, zu einem
 von denselben, und zu der gegebenen Größe
 eine vierte Proportional = Größe kann gefun-
 den werden; so ist jeder von den Theilen ge-
 geben. Fig. 8.

Die gegebene Größe A B sey in die Theile
 A C, C B getheilt, die eine gegebene Verhält-
 nis zu einander haben; wenn zu den im Satze
 genannten Größen sich eine vierte Proportional
 Größe finden läßt; so sind A C, C B, jede für
 sich, gegeben.

Weil die Verhältnis A C : C B gegeben ist;
 a 7. dat. so ist^a auch A B : B C gegeben, folglich läßt
 b 2. def. sich^b eine ihr gleiche Verhältnis finden; es sey
 die Verhältnis der gegebenen Größen D E, E F;
 weil nun die gegebene A B zu B C die gegebene
 Ver-

Verhältnis $DE:EF$ hat; so ist, wenn zu DE ,
 EF , AB sich eine vierte Proportional-Größe
 finden läßt, BC gegeben ^c; und weil AB ge^c 2. dat.
 geben ist, so ist auch der übrige Theil AC gege-
 ben, ^d d 4. dat.

Gleicherweise und mit eben der Einschrän-
 kung, wenn AC , der Unterschied zweyer Größen
 AB , BC , die eine gegebene Verhältnis haben,
 gegeben ist; so ist jede der Größen AB , BC
 gegeben.

Satz IX.

8.

Größen, die zu ebenderselben Größe ge-
 gebene Verhältnisse haben, haben auch eine
 gegebene Verhältnis zu einander. Fig. 9.

A und C haben, jede für sich, eine gegebene
 Verhältnis zu B , so wird A eine gegebene
 Verhältnis zu C haben.

Weil $A:B$ gegeben ist, so läßt sich a eine a 2. def.
 ihr gleiche Verhältnis finden; es sey die Verhält-
 nis der gegebenen Größen D, E ; und weil $B:C$
 gegeben ist, so läßt sich a eine ihr gleiche Ver-
 hältnis finden, es sey die Verhältnis der gegebene-
 nen Größen F, G . Zu F, G, E finde man, wenn
 es sich thun läßt, eine vierte Proportional-Größe
 H . Weil nun $A:B = D:E$, und $B:C =$
 $(F:G =) E:H$; so ist *ex æquo* $A:C =$
 $D:H$, folglich ist $A:C$ gegeben ^a, weil die ihr
 gleiche

gleiche $D:H$ ist gefunden worden. Läßt sich also zu F, G, E keine vierte Proportional = Größe finden, so kann man bloß sagen, daß $A:C$ aus $A:B$ und $B:C$, das ist, aus den gegebenen Verhältnissen $D:E$, und $F:G$ zusammengesetzt sey.

9.

Satz X.

Wenn zwei oder mehrere Größen gegebene Verhältnisse zu einander haben, und wenn sie zu einigen andern Größen gegebene, wie wohl nicht einerley Verhältnisse haben; werden diese andere Größen auch gegebene Verhältnisse zu einander haben. Fig. 10.

Zwei oder mehrere Größen A, B, C , haben gegebene Verhältnisse zu einander, und haben zu andern Größen D, E, F gegebene, wie wohl nicht einerley Verhältnisse; so werden die Größen D, E, F auch gegebene Verhältnisse zu einander haben.

Weil $A:B$ gegeben ist, und eben so $A:C$ gegeben ist, so ist $D:B$ gegeben; nun ist $B:E$ gegeben, folglich ist $D:E$ gegeben; und weil $B:C$, und eben so $B:E$ gegeben ist, so ist $E:C$ gegeben, nun ist $C:F$ gegeben, folglich ist $E:F$ gegeben, folglich haben D, E, F gegebene Verhältnisse zu einander.

a 9. dat.

C

Satz XI.

22.

Wenn zwei Größen, jede für sich, eine gegebene Verhältnis zu einer andern Größe haben; so werden beyde zusammen genommen eine gegebene Verhältnis zu dieser andern haben. Fig. 11.

Die Größen AB, BC haben eine gegebene Verhältnis zu der Größe D; so wird AC zu ebenderselben D eine gegebene Verhältnis haben.

Weil AB, BC, jede für sich, eine gegebene Verhältnis zu D haben, so ist $AB:BC$ gegeben ^a, mithin ist $AC:CB$ gegeben ^b; nun ist $BC:D$ gegeben; folglich ist auch $AC:D$ gegeben.

a 9. dat.

b 7. dat.

Satz XII.

Wenn das Ganze zu dem Ganzen eine gegebene Verhältnis hat, und die Theile zu den Theilen gegebene, aber nicht einerley Verhältnisse haben; so wird jedes davon, das Ganze oder der Theil, zu jedem eine gegebene Verhältnis haben. Fig. 12.

Das Ganze AB habe zu dem Ganzen CD eine gegebene Verhältnis, und die Theile AE, EB haben gegebene, aber nicht einerley Verhältnisse zu den Theilen CF, FD; so wird jedes das

B

von

von zu jedem, dem Ganzen oder dem Theil, eine gegebene Verhältniß haben.

- Weil $AE : CF$ gegeben ist, so mache man $AE : CF = AB : CG$, so ist $AB : CG$ gegeben, mithin ist $EB : FG$ gegeben, weil $EB : FG = AB : CG$. Nun ist $EB : FG$ gegeben, mithin ist $FD : FG$ gegeben ^b; und *convertendo* $FD : DG$ ist gegeben ^c; und AB zu jeder der Größen CD, CG eine gegebene Verhältniß hat, so ist ^b $CD : CG$ gegeben, folglich ^c ist $CD : DG$ gegeben. Nun ist $GD : DG$ gegeben, mithin ^b ist $CD : DF$, folglich ^d ist $CF : FD$ gegeben; nun ist $CF : AE$, wie ^e $FD : EB$ gegeben; folglich ^e ist $AE : EB$ gegeben, wie auch ^f die Verhältniß von A zu jeder derselben; folglich ist die Verhältniß von A zu jeder zu jeder gegeben.
- a 19. 5.
b 9. dat.
c 6. dat.
d cor. 6. dat.
e 10. dat.
f 7. dat.

24.

Satz XIII.

Wenn die erste von drey geraden Proportional-Linien zu der dritten eine gegebene Verhältniß hat, so wird die erste auch zu der zweyten eine gegebene Verhältniß haben. Fig. 13.

A, B, C seyen drey gerade Proportional-Linien, das ist $A : B = B : C$; wenn $A : C$ eine gegebene Verhältniß ist, so wird auch $A : B$ eine gegebene Verhältniß seyn.

Weil $A : C$ gegeben ist, so läßt^a sich eine a 2. def. ihr gleiche Verhältnis finden; es sey die Ver-
 hältnis der gegebenen geraden Linien D, E .
 Nun finde man^b zwischen D und E eine mittlere b 13. 6.
 re Proportional-Linie F ; so ist $D \propto E = Fq$,
 und weil $D \propto E$ wegen der gegebenen Seiten
 gegeben ist, so ist auch Fq , mithin die gerade
 Linie F , gegeben; und ferner weil $A : C =$
 $D : E$, und^c $A : C = Aq : Bq$, so ist^c $1, cor.$
 $D : E = Aq : Bq$; nun^c ist $D : E =$ 20. 6.
 $Dq : Fq$, folglich ist^d $Aq : Bq = Dq : Fq$, d 11. 5.
 folglich^e $A : B = D : F$; mithin ist $A : B$ e 22. 6.
 gegeben^a, weil die ihr gleiche Verhältnis der a 2. def.
 gegebenen geraden Linien D, F ist gefunden wor-
 den.

Satz XIV.

A.

Wenn zwei Größen, wovon die eine ge-
 geben ist, zusammengenommen eine gegebene
 Verhältnis zu einer andern Größe haben; so
 hat der Ueberschuß dieser andern Größe über
 eine gegebene Größe, eine gegebene Verhält-
 nis zu der erstern Größe; und wenn der Ue-
 berschuß einer Größe über eine gegebene Größe,
 eine gegebene Verhältnis zu einer andern
 Größe hat; so hat diese andere Größe, mit
 einer gegebenen Größe zusammengenommen,
 eine gegebene Verhältnis zu der erstern Größe.
 Fig. 14.

B 2

Die

Die Größe A B samt der gegebenen Größe B E, das ist A E, habe zu der Größe C D eine gegebene Verhältnis; so wird der Ueberschuß von C D über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu A B haben.

a 2. dat.

b 19. 5.

Weil $A E : C D$ gegeben ist, so mache man $A E : C D = B E : F D$; demnach ist B E gegeben, und weil B E gegeben ist, so ist A E gegeben^a. Ferner weil $A E : C D = B E : F D$, so ist^b $A B : C F = A E : C D$; nun ist $A E : C D$ gegeben, folglich ist auch $A B : C F$ gegeben; das ist, C F der Ueberschuß von C D über die gegebene Größe F D, hat eine gegebene Verhältnis zu A B.

Nun setze man, der Ueberschuß der Größe A B über die gegebene B E, das ist, A E habe eine gegebene Verhältnis zu der Größe C D; hat C D, mit einer gegebenen Größe zusammen genommen, eine gegebene Verhältnis zu A B.

a 2. dat.

b 12. 5.

Weil $A E : C D$ gegeben ist, so mache man $A E : C D = B E : F D$, mithin ist B E gegeben; nun ist B E gegeben, folglich ist A E gegeben; und weil $A E : C D = B E : F D$, so *summando*^b $A B : C F = A E : C D$; nun ist $A E : C D$ gegeben, mithin ist $A B : C F$ gegeben, das ist, C F, das der Größe C D sammt der gegebenen D F gleich ist, hat eine gegebene Verhältnis zu A B.

Satz XV.

B.

Wenn eine Größe samt derjenigen, zu der eine andere Größe eine gegebene Verhältnis hat, gegeben ist; so wird die Summe dieser andern, und derjenigen, zu der die erste Größe eine gegebene Verhältnis hat, gegeben seyn. Fig. 15.

AB, CD seyen zwei Größen, wovon AB samt BE, zu welcher CD eine gegebene Verhältnis hat, gegeben ist; so wird CD samt der Größe, zu welcher AB eine gegebene Verhältnis hat, gegeben seyn.

Weil $CD : BE$ gegeben ist, so mache man $BE : CD = AE : FD$, mithin ist $AE : FD$ gegeben, und weil AE gegeben ist, so ist a FD a 2. dat. gegeben; weil nun $BE : CD = AE : FD$, so ist b $AB : FC = BE : CD$, und weil b cor 19.5. $BE : CD$ gegeben ist, so ist $AB : FC$ gegeben; nun ist FD oder $FC + CD$ gegeben, folglich ist CD samt FC , zu welcher AB eine gegebene Verhältnis hat, gegeben.

Satz XVI.

IO.

Wenn der Ueberschuß einer Größe über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu einer andern Größe hat; so wird der Ueberschuß beyder zusammen über eine gegebene

B 3

bene

eine Größe, eine gegebene Verhältnis zu der andern haben: und wenn der Ueberschuß zweier Größen mit einander über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu einer derselben hat; so hat entweder der Ueberschuß der andern über die gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu jener einten, oder die andere samt der Größe, zu welcher jene eine gegebene Verhältnis hat, ist gegeben. Fig. 16.

Der Ueberschuß der Größe AB über eine gegebene Größe habe zu der Größe BC eine gegebene Verhältnis; so wird der Ueberschuß von AC , der Summe beyder Größen, über die gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu BC haben.

AD sey die gegebene Größe, und der Ueberschuß von AB über dieselbe, das ist, DB habe zu BC eine gegebene Verhältnis, weil a $DB : BC$ gegeben ist, so ist a $DC : CB$ gegeben; nun ist AD gegeben, folglich hat DC der Ueberschuß von AC über die gegebene AD eine gegebene Verhältnis zu BC .

Nun aber setze man, der Ueberschuß zweier Größen AB, BC mit einander, über eine gegebene Größe, habe eine gegebene Verhältnis zu einer derselben BC ; so wird entweder der Ueberschuß der andern, nämlich AB , über die gegebene

bene Größe, eine gegebene Verhältnis zu B C haben, oder A B wird samt der Größe, zu welcher B C eine gegebene Verhältnis hat, gegeben seyn.

A D sey die gegebene Größe, und man nehme $AD < AB$ an; weil nun D C, der Ueberschuß von A C über A D, eine gegebene Verhältnis zu B C hat, so ist ^{b cor. 6. dat.} $DB : BC$ gegeben, das ist, D B der Ueberschuß von A B über die gegebene Größe A D, hat eine gegebene Verhältnis zu B C.

Ist aber die gegebene Größe größer als A B, so mache man A E derselben gleich; weil nun E C, der Ueberschuß von A C über A E, eine gegebene Verhältnis zu B C hat, so ist ^{c 6. dat.} $BC : BE$ gegeben; und weil A E gegeben ist, so ist A B samt B E, zu welcher B C eine gegebene Verhältnis hat, gegeben.

Satz XVII.

II.

Wenn der Ueberschuß einer Größe über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu einer andern Größe hat; so wird der Ueberschuß ebenderselben ersten Größe über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu den beyden Größen mit einander haben. Und wenn der Ueberschuß einer von zwei

B 4

Größe

Größen über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu beyden Größen mit einander hat; so wird der Ueberschuß eben derselben Größe über eine gegebene, zu der auch eine gegebene Verhältnis haben. Fig. 1.

Der Ueberschuß der Größe $A B$ über eine gegebene Größe habe zu der Größe $B C$ eine gegebene Verhältnis; so wird der Ueberschuß $A B$ über eine gegebene Größe eine gegebene Verhältnis zu $A C$ haben.

$A D$ sey die gegebene Größe; weil AD DB , der Ueberschuß von $A B$ über AD , eine gegebene Verhältnis zu $B C$ hat, so ist ^a $DC : DB = AD : DE$, gegeben. Nun mache man $DC : DB = AD : DE$, so ist $AD : DE$ gegeben; und weil AD gegeben ist, so ist ^b DE , mithin auch der Rest AE gegeben; und weil $AD : DE = DC : DB$, so ist ^c $AC : EB = DC : DB$, nun ist $DC : DB$ gegeben, mithin ist auch $AC : EB$ gegeben; und weil $EB : AC$, auch AE , gegeben ist, so hat EB , der Ueberschuß von $A B$ über die gegebene AE , eine gegebene Verhältnis zu $A C$.

Nun aber setze man, der Ueberschuß von $A B$ über eine gegebene Größe habe zu $A B + B C = A C$ eine gegebene Verhältnis; so hat der Ueberschuß von $A B$ über eine gegebene Größe eine gegebene Verhältnis zu $B C$.

A E

AE sey die gegebene Größe; weil nun EB, der Ueberschuß von AB über AE, eine gegebene Verhältnis zu AC hat, so mache man $AC:EB = AD:DE$, mithin ist AD:DE gegeben, wie auch^d AD:AE; und weil AE^a 6. dat. gegeben ist, so ist^b AD gegeben. Ferner weil $AC:EB = AD:DE$, so ist^e DC:DB =^e 19. 5. AC:EB; nun ist AC:EB gegeben, mithin auch DC:DB, wie auch^f DB:BC; nun ist^f cor. 6. dat. AD gegeben, folglich hat DB, der Ueberschuß von AB über die gegebene Größe AD, eine gegebene Verhältnis zu BC.

Satz XVIII.

14.

Wenn zu jeder von zwei Größen, die eine gegebene Verhältnis zu einander haben, eine gegebene Größe hinzugefügt wird; so werden entweder die Summen eine gegebene Verhältnis zu einander haben, oder der Ueberschuß der einen Summe über eine gegebene Größe, wird zu der andern eine gegebene Verhältnis haben. Fig. 18.

Die zwei Größen AB, CD haben zu einander eine gegebene Verhältnis, und zu AB werde die gegebene Größe BE, zu CD die gegebene DF hinzugefügt; so werden entweder die Summen AE, CF eine gegebene Verhältnis zu einander haben, oder der Ueberschuß der einen über

B 5

eine

eine gegebene GröÙe, wird zu der andern eine gegebene Verhältniß haben.

Weil BE , DF , jede für sich, gegeben sind

a 1. dat. so ist a ihre Verhältniß gegeben; wenn man

b 12. 5. $BE : DF = AB : CD$, so ist *summando*
 $AE : CF = BE : DF$, mithin ist $AE : CF$ gegeben.

Ist aber $BE : DF$ mit $AB : CD$ nicht ein-
 nerley; so ist entweder $BE : DF > AB : CD$
 oder $DF : BE > CD : AB$. Es sey erfüllt
 $BE : DF > AB : CD$, und man mache
 $AB : CD = BG : DF$; so ist, weil nach der
 Hypothese $AB : CD$ gegeben ist, auch $BG : DF$

c 2. dat. gegeben; nun ist DF gegeben, folglich • ist BG
 gegeben; und weil $BE : DF > (AB : CD =$

d 10. 5. $BG : DF$, so ist d $BE > BG$; ferner weil
 $AB : CD = BG : DF$, so ist b $AG : CF =$
 $AB : CD$; nun ist $AB : CD$ gegeben, mithin
 $AG : CF$ gegeben; und weil BE , BG , jede für
 sich, gegeben sind, so ist GE gegeben; mithin
 hat AG , der Ueberschuß von AE über eine ge-
 gebene GröÙe GE , eine gegebene Verhältniß zu
 CF . Der andere Fall läßt sich auf eben die-
 selbe Art beweisen.

15.

Satz XIX.

Wenn von jeder zweier GröÙen, die eine
 zu einer gegebene Verhältniß zu einander haben,
 eine

eine gegebene GröÙe weggenommen wird; so werden entweder die Reste eine gegebene Verhältniß zu einander haben, oder der Ueberschuß eines derselben über eine gegebene GröÙe, wird zu dem andern eine gegebene Verhältniß haben, Fig. 19.

Die GröÙen AB, CD haben eine gegebene Verhältniß zu einander, und von AB werde die gegebene GröÙe AE , von CD die gegebene CF weggenommen; so werden entweder die Reste EB, FD eine gegebene Verhältniß zu einander haben, oder der Ueberschuß des einen derselben über eine gegebene GröÙe, wird eine gegebene Verhältniß zu dem andern haben.

Weil AE, CF , jede für sich, gegeben sind, so ist ^a ihre Verhältniß gegeben; und wenn ^a 1. dat. diese Verhältniß mit $AB : CD$ einerley ist, so ist ^b $EB : FD = AB : CD$; weil nun $AB : CD$ ^b 19. 5. gegeben ist, so ist die Verhältniß der Reste $EB : FD$ gegeben.

Ist aber die Verhältniß $AB : CD$ mit $AE : CF$ nicht einerley, so ist entweder $AB : CD > AE : CF$, oder $CD : AB > CF : AE$. Es sey erstlich $AB : CD > AE : CF$, und man mache $AB : CD = AG : CF$, so ist $AG : CF$ gegeben; nun ist CF gegeben, mithin ^c ist AG ^c 2. dat. gegeben; ferner weil $AB : CD$, das ist, $AG : CF > AE : CF$, so ist ^d $AG > AE$; ^d 10. 5. nun sind AG, AE gegeben, folglich ist der
Rest

Rest $E G$ gegeben; weil nun $A B : C D = A G : C F$, so ist $G B : F D = A B : C D$ mithin ist $G B : F D$ gegeben; folglich hat $G B$ der Ueberschuß von $E B$ über die gegebene Größe $E G$, eine gegebene Verhältnis zu $F D$. Auf gleiche Art läßt sich der andere Fall beweisen.

Wenn zu einer von zwei Größen, die eine gegebene Verhältnis zu einander haben, eine gegebene Größe hinzugefügt, und von der andern eine gegebene Größe hinweggenommen wird; so wird der Ueberschuß der Summe über eine gegebene Größe = zu dem Rest eine gegebene Verhältnis haben. Fig. 20.

Die zwei Größen $A B$, $C D$ haben eine gegebene Verhältnis zu einander, und zu $A B$ werde die gegebene Größe $E A$ hinzugefügt, von $C D$ werde die gegebene $C F$ weggenommen; so wird der Ueberschuß der Summe $E B$ über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu dem Rest $F D$ haben.

Weil $A B : C D$ gegeben ist, so ist $A B : C D = A G : C F$; folglich ist $A G : C F$ gegeben; nun ist $C F$ gegeben, mithin $A G$ gegeben; ferner ist $E A$ gegeben, folglich ist $E A + A G = E G$ gegeben. Weil nun

A B

$AB:CD = AG:CF$, so ist^b $GB:FD =$ b 19. 5.

$AB:CD$; mithin weil $AB:CD$ gegeben ist, so ist $GB:FD$ gegeben. Nun ist EG gegeben, folglich hat GB , der Ueberschuß der Summe EB über die gegebene GröÙe EG , eine gegebene Verhältniß zu dem Rest FD .

Satz XXI.

C.

Wenn zwei GröÙen eine gegebene Verhältniß zu einander haben, und eine gegebene GröÙe zu der einen hinzugefügt, die andere aber von einer gegebenen GröÙe hinweggenommen wird; so ist die Summe samt der GröÙe, zu welcher der Rest eine gegebene Verhältniß hat, gegeben: und der Rest samt der GröÙe, zu welcher die Summe eine gegebene Verhältniß hat, ist gegeben. Fig. 21.

Die zwei GröÙen AB, CD haben eine gegebene Verhältniß zu einander; und zu AB werde die gegebene GröÙe BE hinzugefügt, CD aber werde von der gegebenen FD weggenommen: so ist die Summe AE samt der GröÙe, zu welcher der Rest FC eine gegebene Verhältniß hat, gegeben,

Weil $AB:CD$ gegeben ist, so mache man $AB:CD = GB:FD$, mithin ist $GB:FD$ gegeben; nun ist FD gegeben, mithin^a auch^a 2. dat.
 GB

h 19. 5.

GB; und weil BE gegeben ist, so ist das Ganze GE gegeben; und weil $AB : CD = GB : FD$, so ist^b $GA : FC = AB : CD$ mithin ist $GA : FC$ gegeben; nun ist, weil GE gegeben ist, $AE + GA$ gegeben; folglich ist die Summe $AE + GA$, zu welcher letzten Größe der Rest FC eine gegebene Verhältniß hat, gegeben.

Der zweyte Theil erhellet aus dem 15ten Satz.

D.

Satz XXII.

Wenn zwei Größen eine gegebene Verhältniß zu einander haben, und von der einen eine gegebene Größe weggenommen, die andere aber von einer gegebenen Größe weggenommen wird; so ist jeder der Reste sammt der Größe, zu welcher der andere Rest eine gegebene Verhältniß hat, gegeben. Fig. 22.

Die zwei Größen AB, CD haben eine gegebene Verhältniß zu einander, und von AB werde die gegebene Größe AE weggenommen, CD aber werde von der gegebenen CF weggenommen: so ist der Rest EB sammt der Größe, zu welcher der andere Rest DF eine gegebene Verhältniß hat, gegeben.

Weil $AB : CD$ gegeben ist, so mache man $AB : CD = AG : CF$, so ist $AG : CF$ ge-

geben, und weil CF gegeben ist, so ist^a AG a 2. dat.
 gegeben; nun ist AE gegeben, mithin auch der
 Rest EG ; und weil $AB : CD = AG : CF$,
 so ist^b $BG : DF = AB : CD$, folglich ist^b 19. 5.
 $BG : DF$ gegeben; und weil EG gegeben ist,
 so ist EB samt BG , zu welcher der andere Rest
 DF eine gegebene Verhältniß hat, gegeben.

Der andere Theil erhellet aus diesem und dem
 15ten Satz.

Satz XXIII.

20.

Wenn von zwei gegebenen Größen, sol-
 che Größen genommen werden, die eine ge-
 gebene Verhältniß zu einander haben; so
 werden entweder die Reste eine gegebene Ver-
 hältniß zu einander haben, oder der Ueber-
 schuß des einen derselben über eine gegebene
 Größe, wird zu dem andern eine gegebene
 Verhältniß haben. Fig. 23.

AB, CD seyen zwei gegebene Größen, und
 die Größen AE, CF , die eine gegebene Ver-
 hältniß zu einander haben, werden von ihnen
 weggenommen; so haben entweder die Reste
 EB, FD eine gegebene Verhältniß zu einan-
 der, oder der Ueberschuß des einen über eine ge-
 gebene Größe hat eine gegebene Verhältniß zu
 dem andern.

Weil

Weil AB, CD , jede für sich, gegeben sind
 so ist $AB : CD$ gegeben; und wenn $AB : CD$
 a 19. 5. $\equiv AE : CF$, so ist^a $EB : FD \equiv AB : CD$
 folglich ist die Verhältniß der Reste gegeben.

Ist aber $AB : CD$ mit $AE : CF$ nicht
 einerley, so ist entweder $AB : CD > AE : CF$
 oder $CD : AB > CF : AE$; es sey das erste
 und man mache $AE : CF \equiv AG : CD$,
 ist $AG : CD$ gegeben, weil $AE : CF$ gegeben
 b 2. dat. ist; nun ist CD gegeben, mithin^b auch AG ; und
 weil $AB : CD > (AE : CF \equiv) AG : CD$
 c 10. 5. so ist^c $AB > AG$; nun sind AB, AG gegeben,
 mithin ist der Rest BG gegeben; und weil
 d 19. 5. $AE : CF \equiv AG : CD$, so ist^d $EG : FD \equiv$
 $AE : CF$, mithin ist $EG : FD$ gegeben; nun
 ist GB gegeben, folglich hat EG , der Ueber-
 schuß von $E B$ über eine gegebene GröÙe GB ,
 eine gegebene Verhältniß zu FD .

Der andere Fall läßt sich auf eben die Art zeigen

Satz XXIV.

Wenn von drey GröÙen die erste eine
 gegebene Verhältniß zu der zweyten, und
 der Ueberschuß der zweyten über eine gegebene
 GröÙe, eine gegebene Verhältniß zu der
 dritten hat; so wird der Ueberschuß der er-
 sten über eine gegebene GröÙe, zu der drit-
 ten auch eine gegebene Verhältniß haben.
 Fig. 24. A B

$A B, C D, E$, seyen die drey Größen, wovon $A B$ eine gegebene Verhältniß zu $C D$ habe, und der Ueberschuß von $C D$ über eine gegebene GröÙe, habe eine gegebene Verhältniß zu E ; so wird der Ueberschuß von $A B$ über eine gegebene GröÙe eine gegebene Verhältniß zu E haben.

$C F$ sey die gegebene GröÙe, und der Ueberschuß von $C D$ über sie, nämlich $F D$, habe eine gegebene Verhältniß zu E ; weil nun $A B : C D$ gegeben ist, so mache man $A B : C D = A G : C F$; mithin ist $A G : C F$ gegeben; nun ist $C F$ gegeben, folglich^a ist $A G$ gegeben; und ^{a 2. dat.} weil $A B : C D = A G : C F$, so ist^b $G B : F D$ ^{b 19. 5.} $= A B : C D$, mithin ist $G B : F D$ gegeben; nun ist $F D : E$ gegeben, folglich^c ist $G B : E$ ^{c. 9. dat.} gegeben, und weil $A G$ gegeben ist, so hat $G B$, der Ueberschuß von $A B$ über die gegebene GröÙe $A G$, eine gegebene Verhältniß zu E .

Zusatz. 1. Und wenn die erste eine gegebene Verhältniß zu der zweyten, und der Ueberschuß der ersten über eine gegebene GröÙe, ein gegebene Verhältniß zu der dritten hat; so wird der Ueberschuß der zweyten über eine gegebene GröÙe, eine gegebene Verhältniß zu der dritten haben. Denn wenn die zweyte genannt wird die dritte, und die erste die zweyte; so wird dieser Zusatz mit dem Satze einerley seyn,

Zusatz. 2. Gleicherweise wenn die erste eine gegebene Verhältnis zu der zweyten, und der Ueberschuß der dritten über eine gegebene Größe auch eine gegebene Verhältnis zu der zweyten hat; so wird eben dieser Ueberschuß eine gegebene Verhältnis zu der ersten haben, wie aus 9. dat. erhellt.

17.

Satz XXV.

Wenn es drey Größen gibt, die so beschaffen sind, daß der Ueberschuß der ersten über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu der zweyten, und der Ueberschuß der dritten über eine gegebene Größe eine gegebene Verhältnis zu eben der zweyten hat; so wird entweder die erste eine gegebene Verhältnis zu der dritten, oder der Ueberschuß einer derselben über eine gegebene Größe, wird eine gegebene Verhältnis zu der andern haben. Fig. 25.

AB, C, DE seyen drey Größen, und der Ueberschuß einer jeden der zwo AB, DE über eine gegebene Größe, habe zu C eine gegebene Verhältnis; so haben entweder AB, DE eine gegebene Verhältnis zu einander, oder der Ueberschuß einer derselben über eine gegebene Größe wird zu der andern eine gegebene Verhältnis haben,

FB

FB der Ueberschuß von AB über die gegebene GröÙe AF, habe zu C eine gegebene Verhältniß, und GE der Ueberschuß von DE über eine gegebene GröÙe DG, habe zu C eine gegebene Verhältniß; weil nun FB, GE, jede für sich eine gegebene Verhältniß zu C haben, so haben sie ^a a 9. dat. eine gegebene Verhältniß zu einander. Nun sind zu FB, GE die gegebenen GröÙen AF, DG hinzugefügt, folglich ^b b 18. dat. haben entweder die Ganzen AB, DE eine gegebene Verhältniß zu einander, oder der Ueberschuß der einen davon über eine gegebene GröÙe, hat zu der andern eine gegebene Verhältniß.

Satz XXVI.

18.

Wenn es drey GröÙen gibt, die so beschaffen sind, daß die Ueberschüsse der einen über gegebene GröÙen, gegebene Verhältnisse zu den zwey andern GröÙen haben; so werden entweder diese zwey eine gegebene Verhältniß zu einander haben, oder der Ueberschuß der einen davon über eine gegebene GröÙe, wird zu der andern eine gegebene Verhältniß haben. Fig. 26.

AB, CD, EF seyen drey GröÙen, und GD, der Ueberschuß der einen CD über die gegebene GröÙe CG, habe zu AB eine gegebene Verhältniß; und gleicherweise habe KD, der Ueberschuß

C 2

ebene

ebenderselben CD über eine gegebene Größe CK eine gegebene Verhältnis zu EF ; so hat entweder AB eine gegebene Verhältnis zu EF , oder der Ueberschuß der einen davon über eine gegebene Größe, hat eine gegebene Verhältnis zu dem andern.

Weil GD eine gegebene Verhältnis zu AB hat, so mache man $GD : AB = CG : HA$ mithin ist $CG : HA$ gegeben; nun ist CG gegeben, mithin^a auch HA ; und weil $GD : AB = CG : HA$, so ist^b $CD : HB = GD : AB$ mithin ist $CD : HB$ gegeben. Gleichermassen weil KD eine gegebene Verhältnis zu EF hat, so mache man $KD : EF = CK : LE$; mithin ist $CK : LE$ gegeben; nun ist CK gegeben, mithin^a auch LE ; und weil $KD : EF = CK : LE$, so ist^b $CD : LF = KD : EF$ mithin ist $CD : LF$ gegeben; nun aber ist $CD : HB$ gegeben, folglich^c ist $HB : LF$ gegeben; und wenn von HB, LF die gegebenen Größen HA, LE weggenommen werden, so haben entweder die Reste AB, EF eine gegebene Verhältnis zu einander, oder der Ueberschuß der einen davon über eine gegebene Größe, hat eine gegebene Verhältnis zu dem andern^d.

Anderer Beweis.

AB, C, DE seien drey Größen, und die Ueberschnsse der einen davon C über gegebene Größen,

Größen, haben gegebene Verhältnisse zu A B und D E; so haben entweder A B, D E eine gegebene Verhältniß zu einander, oder der Ueberschuß der einen davon über eine gegebene Größe hat eine gegebene Verhältniß zu der andern.

Weil der Ueberschuß von C über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältniß zu A B hat, so hat^a A B samt einer gegebenen Größe^a 14. dat. eine gegebene Verhältniß zu C; diese gegebene Größe sey A F, mithin ist F B : C gegeben; gleicherweise weil der Ueberschuß von C über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältniß zu D E hat, so hat^a D E samt einer gegebenen Größe, eine gegebene Verhältniß zu C; diese gegebene Größe sey D G, mithin ist G E : C gegeben; nun ist F B : C gegeben, folglich^b ist^b 9. def. F B : G E gegeben; und wenn von F B, G E die gegebenen Größen A F, D G weggenommen werden, so haben entweder die Reste A B, D E eine gegebene Verhältniß zu einander, oder der Ueberschuß des einen davon über eine gegebene Größe, hat eine gegebene Verhältniß zu der andern^c.

c 19. dat.

Satz XXVII.

19.

Wenn es drey Größen gibt, die so beschaffen sind, daß der Ueberschuß der ersten über eine gegebene Größe, eine gegebene Ver-

§ 3

hältniß

Verhältnis zu der zweyten, und der Ueberschuß der zweyten über eine gegebene Größe, auch eine gegebene Verhältnis zu der dritten hat: so wird der Ueberschuß der ersten über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu der dritten haben. Fig 27.

A B, C D, E seyen drey Größen, die so beschaffen sind, daß der Ueberschuß der ersten A B über die gegebene Größe A G, das ist G B eine gegebene Verhältnis zu C D; und F D der Ueberschuß von C D über die gegebene Größe C F, eine gegebene Verhältnis zu E hat: so wird der Ueberschuß von A B über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu E haben.

a 2. dat.

b 19. 5.

c 9. dat.

Weil $GB : CD$ gegeben ist, so mache man $GB : CD = GH : CF$, mithin ist $GH : CF$ gegeben; nun ist CF gegeben, mithin^a auch GH ; und weil AG gegeben ist, so ist AH gegeben: weil nun $GB : CD = GH : CF$, so ist^b $GB : CD = HB : FD$, folglich ist $HB : FD$ gegeben; nun ist $FD : E$ gegeben: mithin^c auch $HB : E$; und weil AH gegeben ist, so hat HB , der Ueberschuß von AB über die gegebene Größe AH , eine gegebene Verhältnis zu E .

Anderer Beweis.

A B, C, D seyen drey Größen, und der Ueberschuß E B von der ersten A B über die gegebene

gegebene Größe AE , habe eine gegebene Verhältnis zu C , und der Ueberschuß von C über eine gegebene Größe, habe eine gegebene Verhältnis zu D : so wird der Ueberschuß von AB über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu D haben.

Weil $EB : C$ gegeben ist, und der Ueberschuß von C über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu D hat, so hat d der Ueberschuß von EB über eine gegebene Größe, eine gegebene Verhältnis zu D ; diese gegebene Größe sey EF ; mithin hat FB , der Ueberschuß von EB über EF , eine gegebene Verhältnis zu D ; nun ist AF gegeben, weil AE, EF gegeben sind; folglich hat FB , der Ueberschuß von AB über eine gegebene Größe AF , eine gegebene Verhältnis zu D . d 24. dat.

Satz XXVIII.

25.

Wenn zwei, der Lage nach gegebene, Linien einander schneiden, so sind der Punct oder die Puncte, worin sie sich schneiden, gegeben. Fig. 28.

Zwei der Lage nach gegebene Linien AB, CD schneiden sich in dem Punct E ; so ist der Punct E gegeben.

E 4

Weil

a 4. def.

Weil die Linien AB , CD der Lage nach gegeben sind, so haben sie immer einerley Lage ^a, mithin haben der Punct, oder die Puncte, worinn sie einander schneiden, immer einerley Lage: und weil die Linien AB , CD sich finden lassen ^a so lassen sich der Punct oder die Puncte, worinn sie sich schneiden, gleicherweise finden, und sind daher der Lage nach gegeben ^a.

26.

Satz XXIX.

Wenn die Endpuncte einer geraden Linie der Lage nach gegeben sind, so ist die gerade Linie der Lage und GröÙe nach gegeben.

a 4. def.

b I. Postulat.

Weil die Endpuncte der geraden Linie gegeben sind, so lassen sie sich finden ^a: es seyen die Puncte A , B , zwischen denen sich eine gerade Linie AB ziehen läßt ^b; diese hat eine unveränderliche Lage, weil zwischen zween gegebenen Puncten sich nur Eine gerade Linie ziehen läßt: und wenn die gerade Linie AB gezogen ist, so ist ihre GröÙe zugleich dargelegt oder gegeben, folglich ist die gerade Linie AB der Lage und GröÙe nach gegeben.

27.

Satz XXX.

Wenn einer von den Endpuncten einer geraden Linie der Lage und GröÙe nach gegebenen geraden Linie

Linie gegeben ist, so wird der andere Endpunct auch gegeben seyn. Fig. 29.

Der Punct A sey gegeben, nämlich einer von den Endpuncten einer der Größe nach gegebenen geraden Linie, und welcher in der geraden Linie A C, die der Lage nach gegeben ist, liege; so wird der andere Endpunct auch gegeben seyn.

Weil die gerade Linie der Größe nach gegeben ist, so läßt^a sich eine ihr gleiche finden; a 1. def. es sey die gerade Linie D; von der größern geraden Linie A C schneide man $AB \equiv D$ ab; mithin ist der andere Endpunct B von der geraden Linie AB gefunden; und der Punct B hat immer einerley Lage, weil jeder andere Punct in A C auf ebender selben Seite von A, zwischen ihm und dem Punct A eine größere oder kleinere gerade Linie als AB, das ist, als D, abschneidet; mithin ist der Punct B gegeben^b: und b 4. def. es ist klar, daß ein anderer solcher Punct in der, auf der entgegengesetzten Seite von A verlängerten A C sich finden läßt.

Satz XXXI.

28.

Wenn eine gerade Linie durch einen gegebenen Punct mit einer der Lage nach gegebenen geraden Linie parallel gezogen wird; so ist sie der Lage nach gegeben. Fig. 30.

C 5

A

A sey ein gegebener Punct, und BC eine der Lage nach gegebene gerade Linie; so wird die gerade Linie, durch A mit BC parallel gezogen der Lage nach gegeben seyn.

a 31. I.

Durch A ziehe man ^a die gerade Linie DAE parallel mit BC; so hat DAE immer einerley Lage, weil keine andere gerade Linie durch A mit BC parallel gezogen werden kann; folglich ist die gerade Linie DAE, die gefunden worden ist,

b 4. def.

der Lage nach gegeben ^b.

29.

Satz XXXII.

Wenn an einem gegebenen Punct in einer der Lage nach gegebenen geraden Linie, eine gerade Linie gezogen wird, die einen gegebenen Winkel mit ihr macht; so ist diese gerade Linie der Lage nach gegeben. Fig. 31.

Es sey AB eine der Lage nach gegebene gerade Linie, und C ein gegebener Punct in ihr; so ist die an C gezogene gerade Linie, die einen gegebenen Winkel mit CB macht, der Lage nach gegeben.

a I. def.

Weil der Winkel gegeben ist, so läßt ^a sich einer finden, der ihm gleich ist; es sey der Winkel D; an dem Punct C in der gegebenen

b 23. I.

geraden Linie AB mache man ^b den Winkel ECB gleich dem Winkel D; mithin hat die Linie EC

immer

immer einerley Lage, weil jede andere an den Punct C gezogene gerade Linie FC , einen grössern oder kleinern Winkel mit CB macht, als ECB , oder D ; folglich ist die gerade Linie EC , die gefunden worden, der Lage nach gegeben.

Es ist zu bemerken, daß es auf einer Seite von AB zwei gerade Linien EC , GC giebt, die gleiche Winkel mit ihr machen, und die, auf die andere Seite verlängert, auch gleiche Winkel mit ihr machen.

Satz XXXIII.

30.

Wenn eine gerade Linie von einem gegebenen Punct an eine der Lage nach gegebene gerade Linie gezogen wird, und mit ihr einen gegebenen Winkel macht; so ist sie der Lage nach gegeben. Fig. 32.

Von dem gegebenen Punct A werde die gerade Linie AD an die der Lage nach gegebene gerade Linie BC gezogen, und mache mit ihr einen gegebenen Winkel ADC ; so ist AD der Lage nach gegeben.

Durch den Punct A ziehe man^a die gerade a 31. I. Linie EAF parallel mit BC ; weil nun BC der Lage nach gegeben ist, so ist^b EAF der Lage b 31. dat. nach gegeben: und weil die Linie AD die Parallel-Linien BC , EF berührt, so ist^c EAD c 29. I.

$\equiv ADC$; nun ist ADC gegeben, mithin
 auch EAD gegeben, folglich weil die Linie D
 an einen gegebenen Punct A in der, der Lage
 nach gegebenen, geraden Linie EF gezogen ist
 und einen gegebenen Winkel EAD mit ihr macht
 d 32. dat. so ist $d AD$ der Lage nach gegeben.

31.

Satz XXXIV.

Wenn von einem gegebenen Punct an
 eine der Lage nach gegebene gerade Linie, eine
 andere gezogen wird, die der Größe nach ge-
 geben ist; so wird sie auch der Lage nach ge-
 geben seyn. Fig. 33.

A sey ein gegebener Punct, und BC eine
 der Lage nach gegebene gerade Linie, so ist eine
 von dem Punct A an BC gezogene, der Größe
 nach gegebene Linie, auch der Lage nach ge-
 ben.

Weil die gerade Linie der Größe nach ge-
 geben ist, so läßt sich eine finden, die ihr
 gleich ist; es sey die gerade D ; von dem Punct
 A ziehe man AE senkrecht auf BC , und weil
 AE die kürzeste von allen geraden Linien ist, die von
 dem Punct A an BC können gezogen werden, so
 kann die gerade D , nicht kleiner seyn als AE ,
 weil von A an BC eine ihr gleiche gezogen wer-
 den soll. Wenn daher $D \equiv AE$ ist, so ist AE

a 1. def.

die von A an BC gezogene, der Größe nach gegebene, gerade Linie; und es ist evident^b, daß^b 33. dat. AE der Lage nach gegeben ist, weil sie von dem gegebenen Punct A an die der Lage nach gegebene BC gezogen ist, und mit BC den gegebenen Winkel AEC macht.

Ist aber die gerade Linie D nicht gleich AE, so muß sie größer seyn als AE: man verlängere AE, und mache $AF = D$; und von dem Mittelpunkt A mit dem Halbmesser AF beschreibe man den Kreisbogen GFH, und ziehe AG, AH; weil nun der Kreisbogen GFH,^c und die^c 6. def. gerade Linie BC, der Lage nach gegeben sind, so ist^d ihr Durchschnitt G gegeben; nun ist der^d 28. dat. Punct A gegeben, folglich ist AG der Lage nach gegeben^e, das ist, die gerade Linie AG, die,^e 29. dat. wegen ihrer Gleichheit mit D, der Größe nach gegeben, und von dem Punct A an die der Lage nach gegebene BC gezogen ist, ist auch der Lage nach gegeben; und gleicherweise ist AH der Lage nach gegeben; folglich giebt es in diesem Fall zwei gerade Linien von einerley gegebenen Größe, die von einem gegebenen Punct A an eine der Lage nach gegebene gerade Linie B können gezogen werden.

Satz XXXV.

32.

Wenn eine gerade Linie zwischen zwei geraden der Lage nach gegebenen, Parallelen Linien

Linien gezogen wird, und mit ihnen gegebene Winkel macht; so ist sie der Größe nach gegeben. Fig. 34.

Die gerade Linie EF sey zwischen den, der Lage nach gegebenen, Parallel-Linien AB, CD gezogen, und mache mit ihnen die gegebenen Winkel BEF, EFD; so ist EF der Größe nach gegeben.

- In CD nehme man den Punct G, und
 a 31. I. durch G ziehe man^a GH parallel mit EF; weil
 man CD die Parallel-Linien GH, EF berührt,
 b 29. I. so ist^b $EFD = HGD$; nun ist EFD gegeben,
 mithin ist auch HGD gegeben; und weil
 HG an den gegebenen Punct G in der, der Lage
 nach gegebenen, geraden Linie CD gezogen
 ist, und mit ihr den gegebenen Winkel HGD
 c 32. dat. macht, so ist^c die gerade Linie HG der Lage
 nach gegeben; nun ist AB der Lage nach gegeben,
 d 28. dat. mithin ist der Punct H gegebend^d; und
 weil der Punct G auch gegeben ist, so ist GH
 e 29. dat. der Größe nach gegeben^e; folglich weil $EF = GH$,
 so ist EF der Größe nach gegeben.

33.

Satz XXXVI.

Wenn eine, der Größe nach gegebene, gerade Linie zwischen zwei geraden, der Lage nach gegebenen, Parallel-Linien gezogen wird,

wird, so wird sie mit den Parallel-Linien gegebene Winkel machen. Fig. 35.

Die der Größe nach gegebene gerade Linie EF sey zwischen den Parallel-Linien AB, CD, die der Lage nach gegeben sind, gezogen, so werden die Winkel AEF, EFC gegeben seyn.

Weil EF der Größe nach gegeben ist, so läßt a sich eine ihr gleiche gerade Linie finden; a 1. def. sie sey G. In AB nehme man einen gegebenen Punct H, und von ihm ziehe man b HK senkrecht auf CD; demnach kann die gerade Linie G, das ist, EF nicht kleiner seyn als HK; und wenn $G = HK$, so ist auch $EF = HK$; mithin macht EF rechte Winkel mit CD, sonst würde EF größer seyn als HK, welches ungeeignet ist; demnach ist EFD ein rechter, folglich gegebener, Winkel. b 12. 1.

Ist aber die gerade Linie G nicht gleich HK, so muß sie größer als HK seyn. Man verlängere HK, und nehme $HL = G$, und aus dem Mittelpunct H mit dem Halbmesser HL beschreibe man den Kreisbogen MLN, und vereinige HM, HN; weil nun der Kreis c MLN, c 6. def. und die gerade Linie CD der Lage nach gegeben sind, so sind die Puncte M, N gegeben d; und d 28. dat. weil der Punct H gegeben ist, so sind e die Linien e 29. dat. HM, HN der Lage nach gegeben; nun ist CD der Lage nach gegeben; mithin sind die Winkel

- f 5. def. Winkel HMN, HNM der Lage nach gegeben
 Von den geraden Linien HM, HN sey HN die
 jenige, die mit EF nicht parallel ist, denn E
 kann nicht mit beyden parallel seyn, und m
 g 34. I. ziehe EO parallel mit HN; so ist $\angle$ EO =
 HN, das ist, $\equiv$ G; und weil EF $\equiv$ G
 so ist EO $\equiv$ EF, und EFO $\equiv$ EOF
 h 29. I. das ist h, $\equiv$ dem gegebenen Winkel HNM
 und weil HNM ($\equiv$ EFO oder EFD)
 k I. def. gefunden worden, so ist k EFD, das ist, AEF
 der Größe nach gegeben, folglich auch der W
 kel EFC.

E.

Satz XXXVII.

Wenn eine der Größe nach gegebene ge
 rade Linie von einem Punct an eine der Lag
 nach gegebene gerade Linie unter einem gege
 benen Winkel gezogen wird; so wird die ge
 rade Linie, die durch diesen Punct mit der
 der Lage nach gegebenen, geraden Linie pa
 rallel gezogen ist, der Lage nach gegeben seyn
 Fig. 36.

Die der Größe nach gegebene Linie AD se
 von dem Punct A an die der Lage nach gegeben
 BC, unter dem gegebenen Winkel ADC, geze
 gen; so wird die Linie EAF, die durch A mit
 BC parallel gezogen ist, der Lage nach gegeben
 seyn.

In BC nehme man einen gegebenen Punct G , und ziehe GH parallel mit AD ; weil nun HG an einen gegebenen Punct G in einer der Lage nach gegebenen Linie BC , unter einem gegebenen Winkel HGC (denn a HGC ist gleich a 29. I. dem gegebenen Winkel ADC) gezogen ist; so ist b HG der Lage nach gegeben; nun ist HG b 32. dat. auch der Größe nach gegeben, weil sie c der, c 34. I. der Größe nach, gegebenen AD gleich ist; mithin weil G , einer von den Endpuncten der, der Lage und Größe nach, gegebenen Linie GH gegeben ist, so ist d der andere Endpunct H gegeben, d 30. dat. folglich ist die gerade Linie EAF , die durch den gegebenen Punct H mit der, der Lage nach, gegebenen BC parallel gezogen ist, der Lage nach gegeben e . e 31. dat.

Satz XXXVIII.

34.

Wenn eine gerade Linie von einem gegebenen Punct an zwei, der Lage nach gegebene, gerade Parallel-Linien gezogen wird; so ist die Verhältniß der, zwischen dem gegebenen Punct und den Parallel-Linien liegenden Segmente gegeben. Fig. 37.

Die gerade Linie EFG sey von dem gegebenen Punct E an die Parallel-Linien AB , CD gezogen; so ist $EF : EG$ gegeben.

D

Von

- Von dem Punct E ziehe man EHK senkrecht auf CD; weil nun von einem gegebenen Punct E die gerade EK an die der Lage nach gegebene CD, unter einem gegebenen Winkel EKC, gezogen ist; so ist ^a EK der Lage nach gegeben; nun sind AB, CD der Lage nach gegeben, mithin ^b sind die Puncte H, K gegeben und weil der Punct E gegeben ist, so sind ^c EH, EK der Größe nach gegeben, folglich ^d ist ihre Verhältniß gegeben. Nun ist, weil AB, CD mit einander parallel sind, $EH : EK = EF : EG$; folglich ist $EF : EG$ gegeben.

35. 36.

Satz XXXIX.

Wenn die Verhältniß der Segmente einer geraden Linie, die zwischen einem in der gegebenen Punct und zwei Parallel = Linien liegen, gegeben ist; so ist, wenn eine von den Parallel = Linien der Lage nach gegeben ist, auch die andere der Lage nach gegeben. Fig. 38.

Von dem Punct A sey die gerade Linie AE an die zwei Parallel = Linien FG, BC gezogen, und die Verhältniß der Segmente AE, AD sey gegeben; so wird, wenn eine von den Parallel = Linien BC der Lage nach gegeben ist, auch die andere FG der Lage nach gegeben seyn.

Von dem Punct A ziehe man AH senkrecht auf BC, und AH schneide FG in K; weil nun AH von dem gegebenen Punct A an die der Lage nach gegebene BC gezogen ist, und mit ihr einen gegebenen Winkel AHD macht, so ist ^a a 33. dat. AH der Lage nach gegeben; und weil BC auch der Lage nach gegeben ist, so ist ^b b 28. dat. gegeben; nun ist auch der Punct A gegeben, mithin ^c c ist AH der Größe nach gegeben; und ^c c 29. dat. weil FG, BC parallel sind, so ist $AE : AD = AK : AH$; nun ist $AE : AD$ gegeben, folglich auch $AK : AH$; und weil AH der Größe nach gegeben ist, so ist ^d d AK der Größe ^d d 2. dat. nach gegeben; nun ist sie auch der Lage nach gegeben, und der Punct A ist gegeben, mithin ^e e 30. dat. ist der Punct K gegeben. Und weil die gerade Linie FG durch den gegebenen Punct K mit der, der Lage nach gegebenen, BC parallel gezogen ist, so ist ^f f FG der Lage nach gegeben, ^f f 31. dat.

Satz XL.

37. 38.

Wenn die Verhältnis der Segmente einer geraden Linie, in die sie durch drey gerade Parallel = Linien geschnitten worden, gegeben ist; so wird, wenn zwei von den Parallel = Linien der Lage nach gegeben sind, auch die dritte der Lage nach gegeben seyn, Fig. 39.

D 2

AB,

AB, CD, HK seyen drey gerade Parallel-Linien, wovon AB, CD der Lage nach gegeben seyn, und die Verhältniß der Segmente GE : GF, in die die gerade Linie GEF durch die drey Parallel-Linien geschnitten worden, sey gegeben; so wird die dritte Parallel-Linie HK der Lage nach gegeben seyn.

- In AB nehme man einen gegebenen Punkt L, und ziehe LM senkrecht auf CD, so daß sie der HK in N begegne; weil nun LM von dem gegebenen Punkt L an die der Lage nach gegebene CD gezogen ist, und einen gegebenen Winkel LMD mit ihr macht, so ist a LM der Lage nach gegeben; nun ist CD der Lage nach gegeben, mithin b ist der Punkt M gegeben; und weil c 29. dat. der Punkt L gegeben ist, so ist c LM der Größe nach gegeben; und weil GE : GF gegeben ist, und $GE : GF = NL : NM$, so ist NL : NM gegeben; folglich ist d ML : LN gegeben; nun ist LM der Größe nach gegeben; mithin e 2. dat. e ist LN der Größe nach gegeben; und weil sie auch der Lage nach gegeben, und der Punkt L gegeben ist, so f 30. dat. ist der Punkt N gegeben; folglich weil die gerade Linie HK durch den gegebenen Punkt N mit der, der Lage nach, gegebenen CD parallel gezogen ist, so ist sie g der Lage nach gegeben.

Satz XLI.

F.

Wenn eine gerade Linie drey der Lage nach gegebene gerade Parallel-Linien schneidet; so haben die Segmente derselben, die zwischen den Parallel-Linien liegen, eine gegebene Verhältniß. Fig. 40.

Die geraden Parallel-Linien AB , CD , EF , die der Lage nach gegeben sind, seyen durch die gerade Linie GHK geschnitten; so wird die Verhältniß $GH : HK$ gegeben seyn.

In AB nehme man einen gegebenen Punkt L , und ziehe LM senkrecht auf CD , so daß sie EF in N beegne; demnach^a ist LM der Lage a 33. dat. nach gegeben; nun sind CD , EF der Lage nach gegeben, mithin sind die Punkte M , N gegeben; und weil der Punkt L gegeben ist, so sind^b die b 29. dat. geraden Linien LM , MN der Größe nach gegeben, folglich ist^c $LM : MN$ gegeben, nun ist^c 1. dat. $LM : MN = GH : HK$, folglich ist $GH : HK$ gegeben. (*)

D 3

Satz

(*) Daß $LM : MN = GH : HK$ läßt sich beweisen, wenn man von G zu N eine Linie zieht, aus 4. 6. und 19. 5. Neb.

39.

Satz XLII.

Wenn jede von den Seiten eines Dreyecks der Größe nach gegeben ist; so ist das Dreyeck der Gattung nach gegeben, (*triangulum specie datum.*) Fig. 41.

Es sey jede von den Seiten des $\triangle ABC$ der Größe nach gegeben; so ist das $\triangle ABC$ der Gattung nach gegeben.

a 22. I.

Man mache ^a ein $\triangle DEF$, dessen Seiten, jede, den gegebenen geraden Linien AB , BC , CA gleich seyen; welches sich thun läßt, weil zwei zusammen genommen größer seyn müssen, als die dritte; nun sey $DE = AB$, $EF = BC$, $FD = CA$; weil also die zwei Seiten ED , DF jede für sich gleich sind den zwei Seiten BA , AC , und die Grundlinie EF gleich der Grundlinie BC , so ist ^b der Winkel EDF gleich dem Winkel BAC ; folglich weil $EDF = BAC$ ist gefunden worden, so ist ^c BAC gegeben; gleicherweise sind die Winkel B , C gegeben. Und weil die Seiten AB , BC , CA gegeben sind, so sind ^d ihre Verhältnisse zu einander gegeben, folglich ^e ist $\triangle ABC$ der Gattung nach gegeben.

b 8. I.

c 1. def.

d 1. dat.

e 3. def.

Satz

Satz LXIII.

40.

Wenn jeder von den Winkeln eines
Dreyecks der Größe nach gegeben ist, so ist
das Dreyeck der Gattung nach gegeben.
Fig. 42.

Jeder von den Winkeln des $\triangle ABC$ sey
der Größe nach gegeben; so ist das $\triangle ABC$
der Gattung nach gegeben.

Man ziehe eine, der Lage und Größe nach,
gegebene gerade Linie DE, und an den End-
puncten D, E mache man ^a den Winkel EDF ^a 23. 1.
 $\equiv BAC$, und den Winkel DEF $\equiv ABC$;
so wird auch der Winkel EFD $\equiv BCA$ seyn;
weil nun jeder der Winkel an den Puncten A,
B, C, gegeben ist, so ist auch jeder an den Punc-
ten D, E, F gegeben; und weil die gerade Li-
nie FD an den gegebenen Punct D in der, der
Lage nach gegebenen DE, gezogen ist, und den
gegebenen Winkel EDF macht, so ist ^b DF der ^b 23. dat.
Lage nach gegeben. Gleicherweise ist EF der
Lage nach gegeben; mithin ist der Punct F ge-
geben; und weil die Puncte D, E gegeben sind,
so ist ^c jede der Linien DE, EF, FD der Größe ^c 29. dat.
nach gegeben; folglich ^d ist das $\triangle DEF$ der ^d 42. dat.
Gattung nach gegeben; und weil es dem $\triangle ABC$
ähnlich ist ^e, so ist $\triangle ABC$ der Gattung nach ^e $\left\{ \begin{array}{l} 4. 6. \\ 1. \text{ def.} \\ 6. \end{array} \right.$
gegeben.

41.

Satz XLIV.

Wenn einer von den Winkeln eines Dreyecks gegeben ist, und die anliegenden Seiten eine gegebene Verhältniß zu einander haben; so ist das Dreyeck der Gattung nach gegeben. Fig. 43.

Das $\triangle ABC$ habe einen seiner Winkel BAC gegeben, und die anliegenden Seiten BA, AC haben eine gegebene Verhältniß zu einander; so wird das $\triangle ABC$ der Gattung nach gegeben seyn.

Man nehme eine der Lage und Größe nach gegebene gerade Linie DE , und an dem Punkt D mache man EDF gleich dem gegebenen Winkel BAC ; demnach ist EDF gegeben; und weil die gerade FD an einen gegebenen Punkt D in der, der Lage nach, gegebenen ED gezogen ist, und den gegebenen Winkel EDF macht, so ist FD der Lage nach gegeben. Ferner weil $BA:AC = ED:DF$, und ziehe EF ; weil nun $ED:DF$ gegeben ist, und ED gegeben ist, so ist DF der Größe nach gegeben; nun ist sie auch der Lage nach gegeben, und der Punkt D ist gegeben, folglich E ist der Punkt F gegeben; nun sind die Punkte D, E gegeben, mithin sind DE, EF, FD der Größe nach gegeben; folglich ist

a 32. dat.

b 2. dat.

c 30. dat.

d 29. dat.

e 42. dat.

das $\triangle DEF$ der Gattung nach gegeben; und weil in den $\triangle ABC, DEF$, der Winkel $BAC = EDF$ und $BA:AC = ED:DF$, so f sind die Dreyecke einander ähnlich; nun ist f 6. 6. das $\triangle DEF$ der Gattung nach gegeben, folglich auch das $\triangle ABC$.

Satz XLV.

42.

Wenn die Seiten eines Dreyecks gegebene Verhältnisse zu einander haben, so ist das Dreyeck der Gattung nach gegeben. Fig. 44.

Die Seiten des $\triangle ABC$ haben gegebene Verhältnisse zu einander; so ist das $\triangle ABC$ der Gattung nach gegeben.

Man nehme eine der Größe nach gegebene gerade Linie D; weil nun $AB:BC$ gegeben ist, so mache man $AB:BC = D:E$; mithin ist^a wegen der gegebenen D auch E gegeben, a 2. dat. Weil ferner $BC:CA$ gegeben ist, so mache man $BC:CA = E:F$, wo, weil E gegeben ist, auch^a F gegeben ist. Weil nun $AB:BC = D:E$ so ist *componendo* $AB+BC:BC = D+E:E$; nun ist $BC:CA = E:F$, folglich *ex æquo*^b $AB+BC:CA = D+E:F$, b 22. 5. $D+E:F$; mithin, weil^c $AB+BC > CA$, c 20. 1. so ist^d $D+E > F$; und so sind je zwey und d def. 5. 5. zwey von den drey Linien D, E, F, zusammen-

D 5

genommen

- genommen größer als die dritte. Nun mache
 e 22. 1. man^e ein $\triangle GHK$, dessen Seiten den Linien
 D, E, F gleich seyn, so daß $GH = D, HK = E, GK = F$; und weil jede der Linien
 D, E, F gegeben ist, so ist auch jede der Seiten
 GH, HK, GK der Größe nach gegeben;
 f 42. dat. mithin^f ist das $\triangle GHK$ der Gattung nach gegeben;
 nun ist $AB : BC = (D : E =) GH : HK$; ferner $BC : CA = (E : F =) HK : GK$;
 folglich *ex æquo* $AB : AC = GH : GK$.
 § 5. 6. Mithin ist^g $\triangle ABC$ mit dem $\triangle GHK$ gleichwinklicht und ähnlich;
 nun ist das $\triangle GHK$ der Gattung nach gegeben, folglich
 ist auch $\triangle ABC$ der Gattung nach gegeben.

Zusatz. Wenn man fodert, daß ein Dreyek soll
 verfertiget werden, dessen Seiten eben die
 Verhältnisse unter einander haben, wie drey
 gegebene gerade Linien; so ist nothwendig,
 daß je zwey und zwey derselben zusammenge-
 nommen größer seyn als die dritte.

43.

Satz XLVI.

Wenn die Seiten eines rechtwinklichten
 Dreyeks, die einen der spitzigen Winkel ein-
 schließen, eine gegebene Verhältnis zu einan-
 der haben; so ist das Dreyek der Gattung
 nach gegeben. Fig. 45.

Die

Die Seiten AB , BC , die den spitzigen Winkel ABC des in A rechtwinklichten $\triangle ABC$ einschließen, haben eine gegebene Verhältniß zu einander; so ist das $\triangle ABC$ der Gattung nach gegeben.

Man nehme eine der Lage und Größe nach gegebene gerade Linie DE ; weil nun $AB : BC$ gegeben ist, so mache man $AB : BC = DE : EF$; so ist $DE : EF$ gegeben; und weil DF gegeben ist, so ist ^a EF gegeben. Ferner ^a 2. dat. weil in der Proportion $AB : BC = DE : EF$, $AB < BC$ ^b, so ist ^c $DE < EF$. Von dem ^b 19. I. ^c def. 5. 5. Punct D ziehe man DG unter einem rechten Winkel an DE , und aus dem Mittelpunct E beschreibe man mit dem Halbmesser EF einen Kreis, der DG in zween Puncten schneiden wird: einer davon sey G , und man ziehe EG ; demnach ist der Umfang des Kreises der Lage nach gegeben ^d; nun ist ^e die gerade DG der ^d 6. def. ^e 32. dat. Lage nach gegeben, weil sie an den gegebenen Punct D in der, der Lage nach, gegebenen DE , unter einem gegebenen Winkel gezogen ist; mithin ^f ist der Punct G gegeben; und weil die ^f 28. dat. Puncte D , E gegeben sind, so sind DE , EG , ^g 29. dat. GD der Größe nach gegeben, und das $\triangle DEG$ ist der Gattung nach gegeben ^h. Und weil in den ^h 42. dat. $\triangle ABC$, DEG , der Winkel $BAC = EDG$, und die einschließenden Seiten der Winkel ABC , DEG proportionell sind, und jeder

der

i 7. 6.

der andern Winkel BCA , EGD kleiner ist als ein rechter; so ist $\triangle ABC$ gleichwinklig mit ähnlich dem $\triangle DEG$; nun ist $\triangle DEG$ der Gattung nach gegeben, folglich ist auch $\triangle ABC$ der Gattung nach gegeben; und das Dreyeck, das entsteht, wenn man von E an den andern Punct, wo der Kreis DG schneidet, eine gerade Linie zieht, ist gleicherweise der Lage nach gegeben.

44.

Satz XLVII.

Wenn der schiefe Winkel eines Dreyecks gegeben ist; und wenn die Seiten, die einen andern Winkel einschließen, eine gegebene Verhältniß zu einander haben; so ist das Dreyeck der Gattung nach gegeben Fig. 46.

In dem $\triangle ABC$ sey einer seiner schiefen Winkel ABC gegeben, und die Seiten BA , AC , die einen andern Winkel BAC einschließen, haben eine gegebene Verhältniß zu einander; so ist $\triangle ABC$ der Gattung nach gegeben.

Es sey erstlich die gegebene Verhältniß eine Gleichheits-Verhältniß, das ist, es sey $BA = AC$, mithin der Winkel $ABC = ACB$, weil nun ABC gegeben ist, so ist ACB , mithin auch der dritte Winkel BAC gegeben; folglich

a 23. I.

folglich ist $\triangle ABC^b$ der Gattung nach gege- b 43. dat.
ben; und es ist evident, daß in diesem Fall der
gegebene schiefe Winkel spitzig seyn muß.

Zweytens sey die gegebene Verhältnis eine
Verhältnis des Kleinern zum Größern, das ist,
es sey die an dem gegebenen Winkel liegende
Seite AB kleiner als die Seite AC. Man neh-
me eine der Lage und Größe nach gegebene gera-
de Linie DE, und mache den Winkel DEF =
ABC, so ist wegen des gegebenen ABC auch
DEF gegeben, mithin^c ist EF der Lage nach c 32. dat.
gegeben; und weil BA : AC gegeben ist, so
mache man BA : AC = ED : DG; so wird,
weil ED : DG, und ED gegeben sind, auch d d 2. dat.
DG gegeben seyn; nun ist BA < AC, folg-
lich^e ist auch ED < DG. Aus dem Mittel- e def. 5. 5.
punct D mit dem Halbmesser DG beschreibe man
den Kreis GF, der EF in F beegne, und ziehe
DF; weil nun^f der Kreis, wie auch die gera- f 6. def.
de EF, der Lage nach gegeben sind, so ist^g der g 28. dat.
Punct F gegeben; und weil auch die Punkte D, E
gegeben sind, so sind^h die geraden Linien DE, h 29. dat.
EF, FD der Größe nach gegeben, undⁱ $\triangle i$ 42. dat.
DEF ist der Gattung nach gegeben; und weil
BA < AC, so ist^k der Winkel ACB < k 18. I.
ABC, folglich^l ist ACB < als ein rechter l 32. I.
Winkel. Gleicherweise weil ED < DG oder
DF, so ist der Winkel DFE < als ein rechter;
und weil in den $\triangle \triangle ABC, DEF$, der Win-
kel ABC = DEF, und die Seiten, die den
Win-

Winkel BAC , EDF einschließen, proportionall sind, und jeder der übrigen Winkel ACB , DEF kleiner ist als ein rechter Winkel;
 m 7. 6. sind m die $\triangle ABC$, DEF einander ähnlich; und weil DEF der Gattung nach gegeben ist, so ist auch $\triangle ABC$ der Gattung nach gegeben.

Drittens sey die gegebene Verhältnis der Größern zum Kleinern, daß ist, die an dem gegebenen Winkel liegende Seite AB sey größer als AC ; so nehme man, wie in dem letzten Fall, eine der Lage und Größe nach gegebene gerade Linie DE , und mache den Winkel DEF gleich dem gegebenen ABC ; mithin ist c EF der Lage nach gegeben. Nun ziehe man DG senkrecht auf EF ; wenn demnach $BA : AC = ED : DG$, so sind m die $\triangle ABC$, DEG einander ähnlich, weil $ABC = DEG$, und DGE ein rechter Winkel ist (*).
 Folglich ist ACB ein rechter Winkel, und $\triangle ABC$ ist b der Gattung nach gegeben.

Wem

(*) In dem 7ten Satze des 6ten Buches der Elementorum muß nach den Worten: *reliquorum vero simul utrumque aut minorem aut non minorem recto*, hinzugefügt werden: *aut unum ex illis rectum*; wie sich leicht *per impossibile* beweisen läßt. Ueb.

Wenn aber in dem letztern Fall $BA : AC$ nicht einerley ist mit $ED : DG$, das ist, mit der Verhältniß von BA zu der von A auf BC senkrecht gezogenen AM ; so muß $BA : AC < BA : AM$ seyn ^o, weil $AC > AM$. Man ^o 8. 5. mache $BA : AC = ED : DH$; mithin ist $ED : DH < (BA : AM =) ED : DG$, folglich ^p ist $DH > DG$; und weil $BA > AC$, so ist ^e $ED > DH$. Aus dem Mittelpunct D mit dem Halbmesser DH beschreibe man den Kreis KHF , der der Linie EF nothwendig in zween Puncten begegnen wird, weil $DH > DG$ und $< DE$. Es geschehe in den Puncten F, K , die, wie im vorhergehenden Fall gezeigt worden, gegeben sind; und wenn DF, DK gezogen werden, so sind die $\triangle DEF, DEK$ der Gattung nach gegeben, wie ebenfalls gezeigt worden ist. Aus dem Mittelpunct A mit dem Halbmesser AC beschreibe man einen Kreis, der der Linie BC wiederum in L begegne; so muß, wenn ACB kleiner ist als ein rechter Winkel, ALB größer als ein rechter seyn, und umgekehrt. Gleicherweise wenn der Winkel DFE kleiner ist als ein rechter, so muß DKE größer als ein rechter seyn, und umgekehrt. Nun sey jeder der Winkel ACB, DFE entweder kleiner oder größer als ein rechter; demnach weil in den $\triangle ABC, DEF$, der Winkel $ABC = DEF$, und die Seiten BA, AC und ED, DF , die die zween andere Winkel einschließen,

pro

m 7. 6. proportionell sind, so ist $\triangle ABC$ dem $\triangle DEF$ ähnlich. Gleicherweise ist $\triangle ABL$ dem $\triangle DEK$ ähnlich. Weil nun die $\triangle DEF$ $\triangle DEK$ der Gattung nach gegeben sind, so sind auch die $\triangle ABC$, $\triangle ABL$ der Gattung nach gegeben. Hieraus ist evident, daß es in diesem dritten Fall immer zwey Dreyecke von verschiedener Gattung giebt, denen die in dem Satz gegebenen Dinge zukommen können.

45.

Satz XLVIII.

Wenn einer von den Winkeln eines Dreyecks gegeben ist, und wenn die beyden Seiten, die diesen Winkel einschließen, zusammengenommen, eine gegebene Verhältniß zu der dritten Seite haben; so ist das Dreyeck der Gattung nach gegeben. Fig. 47.

In dem $\triangle ABC$ sey der Winkel BAC gegeben, und die Verhältniß $BA + AC : BC$ sey gegeben; so ist $\triangle ABC$ der Gattung nach gegeben.

a 9. I.

Man theile^a den Winkel BAC durch die gerade Linie AD in zween gleiche Theile, so ist

b 3. 6.

die Hälfte BAD gegeben. Weil nun^b $BA : AC = BD : DC$, so ist *permutando* $AB : BD$

c 12. 5.

$= AC : DC$, und *summando*^c $AB + AC : BC$

$BC = AB : BD$. Nun ist $AB + AC : BC$ gegeben, folglich ist auch $AB : BD$ gegeben; und weil BAD gegeben ist, so ist ^d $\triangle ABD$ ^d 47. dat. der Gattung nach gegeben, mithin ist der Winkel ABD gegeben; und weil auch der Winkel BAC gegeben ist, so ist ^e $\triangle ABC$ der Gattung nach ^e 43. dat. gegeben.

Ein Dreyek, das die in dem Satz gegebene Dinge haben soll, läßt sich folgendermaassen finden. EFG sey der gegebene Winkel, und $H : K$ sey die gegebene Verhältniß, die die Summe der zwey, den Winkel EFG einschließenden, Seiten zu der dritten Seite des Dreyeks haben soll; weil nun die Summe zweyer Seiten eines Dreyeks größer ist, als die dritte Seite, so muß $H : K$ die Verhältniß des Größern zum Kleinern seyn. Man theile ^a EFG durch eine gerade FL in ^a 9. 1. zweyen gleiche Theile, und finde nach dem 47sten Satz ein Dreyek, das EFL zu einem seiner Winkel habe, und in dem die Verhältniß der Seiten, die den, der Linie FL entgegen stehenden Winkel einschließen, einerley sey mit $H : K$; welches sich folgendermaassen bewerkstelligen läßt: man nehme eine der Lage und Größe nach gegebene FE , und ziehe EL senkrecht auf FL ; wenn nun $FE : EL = H : K$, so verlängere man EL , bis sie FG in P beegne; so ist FEP das gesuchte Dreyek; denn es hat den gegebenen Winkel EFG ; und weil dieser Winkel durch FL

E in

b 3. 6.

in zween gleiche Theile getheilt ist, so ist
 $EF + FP : EP = FE : EL = H : K$.

Wenn aber $H : K$ nicht einerley ist mit $FE : EL$, so muß sie kleiner seyn, wie in dem 47sten Satz gezeigt worden; und in diesem Fall giebt es zwey Dreyecke, wovon jedes den gegebenen Winkel EFL hat, und worin die Verhältnisse der Seiten, die den, der Linie FL entgegenstehenden, Winkel einschließen, mit $H : K$ einerley ist. Man finde aus dem 47sten Satz die $\triangle \triangle EFM, EFN$, wovon jedes EFL zum Winkel hat, und worin $FE : EM$ (oder EN) $= H : K$. Nun sey der Winkel EMF größer, und ENF kleiner als ein rechter. Demnach

f 18. 1.

weil $H > K$, so ist $EF > EN$, folglich ist der Winkel EFN , das ist, $NFG < ENF$. Zu jedem dieser Winkel füge man die Winkel NEF, EFN hinzu, so ist $NEF + EFG < NEF + EFN + FNE$, das ist, als zwey rechte Winkel; folglich müssen die zwey geraden Linien EN, FG , verlängert einander bege-

g ax. 12. 1.

nens; es geschehe in O , und man ziehe EM bis in G ; so hat jedes von den $\triangle \triangle EFG, EFO$ die in dem Satz gegebenen Dinge; denn jedes hat den gegebenen Winkel EFG , und weil dieser Winkel durch die gerade FMN in zween gleiche Theile getheilt ist, so ist $EF + FG : EG = (FE : EM =) H : K$; gleicherweise $EF + FO : EO = H : K$.

Satz

Satz XLIX.

46.

Wenn einer von den Winkeln eines Dreyecks gegeben ist, und wenn die zwei Seiten, die einen andern Winkel einschließen, zusammengenommen eine gegebene Verhältniß zu der dritten Seite haben; so ist das Dreyeck der Gattung nach gegeben. Fig. 48.

In dem $\triangle ABC$ sey der Winkel $A B C$ gegeben, und $B A + A C$, die den Winkel $B A C$ einschließen, haben eine gegebene Verhältniß zu $B C$; so ist $\triangle ABC$ der Gattung nach gegeben.

Man setze, $B A C$ sey durch die gerade $A D$ in zween gleiche Theile getheilt; so ist ^a $B A + A C : B C = A B : B D$. Nun ist $B A + A C : B C$ gegeben, folglich auch $A B : B D$; und weil der Winkel $A B D$ gegeben ist, so ist ^b $\triangle A B D$ der Gattung nach gegeben; folglich ist der Winkel $B A D$, und der doppelte Winkel $B A C$ gegeben; und weil auch $A B C$ gegeben ist, so ist ^c $\triangle A B C$ der Gattung nach gegeben. ^a 3. 6. & 12. 5. ^b 44. dat. ^c 43. dat.

Ein Dreyeck, das die im Satz gegebenen Dinge habe, läßt sich folgendermaassen finden. $E F G$ sey der gegebene Winkel, und $H : K$ die gegebene Verhältniß; nun finde man durch den 44sten Satz das $\triangle E F L$, das $E F G$ zu einem
 E 2 seiner

seiner Winkel habe, und worin die Verhältniß der Seiten, die diesen Winkel einschließen, nämlich $EF : FL = H : K$; und mache den Winkel $LEM = FEL$. Weil nun $H : K$ die Verhältniß ist, die die Summe zweier Seiten des Dreyecks zu der dritten hat, so muß $H > K$ seyn; und weil $EF : FL = H : K$, so ist $EF > FL$, und der Winkel FEL , das ist, $LEM < ELF$. Daher sind, wie im vorhergehenden Satze gezeigt worden, die Winkel $dax. 12. 1.$ $LFE + FEM < als zween rechte$, folglich müssen FL , EM verlängert einander begegnen: es geschehe in G , so ist $\triangle EFG$ das gesuchte Dreyeck; denn EFG ist einer seiner Winkel, und weil der Winkel FEG durch EL in zween gleiche Theile getheilt worden, so ist $FE + EG : FG = EF : FL = H : K$.

76.

Satz L.

Wenn von dem Scheitelpunct eines der Gattung nach gegebenen Dreyecks, eine gerade Linie auf die Grundlinie unter einem gegebenen Winkel gezogen wird; so wird sie eine gegebene Verhältniß zu der Grundlinie haben. Fig. 49.

Von dem Scheitelpunct A des $\triangle ABC$, das der Gattung nach gegeben ist, werde AD auf die Grundlinie BC unter einem gegebenen Winkel ADB gezogen; so ist $AD : BC$ gegeben. Weil

Weil $\triangle ABC$ der Gattung nach gegeben ist, so ist der Winkel ABD gegeben; und weil ADB gegeben ist, so ist ^a $\triangle ABD$ der Gattung nach gegeben; folglich ist $AD : AB$ gegeben. Nun ist $AB : BC$ gegeben; folglich ^b b 9. dat. ist $AD : BC$ gegeben.

Satz LI.

47.

Geradlinichte Figuren, die der Gattung nach gegeben sind, lassen sich in Dreyecke theilen, die der Gattung nach gegeben sind. Fig. 50.

Die geradlinichte Figur $ABCDE$ sey der Gattung nach gegeben; so läßt sich $ABCDE$ in Dreyecke theilen, die der Gattung nach gegeben sind.

Man ziehe BE , BD ; weil nun $ABCDE$ der Gattung nach gegeben ist, so ist ^a der Winkel BAE gegeben, und ^a $BA : BE$ ist gegeben; mithin ^b ist $\triangle BAE$ der Gattung nach gegeben, folglich ist der Winkel AEB gegeben ^a. Nun ist der ganze Winkel AED gegeben, mithin auch der andere Winkel BED ; und weil $AE : EB$, wie auch $AE : ED$ gegeben ist, so ist ^c $BE : ED$ gegeben. Nun ist der Winkel BED gegeben, mithin ^b ist das $\triangle BED$ der Gattung nach gegeben. Gleicherweise ist das

E 3

 $\triangle$

$\triangle BDC$ der Gattung nach gegeben: folglich lassen sich geradlinichte Figuren, die der Gattung nach gegeben sind, in Dreyecke theilen, die auch der Gattung nach gegeben sind,

48.

Satz LII.

Wenn zwey, der Gattung nach gegebene, Dreyecke über ebenderselben geraden Linie beschrieben werden; so haben sie eine gegebene Verhältniß zu einander. Fig. 51.

Die der Gattung nach gegebenen $\triangle ABC$, $\triangle ABD$ seyen über ebenderselben geraden Linie AB beschrieben; so ist $\triangle ABC : \triangle ABD$ gegeben.

Durch den Punct C ziehe man CE parallel mit AB , so daß sie der verlängerten DA in E begegne; dann ziehe man BE . Weil nun $\triangle ABC$ der Gattung nach gegeben ist, so ist der Winkel BAC , das ist, ACE gegeben; und weil $\triangle ABD$ der Gattung nach gegeben ist, so ist der Winkel DAB , das ist, AEC gegeben. Folglich ist ^a $\triangle ACE$ der Gattung nach gegeben; mithin ^b ist $EA : AC$ gegeben; nun ist $CA : AB$, wie auch $BA : AD$ gegeben, folglich ^c ist $EA : AD$ gegeben; ferner ist ^d $\triangle ACB = \triangle AEB$, und ^e $\triangle AEB$ oder ACB

a 43. dat.

b 3. def.

c 9. dat.

d 37. I.

e I. 6.

$ACB : \triangle ADB = EA : AD$; folglich
weil $EA : AD$ gegeben ist, so ist auch $\triangle$
 $ACB : \triangle ADB$ gegeben.

Aufgabe.

Die Verhältniß zweyer $\triangle ABC, ABD$
zu finden, die der Gattung nach gegeben, und
über ebenderfelben geraden Linie AB beschrieben
sind.

Man nehme eine der Lage und Größe nach
gegebene gerade Linie FG , und weil die Winkel
der $\triangle ABC, ABD$ gegeben sind, so mache
man an den Endpunkten F, G der geraden Li- f. 23. 1.
nie FG , die Winkel GFH, GFK gleich $BAC,$
 BAD ; und FGH, FCK gleich ABC, ABD .
Mithin sind die $\triangle ABC, ABD$ gleich-
winklicht mit den $\triangle FGH, FGK$. Durch
den Punct H ziehe man HL parallel mit FG ,
so daß sie der verlängerten KF in L begegne.
Weil nun $BAC = GFH, BAD = GFK$,
so ist $ACE = FHL, AEC = FLH$,
und das $\triangle AEC$ ist gleichwinklicht mit dem
 $\triangle FLH$. Mithin ist $EA : AC = LF : FH$,
und $CA : AB = HF : FG$, und $BA : AD$
 $= GF : FK$, folglich *ex æquo*, $EA : AD$
 $= LF : FK$. Nun ist, wie gezeigt worden,
 $\triangle ABC : \triangle ABD = EA : AD$, das ist,
 $= LF : FK$. Mithin ist die Verhältniß

Ⓔ 4

LF

LF:FK, die mit der Verhältniß der $\triangle \triangle$ ABC, ABD einerley ist, gefunden worden.

49.

Satz LIII.

Wenn zwei der Gattung nach gegebene geradlinichte Figuren über ebenderselben geraden Linie beschrieben werden; so haben sie eine gegebene Verhältniß zu einander. Fig. 52.

Zwei geradlinichte Figuren ABCDE, ABFG, die der Gattung nach gegeben sind, seyen über ebenderselben geraden Linie AB beschrieben; so wird ihre Verhältniß zu einander gegeben seyn.

a 51. dat.

Man ziehe AC, AD, AF, so ist a jedes der $\triangle \triangle$ AED, ADC, ACB, AGF, ABF der Gattung nach gegeben; und weil die, der Gattung nach gegebenen $\triangle \triangle$ ADE, ADC über ebenderselben Linie AD beschrieben sind,

b 52. dat.

so ist b $\triangle EAD : \triangle DAC$ gegeben, und com-

c 7. dat.

ponendo c $EACD : \triangle DAC$ ist gegeben. Nun ist b $\triangle DAC : \triangle CAB$ gegeben, weil sie über ebenderselben Linie AC beschrieben sind;

d 9. dat.

mithin ist $EACD : \triangle ACB$ gegeben d, und componendo $ABCDE : \triangle ABC$ ist gegeben. Gleicherweise ist $ABFG : \triangle ABF$ gegeben. Nun ist $\triangle ABC : \triangle ABF$ gegeben, folglich b weil

weil $ABCDE : \triangle ABC$, wie auch $\triangle ABC : \triangle ABF$, und $\triangle ABF : ABFG$ gegeben sind, so ist auch $ABCDE : ABFG$ gegeben.

Aufgabe.

Die Verhältniß zweier geradlinichter Figuren zu finden, die der Gattung nach gegeben, und über ebenderselben geraden Linie beschrieben sind.

$ABCDE$, $ABFG$ seyen zwei geradlinichte Figuren, der Gattung nach gegeben, und über ebenderselben geraden Linie AB beschrieben, und man ziehe AC , AD , AF . Man nehme eine der Lage und Größe nach gegebene gerade Linie HK , und durch den 52sten Satz finde man die Verhältniß $\triangle ADE : \triangle ADC$, und mache ihr gleich $HK : KL$. Gleicherweise finde man die Verhältniß $\triangle ACD : \triangle ACB$, und mache ihr gleich $KL : LM$. Ferner finde man die Verhältniß $\triangle ABC : \triangle ABF$, und mache ihr gleich $LM : MN$; endlich finde man die Verhältniß $\triangle AFB : \triangle AFG$, und mache ihr gleich $MN : NO$. So wird die Verhältniß $ABCDE : ABFG$ mit $HM : MO$ einerley seyn.

Weil $\triangle EAD : \triangle DAC = HK : KL$;
und $\triangle DAC : \triangle CAB = KL : LM$; so
ist *componendo*, so oft es die Anzahl der Drey-

edle erfordert, $ABCDE : \triangle ABC = HM : ML$. Gleicherweise weil $\triangle GAF : \triangle FAB = ON : NM$, so ist *componendo*, $ABFG : \triangle FAB = MO : MN$, und *invertendo*, $\triangle ABF : ABFG = NM : MO$; nun ist $\triangle ABC : \triangle ABF = LM : MN$, folglich weil $ABCDE : \triangle ABC = HM : ML$, und $\triangle ABC : \triangle ABF = LM : MN$, und $\triangle ABF : ABFG = NM : MO$, so ist *ex æquo* $ABCDE : ABFG = HM : MO$.

50.

Satz LIV.

Wenn zwei gerade Linien eine gegebene Verhältniß zu einander haben; so haben die ähnlichen geradlinichten Figuren, die über denselben auf eine ähnliche Art beschrieben werden, eine gegebene Verhältniß zu einander. Fig. 53.

Die geraden Linien AB, CD haben eine gegebene Verhältniß zu einander, und die ähnlichen und ähnlich = liegenden geradlinichten Figuren E, F seyen über denselben beschrieben; so wird $E : F$ gegeben seyn.

Man mache $AB : CD = CD : G$, so ist weil $AB : CD$ gegeben ist, auch $CD : G$ gegeben, folglich^a ist $AB : G$ gegeben. Nun ist^b $AB : G = E : F$; folglich ist $E : F$ gegeben.

Auf

a 9. dat.
b 2. cor.
20. 6.

Aufgabe.

Die Verhältniß zweier ähnlichen geradlinichten Figuren E, F zu finden, welche über den geraden Linien AB, CD, die eine gegebene Verhältniß zu einander haben, auf eine ähnliche Art beschrieben sind.

G sey eine dritte Proportional-Linie zu AB, CD. Man nehme eine der Größe nach gegebene gerade H; weil nun $AB : CD$ gegeben ist, so mache man $AB : CD = H : K$, so ist wegen der gegebenen H, auch K gegeben; Man mache ferner $H : K = K : L$, so wird $E : F = H : L$ seyn. Denn weil $AB : CD = H : K$, und $AB : CD = CD : G$, so ist $CD : G = K : L$, und *ex æquo* $AB : G = H : L$; nun ist^b $E : F = AB : G$, das^b ist, $= H : L$.

b 2. cor.
20. 6.

Satz LV.

51.

Wenn zwei gerade Linien eine gegebene Verhältniß zu einander haben; so werden die der Gattung nach gegebenen geradlinichten Figuren, die über denselben beschrieben sind, eine gegebene Verhältniß zu einander haben.
Fig. 54.

AB,

AB, CD seyen zwei gerade Linien, die eine gegebene Verhältniß zu einander haben, werden die der Gattung nach gegebenen geradlinichten Figuren E, F, die über denselben beschrieben sind, eine gegebene Verhältniß zu einander haben.

Ueber der geraden AB beschreibe man die Figur AG, die der Figur F ähnlich sey, und ähnlich mit ihr liege: weil nun F der Gattung nach gegeben ist, so ist auch AG der Gattung nach gegeben; demnach, weil die der Gattung nach gegebenen Figuren E, AG, über eben denselben geraden AB beschrieben sind, so ist ^a E : AG gegeben; und weil AB : CD gegeben ist, und über diesen Linien die ähnlichen und ähnlich liegenden Figuren AG, F beschrieben sind, so ist ^b AG : F gegeben; nun ist AG : E gegeben, folglich ist E : F gegeben ^c.

^a 53. dat.

^b 54. dat.

^c 9. dat.

Aufgabe.

Die Verhältniß zweier geradlinichter Figuren E, F zu finden, welche der Gattung nach gegeben, und über den geraden Linien AB, CD, die eine gegebene Verhältniß zu einander haben, beschrieben sind.

Man nehme eine der Größe nach gegebene gerade Linie H; und weil die geradlinichten Figuren E, AG der Gattung nach gegeben, und über ebendenselben geraden Linie AB beschrieben sind, so finde man aus dem 53sten Satz ihre Verhältniß, und mache derselben gleich $H : K$; so ist K gegeben: und weil die ähnlichen geradlinichten Figuren AG, F, über den geraden Linien AB, CD, die eine gegebene Verhältniß haben, beschrieben sind, so finde man aus dem 54sten Satz ihre Verhältniß, und mache derselben gleich $K : L$; so wird $E : F = H : L$. Denn *per constr.* $E : AG = H : K$, und $AG : F = K : L$, folglich *ex æquo* $E : F = H : L$.

Satz LVI.

52.

Wenn eine der Gattung nach gegebene geradlinichte Figur über einer der Größe nach gegebenen geraden Linie beschrieben wird; so ist die Figur der Größe nach gegeben. Fig. 55.

Die der Gattung nach gegebene geradlinichte Figur ABCDE sey über der, der Gattung nach gegebenen geraden Linie AB beschrieben; so ist ABCDE der Größe nach gegeben.

Ueber

Ueber AB sey das Quadrat AF beschrieben, folglich ist AF der Gattung und Größe nach gegeben; und weil die der Gattung nach gegebenen Figuren ABCDE, AF über eben derselben AB beschrieben sind, so ist a ABCDE: AF gegeben; nun ist AF der Größe nach gegeben, folglich ist auch ABCDE der Größe nach gegeben b.

Aufgabe.

Die Größe einer geradlinichten Figur zu finden, die der Gattung nach gegeben, und über einer der Größe nach gegebenen geraden Linie beschrieben ist.

Man nehme die gerade Linie GH gleich der gegebenen AB, und finde durch den 53sten Satz die Verhältniß des Quadrates AF über AB, zu ABCDE, und mache ihr gleich GH:HK, und über GH beschreibe man das Quadrat GL, und vollende das Parallelogram LHKM; so ist ABCDE = LHKM; denn AF:ABCDE = GH:HK = GL:HM; weil nun AF = GL, so ist c ABCDE = HM.

53

Satz LVII.

Wenn zwei geradlinichte Figuren der Gattung nach gegeben sind, und wenn die

Seite

Seite einer derselben eine gegebene Verhältniß zu einer Seite der andern hat; so sind die Verhältnisse der übrigen Seiten zu den übrigen Seiten gegeben. Fig. 56.

AC, DF seyen zwey der Gattung nach gegebene geradlinichte Figuren, und die Verhältniß der Seite AB zu der Seite DE sey gegeben; so sind auch die Verhältnisse der übrigen Seiten zu den übrigen Seiten gegeben.

Weil $AB : DE$ gegeben ist, wie auch a a 3. def. $AB : BC$ und $DE : EF$, so ist b $BC : EF$ b 10. dat. gegeben. Gleichermassen sind die Verhältnisse der übrigen Seiten zu den übrigen Seiten gegeben.

Die Verhältniß $BC : EF$ läßt sich folgendermaßen finden. Man nehme eine der Größe nach gegebene Linie G, und weil $BC : BA$ gegeben ist, so mache man $BC : BA = G : H$; eben so mache man $AB : DE = H : K$; ferner $DE : EF = K : L$; so ist *ex æquo* $BC : EF = G : L$, folglich ist $G : L$, die mit $BC : EF$ einerley ist, gefunden worden.

Satz LVIII.

Wenn zwey ähnliche geradlinichte Figuren eine gegebene Verhältniß zu einander haben, so haben ihre correspondirende Seiten auch eine gegebene Verhältniß zu einander. Fig. 57.

Die

Die zwei ähnliche geradlinichte Figuren A, B haben eine gegebene Verhältniß zu einander; so werden ihre correspondirende Seiten auch eine gegebene Verhältniß zu einander haben.

CD sey correspondirend mit EF; und je CD, EF sey G eine dritte Proportional = Linie.
 a 2. cor. Demnach a ist $CD : G = A : B$; nun ist A : B
 20. 6. gegeben, mithin auch $CD : G$; nun ist CD :
 b 13. dat. EF = EF : G, folglich b ist $CD : EF$ ge-
 geben.

Die Verhältniß $CD : EF$ läßt sich folgendermaßen finden. Man nehme eine der Größen nach gegebene gerade Linie H; und weil A : B gegeben ist, so mache man $A : B = H : K$, und nach Anleitung des 13ten Satzes finde man zwischen H und K eine mittlere Proportionale Linie L; so wird $CD : EF$ der gefundenen $H : L$ gleich seyn. Denn es sey $CD : EF = EF : G$, so ist $CD : G = (A : B =) H : K$, und $CD : EF = H : L$, wie im 13ten Satz ist gezeigt worden.

54.

Satz LIX.

Wenn zwei der Gattung nach gegebene geradlinichte Figuren eine gegebene Verhältniß zu einander haben, so werden ihre Seiten gleicherweise eine gegebene Verhältniß zu einander haben. Fig. 58.

Die ^{zwei} geradlinichten Figuren A, B, die der ~~Lage~~ nach gegeben sind, haben eine gegebene Verhältniß zu einander; so werden ihre Seiten auch gegebene Verhältnisse zu einander haben.

Gattung

Wenn die Figur A der Figur B ähnlich ist, so werden, kraft des vorhergehenden Satzes, ihre correspondirenden Seiten eine gegebene Verhältniß zu einander haben: und weil die Figuren der Gattung nach gegeben sind, so haben ^a die Seiten von jeder derselben gegebene Verhältnisse zu einander; folglich ^b hat jede Seite von einer derselben zu jeder Seite der andern eine gegebene Verhältniß. ^a 3. def. ^b 9. dat.

Ist aber die Figur A der Figur B nicht ähnlich, so seyen CD, EF irgend zwei von ihren Seiten, und über EF denke man sich die Figur EG ähnlich und ähnlich = liegend mit A, so daß CD, EF die correspondirenden Seiten seyen; demnach ist EG der Gattung nach gegeben, und weil B der Gattung nach gegeben ist, so ist ^c B : EG gegeben; nun ist A : B gegeben; ^c 53. dat. mithin ^b ist A : EG gegeben, und weil A der EG ähnlich ist, so ist ^d CD : EF gegeben; ^d 58. dat. folglich ^b sind die Verhältnisse der übrigen Seiten zu den übrigen Seiten gegeben.

Die Verhältniß $CD : EF$ läßt sich folgendermaßen finden. Man nehme eine der Größe nach gegebene gerade Linie H ; und weil $A : B$ gegeben ist, so mache man $A : B = H : K$. Aus dem 53sten Satz finde man $B : EG$, und mache ihr gleich $K : L$. Endlich mache man $H : M = M : L$; so wird $CD : EF = H : M$, mithin gefunden seyn. Denn weil $A : B = H : K$, und $B : EG = K : L$, so ist *ex æquo* $A : EG = H : L$; nun sind A, EG ähnliche Figuren, und M ist eine mittlere Proportional = Linie zwischen H und L ; folglich ist, wie im vorhergehenden Satz bewiesen worden, $CD : EF = H : M$.

55.

Satz LX.

Wenn eine geradlinichte Figur der Gattung und Größe nach gegeben ist, so werden ihre Seiten der Größe nach gegeben seyn. Fig. 59.

Die geradlinichte Figur A sey der Gattung und Größe nach gegeben, so sind ihre Seiten der Größe nach gegeben.

a 18. 6. Man nehme eine der Lage und Größe nach gegebene gerade Linie BC , und beschreibe darüber die Figur D ähnlich und ähnlich = liegend mit

mit der Figur A, und E F sey mit B C correspondirend, so ist D der Gattung nach gegeben; und weil die der Gattung nach gegebene D über der gegebenen Linie B C beschrieben ist, so ist ^b b 56. dat. D der Größe nach gegeben; und weil A der Größe nach gegeben ist, so ist ^c A : D gegeben; und ^c 1. dat. weil A der D ähnlich ist, so ist ^d E F : B C gegeben; nun ist B C gegeben, folglich ist ^e E F ^e 2. dat. gegeben; und weil E F : E G gegeben ist, so ist ^f E G gegeben. Eben so läßt sich beweisen, ^f 3. def. daß jede der andern Seiten der Figur A gegeben ist.

Aufgabe.

Eine geradlinichte Figur A zu beschreiben, die einer gegebenen Figur D ähnlich, und einer andern gegebenen H gleich sey. Es ist der 25ste S. des 6ten B. der Elem.

Weil jede der Figuren D, H gegeben ist, so ist ihre Verhältnis gegeben; wenn man nämlich über der gegebenen B C das Prillgr. B K g cor. 45. I. $\equiv$ D, und über seiner Seite CK, das Prillgr. K L $\equiv$ H macht, so daß der Winkel K C L $\equiv$ M B C ist; so wird D : H, das ist, B K : K L $\equiv$ B C : C L seyn. Und weil D, A einander ähnlich sind, und D : A (H) $\equiv$ B C : C L, so ist nach dem 58sten Satz die Verhältnis der correspondirenden Seiten B C, E F einer-

ley mit der Verhältniß von BC zu einer mittlern Proportional = Linie zwischen BC und CL. Diese Linie EF finde man; so ist EF die Seite der zu beschreibenden Figur, correspondirend mit BC, der Seite von D; und die Figur selbst läßt sich nach dem 18ten Satz des 6ten Buches der Elem. beschreiben. Sie wird der Verzeichnung nach, der Figur D ähnlich seyn; und weil D:A

h 2. cor.
20. 6.

i 45. 1.

$\text{BC} : \text{CL}^h = \text{BK} : \text{KL}$, und $\text{D} = \text{BK}$, so istⁱ $\text{A} = \text{KL} = \text{H}$.

57.

Satz LXI.

Wenn in einem, der Größe nach gegebenen Parallelogramm, eine seiner Seiten und einer seiner Winkel der Größe nach gegeben sind, so ist auch die andere Seite gegeben. Fig. 60.

In dem Prllgr ABDC, das der Größe nach gegeben ist, sey die Seite AB und der Winkel BAC der Größe nach gegeben; so ist auch die andere Seite AC gegeben.

Man nehme eine der Lage und Größe nach gegebene gerade Linie EF; weil nun das Prllgr AD der Größe nach gegeben ist, so läßt sich^a eine ihm gleiche geradlinichte Figur finden, und^b cor. 45. 1. ein, dieser Figur gleiches, Prllgr läßt^b sich über der

der gegebenen EF unter einem, dem gegebenen BAC gleichen Winkel beschreiben. Es sey dieß das Prllgr EFHG, das den Winkel FEG = BAC habe. Weil nun AD = EH, und A = E, so sind ^c die anliegenden Seiten in ^c 14. 6. umgekehrter Verhältniß, das ist, AB:EF = EG:AC; nun sind AB, EF, EG gegeben, folglich ^d auch AC. Hieraus erhellet, wie AC ^d 12. 6. zu finden ist.

Satz XLII.

H.

Wenn ein Parallelogramm einen gegebenen Winkel hat, so hat das Rechteck, das durch die anliegenden Seiten formirt wird, eine gegebene Verhältniß zu dem Parallelogramm. Fig. 61.

Das Prllgr ABCD habe den gegebenen Winkel ABC; so hat $AB \times BC$ eine gegebene Verhältniß zu ABCD.

Von dem Punct A falle man AE senkrecht auf BC; weil nun der Winkel ABC gegeben ist, wie auch AEB, so ist $\triangle ABE$ der Satz nach gegeben ^a; mithin ist $BA:AE$ ge- ^a 43. dat. geben. Nun ist $BA:AE = AB \times BC:AE \times BC$ ^b, folglich ist $AB \times BC:AE \times BC$ ^b 1. 6. BC, das ist ^c, $AB \times BC:ADCD$ gegeben. ^c 35. 1.

§ 3

Und

Und es ist klar, wie die Verhältniß des Rechteks zu dem Prillgr kann gefunden werden; man mache nämlich den Winkel $F H G = A B C$, und ziehe von irgend einem Punct F in einer seiner Seiten, $F K$ senkrecht auf die andere $G H$; so ist $G F : F K = B A : A E = A B \times B C : A B C D$.

66.

Zusatz. Und wenn $\triangle A B C$ einen gegebenen Winkel $A B C$ hat, so wird das Rechtek $A B \times B C$, das durch die anliegenden Seiten formirt wird, eine gegebene Verhältniß zu dem $\triangle A B C$ haben.

Man vollende das Prillgr $A B C D$, so ist, kraft dieses Satzes, $A B \times B C : A B C D$ gegeben; nun ist ^d $A B C D : \triangle A B C$ gegeben; folglich ist ^e $A B \times B C : \triangle A B C$ gegeben.

d 14. 1.

e 9. dat.

Und die Verhältniß des Rechteks zu dem Dreyek läßt sich folgendermaassen finden. Man mache $\triangle F G K$, wie gezeigt worden; so ist $A B \times B C : \triangle A B C = G F : \frac{1}{2} F K$. Denn, wie gezeigt worden, so ist $G F : F K = A B \times B C : A B C D$; folglich $G F : \frac{1}{2} F K = A B \times B C : \frac{1}{2} A B C D$, das ist, $\triangle A B C$.

Satz

Satz LXIII.

56.

Wenn zwey Parallelogramme gleichwinklicht sind, so verhält sich eine Seite des ersten zu einer Seite des zweyten, wie die andere Seite des zweyten zu einer geraden Linie, zu der die andere Seite des ersten eben die Verhältniß hat, wie das erste Parallelogramm zu dem zweyten. Und folglich, wenn die Verhältniß des ersten Parallelogrammes zu dem zweyten gegeben ist, so ist die Verhältniß der andern Seite des ersten zu dieser geraden Linie gegeben; und wenn die Verhältniß der andern Seite des ersten zu dieser geraden Linie gegeben ist, so ist die Verhältniß des ersten Parallelogrammes zu dem zweyten gegeben. Fig. 62.

AC, DF seyen zwey gleichwinklichte Parallelogramme, so verhält sich BC, eine Seite des ersten, zu EF einer Seite des zweyten, wie DE, die andere Seite des zweyten, zu der geraden Linie, zu welcher AB, die andere Seite des ersten, eben die Verhältniß hat, wie AC zu DF.

Man verlängere AB, und mache $BC : EF = DE : BG$, und vollende das Parallelogr BGHC; weil nun $(BC) GH : EF = DE : BG$, so sind die anliegenden Seiten der gleichen Winkel

S 4 BGH,

14. 6.

BGH, DEF, in umgekehrter Verhältniß; folglich^a ist Prllgr $BH = DF$; nun ist $AB : BG = AC : BH$, folglich $AB : BG = AC : DF$; nun ist $BC : EF = DE : BG$, folglich ist BG die gerade Linie, die die im Satz gemeldten Eigenschaften hat.

Und wenn $AC : DF$ gegeben ist, so ist $AB : BG$ gegeben; und hinwiederum, wenn $AB : BG$ gegeben ist, so ist $AC : DF$ gegeben.

74. 73.

Satz XLIV.

Wenn zwey Parallelogramme ungleiche, aber gegebene Winkel haben, und wenn eine Seite des ersten zu einer Seite des zweyten sich verhält, wie die andere Seite des zweyten zu einer gewissen geraden Linie; so wird, wenn die Verhältniß des ersten Parallelogrammes zu dem zweyten gegeben ist, die Verhältniß der andern Seite des ersten zu jener geraden Linie gegeben seyn: Und wenn die Verhältniß der andern Seite des ersten zu jener geraden Linie gegeben ist, so wird die Verhältniß des ersten Parallelogrammes zu dem zweyten gegeben seyn. Fig. 63.

ABCD, EFGH seyen zwey Prllgr, welche die ungleichen aber gegebenen Winkel ABC, EFG haben; und man setze $BC : FG = EF : M$.
Wenn

Wenn die Verhältniß der Prllgr AC, EG gegeben ist, so ist $AB : M$ gegeben.

In B, dem Endpunct der Linie BC, mache man den Winkel $CBK = EFG$, und vollende das Prllgr KBCL. Weil nun $AC : EG$ gegeben ist, und ^a Prllgr $AC = KC$, so ist ^a 35. 1. $KC : EG$ gegeben; nun sind KC, EG gleichwinklicht, folglich ist ^b BC zu FG wie EF zu ^b 63. dat. der geraden Linie, zu welcher KB eine gegebene Verhältniß hat, nämlich eben die, die das Prllgr KC zu EG hat; nun aber ist $BC : FG = EF : M$; mithin ist M die gerade Linie, zu welcher KB eine gegebene Verhältniß hat, oder $KB : M$ ist gegeben; nun ist $AB : BK$ gegeben, weil $\triangle ABK$ der Gattung nach gegeben ist ^c 43. dat. folglich ist ^d $AB : M$ gegeben. ^d 9. dat.

Und wenn $AB : M$ gegeben ist, so ist Prllgr $AC : EG$ gegeben. Denn weil $KB : BA$, wie auch $AB : M$ gegeben ist, so ist $KB : M$ gegeben ^d; und weil Prllgr KC, EG gleichwinklicht sind, so ist ^b BC zu FG wie EF zu der geraden ^b 63. dat. Linie, zu welcher KB eben die Verhältniß hat, wie Prllgr KC zu EG; nun ist $KB : M$ gegeben, folglich ist Prllgr (KC) $AC : EG$ gegeben.

75.

Zusatz. Und wenn zwey Dreyecke ABC , EFG zween gleiche, oder ungleiche, aber gegebenen Winkel ABC , EFG haben, und wenn BC , eine Seite des ersten, sich zu FG , einer Seite des zweyten, verhält, wie EF , die andere Seite des zweyten, zu einer geraden Linie M ; so wird, wenn die Verhältniß der Dreyecke gegeben ist, die Verhältniß der andern Seite des ersten zu der geraden M gegeben seyn.

e 15. 5.
f 41. 1.

Denn man vollende Parllgr $ABCD$, $EFGH$; weil nun $\triangle ABC : \triangle EFG$ gegeben ist, so ist e Parllgr $AC : EG$ gegeben f und weil $BC : FG = EF : M$, so ist kraft des 63ten Satzes $AB : M$ gegeben, wenn die Winkel ABC , EFG gleich sind; sind sie ungleich, aber gegeben, so ist $AB : M$ kraft dieses Satzes gegeben.

Und wenn $AB : M$ gegeben ist, so ist Parllgr $AC : EG$ kraft eben dieser Sätze gegeben; folglich ist $\triangle ABC : \triangle EFG$ gegeben.

68.

Satz LXV.

Wenn zwey gleichwinklichte Parallelogramme eine gegebene Verhältniß zu einander haben, und wenn eine Seite eine gegebene Verhältniß zu einer Seite hat; so wird auch die andere Seite zu der andern Seite eine gegebene Verhältniß haben. Fig. 64.

Die zwey gleichwinkliche Prillgr AB, CD haben eine gegebene Verhältniß zu einander, und die Seite EB habe zu der Seite FD eine gegebene Verhältniß; so wird auch die andere Seite AE eine gegebene Verhältniß zu der andern CF haben.

Weil die zwey Prillgr AB, CD gleichwinklicht sind, und $AB : CD$ gegeben ist, so ist ^a $EB : FD$ wie FC zu der geraden Linie, zu welcher AE eben die gegebene Verhältniß hat wie Prillgr AB zu CD. Diese gerade Linie sey EG; folglich ist $AE : EG$ gegeben; und weil $EB : FD = FC : EG$, so ist, weil $EB : FD$ gegeben ist, auch $FC : EG$ gegeben; und weil $AE : EG$, wie auch $FC : EG$ gegeben ist, so ist ^b $AE : CF$ gegeben.

^a 63. dat.
^b 9. dat.

Die Verhältniß $AE : CF$ läßt sich folgendermaßen finden. Man nehme eine der Größe nach gegebene gerade Linie H; und weil Prillgr $AB : CD$ gegeben ist, so mache man $H : K$ dieser Verhältniß gleich; und weil $FD : EB$ gegeben ist, so mache man $K : L$ derselben gleich; so wird $AE : CF = H : L$, mithin gefunden seyn. Denn weil $EB : FD = FC : EG$, so ist $FD : EB = EG : FC$; nun ist $AE : EG = (Prillgr AB : CD) = H : K$, und $EG : FC = (FD : EB) = K : L$; folglich *ex æquo* $AE : FC = H : L$.

Satz

69.

Satz XLVI.

Wenn zwey Parallelogramme ungleich,
aber gegebene Winkel, und eine gegebene
Verhältnis zu einander haben; so wird, wenn
eine Seite eine gegebene Verhältnis zu einer
Seite hat, auch die andere Seite eine gegebene
Verhältnis zu der andern Seite haben.
Fig. 65.

Die zwey Parallelogr $ABCD$, $EFGH$, worin die ungleichen Winkel ABC , EFG gegeben sind, haben eine gegebene Verhältnis zu einander, und es sey $BC:FG$ gegeben; so wird auch $AB:EF$ gegeben seyn.

- An B , dem Endpunct der geraden Linie BC mache man den Winkel CBK gleich dem gegebenen EFG , und vollende das Parallelogr BL ; weil nun jeder der Winkel BAK , AKB gegeben ist, so ist ^a das $\triangle ABK$ der Gattung nach gegeben; mithin ist $AB:BK$ gegeben; und weil (hyp.) Parallelogr $AC:EG$ gegeben ist, und ^b $AC=BL$, so ist $BL:EG$ gegeben; und weil BL mit EG gleichwinklicht, und ^c (hyp.) $BC:FG$ gegeben ist, so ist $KB:EF$ gegeben; nun ist $KB:BA$ gegeben; folglich ^d ist $AB:EF$ gegeben.

Die Verhältniß $AB : EF$ läßt sich folgendermaßen finden. Man nehme die, der Lage und Größe nach gegebene, Linie MN , und mache den Winkel NMO gleich dem gegebenen BAK , und den Winkel MNO gleich dem gegebenen $EF G$ oder AKB ; weil nun Prllgr BL mit EG gleichwinklicht ist und eine gegebene Verhältniß zu ihm hat, und $BC : FG$ gegeben ist, so finde man aus dem 65sten Satz die Verhältniß $KB : EF$, und mache $NO : OP$ derselben gleich; dann wird $AB : EF = MO : OP$, mithin gefunden seyn. Denn weil $\triangle ABK$ mit $\triangle MON$ gleichwinklicht ist, so ist $AB : BK = MO : ON$, und weil $KB : EF = NO : OP$, so ist *ex æquo* $AB : EF = MO : OP$.

Satz LXVII.

70.

Wenn die Seiten zweyer gleichwinklichten Parallelogramme gegebene Verhältnisse zu einander haben; so werden die Parallelogramme eine gegebene Verhältniß zu einander haben. Fig. 66.

Die zwey Prllgr $ABCD$, $EFGH$ seyen gleichwinklicht, und $AB : EF$, wie auch $BC : FG$ seyen gegeben; so ist Prllgr $AC : EG$ gegeben.

Man

Man nehme eine der Größe nach gegebene
 K, und weil $AB : EF$ gegeben ist, so mache
 a 2. dat. man $AB : EF = K : L$; mithin a ist L ge-
 geben; und weil $BC : FG$ gegeben ist, so mache
 man $BC : FG = L : M$; mithin a ist M ge-
 b 1. dat. geben; nun ist K gegeben, folglich auch b $K : M$.
 Endlich ist Prllgr $AC : EG = K : M$, wie
 in dem 23ten S. des 6ten Buches der Elem.
 bewiesen ist; folglich ist $AC : EG$ gegeben.

Hieraus erhellet, wie die Verhältnis zweyer
 er gleichwinklichten Prllgr kann gefunden wer-
 den, wenn die Verhältnisse ihrer Seiten gegeben
 sind.

70.

Satz LXVIII.

Wenn die Seiten zweyer Parallelogramme,
 die ungleiche, aber gegebene Winkel
 haben, gegebene Verhältnisse zu einander ha-
 ben, so wird die Verhältnis der Parallelo-
 gramme gegeben seyn. Fig. 67.

In den zwey Prllgr $ABCD, EFGH$,
 die die gegebenen ungleichen Winkel ABC, EFG
 haben, seyn die Verhältnisse ihrer Seiten, näm-
 lich $AB : EF$, und $BC : FG$, gegeben; so
 wird Prllgr $AC : EG$ gegeben seyn.

An B, dem Endpunct von BC, mache man den Winkel CBK gleich dem gegebenen EFG, und vollende Prllgr KBCL. Weil nun jeder der Winkel BAK, BKA, gegeben ist, so ist ^a $\triangle ABK$ der Gattung nach gegeben; mit- ^a 43. dat. hin ist $AB : BK$ gegeben; und weil $AB : EF$ gegeben ist, so ist ^b $BK : EF$ gegeben; nun ist ^b 9. dat. $BC : FG$ gegeben, und der Winkel KBC $\equiv$ EFG, folglich ^c ist Prllgr KC : EG gegeben; ^c 67. dat. und weil Prllgr KC $\equiv$ AC ^d, so ist $AC : EG$ ^d 35. I. gegeben.

Die Verhältniß der Prllgr AC, EG läßt sich folgendermaassen finden. Man nehme die, der Lage und Größe nach gegebene MN, und mache den Winkel MNO gleich dem gegebenen KAB, und NMO gleich dem gegebenen AKB oder FEH; weil nun $AB : EF$ gegeben ist, so mache man $AB : EF \equiv NO : P$; gleicherweise mache man $BC : FG \equiv P : Q$; so wird Prllgr $AC : EG \equiv MO : Q$.

Denn weil $KAB \equiv MNO$, und $AKB \equiv NMO$, so ist $\triangle AKB$ mit $\triangle NMO$ gleichwinklicht; folglich ist $KB : BA \equiv MO : ON$; und weil $BA : EF \equiv NO : P$, so ist *ex æquo*, $KB : EF \equiv MO : P$; ferner weil $BC : FG \equiv P : Q$, und die Prllgr KC, EG gleichwinklicht sind, so ist, wie im 67sten S. gezeigt worden, Prllgr (KC) $AC : EG \equiv MO : Q$.

Zusatz.

71.

Zusatz. 1. Wenn zwey $\triangle ABC, DEF$ zween gleiche, oder zween ungleiche, aber gegebene Winkel ABC, DEF haben, und wenn die Verhältnisse der anliegenden Seiten, nämlich $AB : DE$, und $BC : EF$ gegeben sind; so wird die Verhältniß der Dreyecke gegeben seyn. Fig. 68.

a 67. oder
68. dat.

b 34. 1.

c 15. 5.

Denn man vollende die Prllgr BG, EH , so ist^a $BG : EH$ gegeben; nun ist^b $\frac{1}{2} BG = \triangle ABC$, und $\frac{1}{2} EH = \triangle EDF$, folglich^c ist $\triangle ABC : \triangle EDF$ gegeben.

72.

Zusatz. 2. Wenn die Grundlinien BC, EF zweyer $\triangle ABC, DEF$ eine gegebene Verhältniß zu einander haben; und wenn auch die geraden Linien AG, DH , die von den entgegengesetzten Winkeln auf die Grundlinien, entweder unter gleichen, oder ungleichen aber gegebenen Winkeln AGC, DHF gezogen werden, eine gegebene Verhältniß zu einander haben; so wird $\triangle ABC : \triangle DEF$ gegeben seyn. Fig. 69.

Denn man ziehe BK, EL parallel mit AG, DH , und vollende die Prllgr KC, LE . Weil nun die Winkel AGC, DHF , oder KBC, LEF entweder gleich, oder ungleich, aber gegeben sind, und $AG : DH$, das ist, $KB : LE$, wie auch $BC : EF$ gegeben sind;

ist a Prllgr $KC:LF$, folglich auch $\triangle ABC$: a 67. oder
 $\triangle DEF$ gegeben. 68. dat.

$$b \begin{cases} 41. 1. \\ 15. 5. \end{cases}$$

Satz LXIX.

61.

Wenn ein Parallelogramm, das einen gegebenen Winkel hat, an die Seite einer der Gattung nach gegebenen geradlinichten Figur angelegt wird; so wird, wenn die Figur eine gegebene Verhältniß zu dem Parallelogramm hat, das Parallelogramm der Gattung nach gegeben seyn. Fig. 70.

$ABCD$ sey eine der Gattung nach gegebene geradlinichte Figur, und an eine ihrer Seiten AB werde das Prllgr $ABEF$, das den gegebenen Winkel ABE hat, angelegt; so wird, wenn $ABCD$ eine gegebene Verhältniß zu dem Prllgr BF hat, BF der Gattung nach gegeben seyn.

Durch den Punct A ziehe man AG parallel mit BC , und durch den Punct C ziehe man CG parallel mit AB , und verlängere GA , CB bis zu den Puncten H , K ; weil nun a der Winkel a 3 def. ABC , wie auch $AB:BC$ in der, der Gattung nach gegebenen $ABCD$ gegeben ist, so ist a Prllgr BG der Gattung nach gegeben. Und weil die zwo, der Gattung nach gegebenen, geradlinichten Figuren BD , BG über ebenderselben geraden

G

raden

b 53. dat. raden Linie A B beschrieben sind, so ist b BD :
 B G gegeben; nun ist (*hyp.*) BD : B F gege-
 c 9. dat. ben, folglich c ist (BF) B H : B G gegeben,
 d 1. 6. mithin d ist die Verhältniß der geraden Linien
 KB : B C gegeben; und weil B C : B A gegeben
 ist, so ist c KB : B A gegeben. Ferner weil der
 Winkel A B C gegeben ist, so ist der Nebenwin-
 kel A B K gegeben; und weil A B E gegeben ist,
 ist der Rest K B E gegeben; auch ist E K B ge-
 geben, weil er gleich A B K ist; folglich ist
 $\triangle B K E$ der Gattung nach gegeben; mithin ist
 E B : B K gegeben; nun ist K B : B A gegeben,
 mithin c ist E B : B A gegeben; und weil der
 Winkel A B E gegeben ist, so ist a Prllgr B F
 der Gattung nach gegeben.

Ein dem Prllgr B F ähnliches Prllgr läßt
 sich folgendermaßen finden. Man nehme eine
 der Lage und Größe nach gegebene L M; we-
 nun die Winkel A B K, A B E gegeben sind, so
 mache man $N L M = A B K$, und $N L O =$
 $A B E$. Ferner weil B F : B D gegeben ist, so
 mache man $B F : B D = L M : P$; und weil
 die Verhältniß der Figuren B D : B G gegeben
 ist, so finde man diese Verhältniß aus dem 53ten
 S. und mache derselben P : Q gleich. Ferner
 weil C B : B A gegeben ist, so mache man den
 selben Q : R gleich, und nehme L N = R; durch
 den Punct M ziehe man O M parallel mit L N,

und vollende das Prllgr N L O S; so wird N L O S dem Prllgr B F ähnlich seyn.

Denn weil der Winkel $ABK = NLM$, und $ABE = NLO$, so ist $KBE = MLO$, nun ist $BKE = LMO$, weil $ABK = NLM$; mithin sind die $\triangle BKE, LMO$ gleichwinklicht; folglich ist $BE : BK = LO : LM$; ferner weil $BF : BD = LM : P$, und $BD : BG = P : Q$, so ist *ex æquo*, $(BF)^e = e$ 35. 1. $BH : BG = LM : Q$; nun ist $BH : BG = 1. 6. = KB : BC$, folglich $KB : BC = LM : Q$; weil nun $BE : BK = LO : LM$, und $BK : BC = LM : Q$, und $BC : BA = Q : R$, so ist *ex æquo* $BE : BA = LO : R = LO : LN$; nun ist der Winkel $ABE = NLO$, folglich ist das Prllgr B F dem L S ähnlich.

Satz LXX.

Wenn zwei gerade Linien eine gegebene Verhältniß zu einander haben, und über der einen davon, eine der Gattung nach gegebene geradlinichte Sigur, über der andern aber ein Parallelogramm, das einen gegebenen Winkel hat, beschrieben wird; so ist, wenn die Sigur eine gegebene Verhältniß zu dem Parallelogramm hat, das Parallelogramm der Gattung nach gegeben. Fig. 71.

G 2

Die

Die zwei gerade Linien AB, CD haben eine gegebene Verhältniß zu einander, und über AB sey die der Gattung nach gegebene Figur AEB , über CD aber das Prillgr DF , das den gegebenen Winkel FCD hat, beschrieben; so ist, wenn $\triangle AEB : \text{Prillgr } DF$ gegeben ist, das Prillgr DF der Gattung nach gegeben.

Ueber der geraden Linie AB denke man sich das Prillgr AG , dem Prillgr FD ähnlich, und ähnlich mit ihm liegend beschrieben. Weil nun $AB : CD$ gegeben ist, und über AB und CD die ähnlichen geradlinichten Figuren AG, FD beschrieben sind, so ist ^a $AG : FD$ gegeben; nun ist ^b $FD : \triangle AEB$ gegeben; mithin ist $\triangle AEB : AG$ gegeben; ferner ist der Winkel ABG gegeben, weil er gleich FCD ist; weil demnach das Prillgr AG , das einen gegebenen Winkel ABG hat, an die Seite AB einer, der Gattung nach gegebenen Figur AEB angelegt, und $\triangle AEB : AG$ gegeben ist, so ist ^c Prillgr AG der Gattung nach gegeben; nun aber ist FD dem AG ähnlich, folglich ist FD der Gattung nach gegeben.

Ein dem FD ähnliches Prillgr läßt sich folgendermaßen finden. Man nehme eine der Größe nach gegebene gerade Linie H ; weil nun $\triangle AEB : FD$ gegeben ist, so mache man ihr das Verhältniß $H : K$ gleich; eben so, weil $CD :$

AB gegeben ist, finde man aus dem 54ten S. die Verhältniß, die die, über CD beschriebene Figur FD, zu der über AB beschriebenen ähnlichen Figur AG hat, und mache derselben K:L gleich; weil nun H:K, und K:L gegeben sind, so ist^b H:L gegeben; weil demnach $\triangle$ b 9. dat. $AEB:FD = H:K$, und $FD:AG = K:L$, so ist *ex æquo* $\triangle AEB:AG = H:L$; mithin ist $\triangle AEB:AG$ gegeben; weil nun $\triangle AEB$ der Gattung nach gegeben, und das Prllgr AG an die Seite AB unter einem gegebenen Winkel ABG angelegt ist, so läßt sich aus dem 69sten Satz ein dem AG ähnliches Prllgr finden; es sey Prllgr MN; MN ist also dem FD ähnlich; denn (*constr.*) MN ist dem AG ähnlich, und AG ist dem FD ähnlich; folglich ist FD dem MN ähnlich.

Satz LXXI.

81.

Wenn die äußersten von drey geraden Proportional-Linien gegebene Verhältnisse zu den äußersten von drey andern Proportional-Linien haben, so werden auch die mittlern eine gegebene Verhältnis zu einander haben. Und wenn eine äußerste eine gegebene Verhältnis zu einer äußersten, und die mittlere eine gegebene Verhältnis zu der mittlern hat; so

S 3

wird

wird auch die andere äußerste eine gegebene Verhältnis zu der andern äußersten haben, Fig. 72.

A, B, C seyen drey gerade Proportional-Linien, und D, E, F drey andere; und $A : D$, wie auch $C : F$ seyen gegeben; so wird auch $B : E$ gegeben seyn.

Weil $A : D$, wie auch $C : F$ gegeben ist, so ist ^a $A \times C : D \times F$ gegeben; nun ist ^b Bq _{17. 6.} $\equiv A \times C$, und ^b $Eq \equiv D \times F$; mithin ^c 58. dat. ist $Bq : Eq$ gegeben; folglich ^c ist auch $B : E$ gegeben.

Nun setze man, $A : D$ und $B : E$ seyen gegeben, so wird auch $C : F$ gegeben seyn.

^d 54. dat. Denn weil $B : E$ gegeben ist, so ist $Bq : Eq$ gegeben; folglich ^b ist $A \times C : D \times F$ gegeben; nun ist $A : D$ gegeben, folglich ^c 65. dat. ist auch $C : F$ gegeben.

Zusatz. Und wenn die äußersten von vier Proportional-Linien zu den äußersten von vier andern, gegebene Verhältnisse haben, und eine von den mittlern eine gegebene Verhältnis zu einer von den mittlern hat; so wird die andere mittlere eine gegebene Verhältnis zu der andern mittlern haben, wie sich auf eben die Art, wie im Satze zeigen läßt.

Satz

Satz LXXII.

82.

Wenn vier gerade Linien proportionell sind, so wird, wie sich die erste zu der geraden Linie verhält, zu welcher die zweyte eine gegebene Verhältniß hat, sich die dritte zu einer geraden Linie verhalten, zu welcher die vierte eine gegebene Verhältniß hat. Fig. 73.

A, B, C, D seyen vier Proportional = Linien, es sey nämlich $A : B = C : D$; so wird, wie sich verhält A zu der geraden Linie, zu welcher B eine gegebene Verhältniß hat, sich C verhalten zu einer geraden Linie, zu welcher D eine gegebene Verhältniß hat.

Es sey E die gerade Linie, zu welcher B eine gegebene Verhältniß hat; und man mache $B : E = D : F$, weil nun (*hyp.*) $B : E$ gegeben ist, so ist $D : F$ gegeben; und weil $A : B = C : D$, und $B : E = D : F$, so ist *ex æquo* $A : E = C : F$; nun ist E die gerade Linie, zu welcher B eine gegebene Verhältniß hat, und F die, zu welcher D eine gegebene Verhältniß hat; folglich wie sich A verhält zu der geraden Linie, zu welcher B eine gegebene Verhältniß hat, so verhält sich C zu einer Linie, zu welcher D eine gegebene Verhältniß hat.

83.

Satz LXXIII.

Wenn vier gerade Linien proportionell sind; so wird, wie sich die erste zu der geraden Linie verhält, zu welcher die zweyte eine gegebene Verhältniß hat, die gerade Linie, zu welcher die dritte eine gegebene Verhältniß hat, sich zu der vierten verhalten. Fig. 74.

Es sey $A : B = C : D$; so wird, wie sich verhält A zu der geraden Linie, zu welcher B eine gegebene Verhältniß hat, eine gerade Linie, zu welcher C eine gegebene Verhältniß hat, sich zu D verhalten.

Es sey E die gerade Linie, zu welcher B eine gegebene Verhältniß hat, und man mache $B : E = F : C$; weil nun $B : E$ gegeben ist, so ist $F : C$ gegeben; und weil $A : B = C : D$, und $B : E = F : C$, so ist *ex æquo perturbatim* $A : E = F : D$, das ist, A verhält sich zu E, zu welcher B eine gegebene Verhältniß hat, wie F, zu welcher C eine gegebene Verhältniß hat, sich zu D verhält.

64.

Satz LXXIV.

Wenn ein Dreyeck einen gegebenen stumpfen Winkel hat; so wird der Ueberschuß des

des Quadrates der Seite, die dem stumpfen Winkel gegenüber steht, über die Quadrate der anliegenden Seiten, eine gegebene Verhältniß zu dem Dreyek haben. Fig. 75.

Daß $\triangle ABC$ habe einen gegebenen stumpfen Winkel ABC ; und man verlängere die gerade Linie CB , und von dem Punct A falle man AD senkrecht auf BC ; so hat $AC^2 = (AB^2 + BC^2)$ das ist ^a $2 DB \times BC$ eine ^a 12. 2. gegebene Verhältniß zu dem $\triangle ABC$.

Weil der Winkel ABC gegeben ist, so ist auch ABD gegeben; weil nun auch ADB gegeben ist, so ist ^b das $\triangle ABD$ der Gattung ^b 43. dat. nach gegeben, folglich ist $AD : DB$ gegeben.

Nun ist ^c $AD : DB = AD \times BC : c$ 1. 6. $DB \times BC$, mithin ist $AD \times BC : DB \times BC$, wie auch $2 DB \times BC : AD \times BC$ gegeben; nun ist $AD \times BC : \triangle ABC$ gegeben, weil ^d d 41. 1. $AD \times BC = 2 \triangle ABC$; folglich ^e ist ^e 9. dat. $2 DB \times BC : \triangle ABC$ gegeben; nun aber ist $2 DB \times BC = AC^2 - (AB^2 + BC^2)$, folglich hat $AC^2 - (AB^2 + BC^2)$ eine gegebene Verhältniß zu dem $\triangle ABC$.

Die Verhältniß dieses Ueberschusses zu dem $\triangle ABC$ läßt sich folgendermaassen finden. Man nehme eine der Lage und Größe nach gegebene gerade Linie EF ; weil nun der Winkel ABC

gegeben ist, so mache man an dem Punct F der Linie EF; den Winkel $\angle EFG = \angle ABC$; man verlängere GF, und fälle EH senkrecht auf FG; so ist $AC^2 = (AB^2 + BC^2) : \triangle ABC = 4 HF : HE$.

Denn weil der Winkel $\angle ABD = \angle EFH$, und $\angle ADB = \angle EHF$, so ist $\triangle ADB$ gleichwinklicht mit dem $\triangle EHF$, folglich^f ist $BD : DA = FH : HE$, mithin^g $4 BD : DA = 4 FH : HE$; nun ist^c $2 BD : DA = 2 BD \times BC : DA \times BC$, und $DA : \frac{1}{2} DA = AD \times BC : (\frac{1}{2} AD \times BC) \triangle ABC$, mithin *ex æquo*, $2 BD : \frac{1}{2} DA$, das ist, $4 BD : DA$, das ist, $4 FH : HE = 2 BD \times BC : \triangle ABC$.

65.

Satz LXXV.

Wenn ein Dreyeck einen gegebenen spitzen Winkel hat; so wird der Raum, um den das Quadrat der, dem spitzen Winkel gegenüberstehenden Seite kleiner ist als die Quadrate der anliegenden Seiten, eine gegebene Verhältniß zu dem Dreyeck haben. Fig. 76.

Das $\triangle ABC$ habe einen gegebenen spitzen Winkel $\angle ABC$, und man fälle AD senkrecht auf BC; so hat $AB^2 + BC^2 = AC^2$, das

ist a , $2 CB \times BD$ eine gegebene Verhältniß zu a 13. 2.
 $\triangle ABC$.

Weil die Winkel ABD , ADB , jeder für sich, gegeben sind, so ist $\triangle ABD$ der Gattung nach gegeben; mithin ist $BD:DA$ gegeben; nun ist $BD:DA = CB \times BD:CB \times DA$; folglich ist $CB \times BD:CB \times DA$ gegeben, wie auch $2 CB \times BD:CB \times DA$; nun ist $CB \times DA:\triangle ABC$ gegeben, folglich^b ist $2 CB \times BD:\triangle ABC$ gegeben; nun aber ist $2 CB \times BD = AB q + BC q - AC q$, folglich ist die Verhältniß dieses Raumes zu dem Dreieck gegeben; und sie läßt sich wie im vorhergehenden Satze finden.

^b dat.

Lehnsatz.

Wenn von dem Scheitelpunct A eines gleichschenkligen Dreiecks ABC irgend eine gerade Linie AD auf die Grundlinie BC gezogen wird; so ist das Quadrat der Seite AB gleich dem Rechte aus BD , DC , den Segmenten der Grundlinie, samt dem Quadrat von AD ; wird aber AD auf die verlängerte Grundlinie gezogen, so ist das Quadrat von AD gleich dem Rechte aus BD , DC , samt dem Quadrat von AB . Fig. 77.

Sall. 1. Man theile die Grundlinie BC in zween gleiche Theile in E , und ziehe AE , die^a a 8. 1. auf BC senkrecht seyn wird; demnach^b ist $AB q$ b 47. 1.

==

e 5. 2.

$\equiv AE\ q + EB\ q$; nun ist^c $EB\ q \equiv BD \times DC + DE\ q$; folglich ist $AB\ q \equiv (AE\ q + DE\ q \equiv)^b AD\ q + BD \times DC$.

Der andere Fall ist auf eben diese Art in 6. 2. Elem. gezeigt worden.

67.

Satz LXXVI.

Wenn ein Dreyel einen gegebenen Winkel hat, so wird der Ueberschuß des Quadrates der geraden Linie, die den zwei anliegenden Seiten zusammengenommen gleich ist, über das Quadrat der dritten Seite, eine gegebene Verhältniß zu dem Dreyel haben. Fig. 78.

Das $\triangle ABC$ habe den gegebenen Winkel BAC , so wird $(BA + AC)\ q - BC\ q$ zu $\triangle ABC$ eine gegebene Verhältniß haben.

Man verlängere BA , und nehme $AD \equiv AC$; man ziehe DC , und verlängere sie; durch den Punct B ziehe man BE parallel mit AC ; dann ziehe man AE , und mache AF auf DC senkrecht.

Weil nun $AD \equiv AC$, so ist $BD \equiv BE$; ferner weil BC von dem Scheitelpunct B des gleichschenkligen $\triangle DBE$ gezogen worden,

so ist, kraft des Lehrsatzes, $BD \cdot q$, das ist,
 $(BA + AC) \cdot q = DC \times CE + BC \cdot q$;
mithin ist $(BA + AC) \cdot q - BC \cdot q = DC \times$
 CE . Dieses Rechteck hat eine gegebene Verhält-
nis zu dem $\triangle ABC$. Denn der Winkel BAC
ist gegeben, folglich auch der Nebenwinkel
 CAD ; ferner ist jeder von den Winkeln ADC ,
 DCA gegeben, weil jeder die Hälfte des gege-
benen BAC ist^a, mithin ist $\triangle ADC$ der Satz a 5 & 32. I.
tung nach gegeben^b; und weil AF von dem^b 43. dat.
Scheitelpunct auf die Grundlinie unter einem
gegebenen Winkel gezogen ist, so ist^c $AF : CD$ c 50. dat.
gegeben; nun ist^d $CD : AF = DC \times CE : d$ 1. 6.
 $AF \times CE$, und $AF \times CE : \triangle ACE$ ist ge-
geben^e; folglich^f ist $DC \times CE : \triangle ACE$,^e 41. I.
das ist^g, $\triangle ABC$ gegeben; und weil $DC \times$ ^f 9. dat.
 $CE = (BA + AC) \cdot q - BC \cdot q$, so ist die^g 37. I.
Verhältniß dieses Ueberschusses zu dem $\triangle ABC$
gegeben.

Die Verhältniß $DC \times CE : \triangle ABC$ läßt
sich folgendermaßen finden. Man nehme eine
der Lage und Größe nach gegebene Linie GH ,
und an dem Punct G mache man den Winkel
 HGK gleich dem gegebenen CAD , und nehme
 $GK = GH$, vereinige KH , und ziehe GL
senkrecht darauf; so wird $DC \times CE : \triangle ABC$
 $= HK : \frac{1}{2} GL$ seyn. Denn weil die Schei-
telwinkel HGK , DAC in den gleichschenkligen
Dreiecken einander gleich sind, so sind diese
Dreie-

Dreyecke einander ähnlich; und weil GL, AF auf den Grundlinien HK, DC senkrecht sind, so ist^h $HK : GL = DC : AF = DC \times CE : AF \times CE$; nun ist $GL : \frac{1}{2} GL = AF \times CE : (\frac{1}{2} AF \times CE) \triangle ACE$ oder $\triangle ABC$; folglich *ex æquo* $HK : \frac{1}{2} GL = DC \times CE : \triangle ABC$.

Zusatz. Und wenn ein Dreyeck einen gegebenen Winkel hat, so wird der Raum, um den das Quadrat der anliegenden Seiten kleiner ist als das Quadrat der dritten Seite, eine gegebene Verhältniß zu dem Dreyeck haben. Dieß läßt sich vermittelst des zweyten Falles des Lehrsatzes auf gleiche Weise, wie im vorhergehenden Satze, beweisen.

J.

Satz LXXVII.

Wenn das von einem gegebenen Winkel eines Dreyecks auf die gegenüberstehende Seite, oder Grundlinie, herabgefällte Loth, eine gegebene Verhältniß zu der Grundlinie hat, so ist das Dreyeck der Gattung nach gegeben. Fig. 79.

Das $\triangle ABC$ habe den gegebenen Winkel BAC, und das auf die Grundlinie BC herab-

gefällte Loth AD habe eine gegebene Verhältniß zu ihr; so ist $\triangle ABC$ der Gattung nach gegeben.

Wenn $\triangle ABC$ ein gleichschenklichtes Dreyek ist, so ist evident ^a, daß wenn einer seiner Winkel gegeben ist, auch die übrigen, jeder für sich gegeben sind; folglich ist das Dreyek der Gattung nach gegeben, ohne die Verhältniß des Lothes zur Grundlinie in Betracht zu ziehen, als welche in diesem Fall nach dem 50sten Satz gegeben ist.

Wenn aber $\triangle ABC$ kein gleichschenklichtes Dreyek ist, so nehme man eine der Lage und Größe nach gegebene EF, und beschreibe darüber ^b einen des gegebenen Winkels BAC fähigen Kreis = Abschnitt EGF; aus H, der Mitte von EF richte man HG senkrecht auf, und ziehe EG, GF. Weil nun der Winkel EGF dem gegebenen BAC gleich, und $\triangle EGF$ ein gleichschenklichtes Dreyek, $\triangle BAC$ aber keines ist, so ist der Winkel FEG dem CBA nicht gleich. Man ziehe EL, so daß $FEL = CBA$; man vereinige FL, und fälle LM senkrecht auf EF. Weil nun die $\triangle ELF, BAC$, wie auch die $\triangle MLE, DAB$, gleichwinklicht sind, so ist $ML : LE = DA : AB$, und $LE : EF = AB : BC$, folglich *ex æquo* $LM : EF = AD : BC$; weil nun $AD : BC$ gegeben ist, so ist auch $LM : EF$ gegeben; und weil EF gegeben

- c 2. dat. geben ist, so ist c LM gegeben. Man vollende das Prillgr LMFK; weil nun LM gegeben ist, so ist FK der Größe nach gegeben; sie ist aber auch der Lage nach gegeben, und der Punct F ist gegeben; folglich d ist der Punct K gegeben; und weil die gerade Linie KL durch K mit der, der Lage nach gegebenen, EF parallel gezogen ist, so ist e KL der Lage nach gegeben; und weil der Bogen ELF der Lage nach gegeben ist, so ist f der Punct L gegeben. Weil nun die Puncte L, E, F gegeben sind, so sind g die Linien LE, EF, FL der Größe nach gegeben; mithin h ist $\triangle LEF$ der Gattung nach gegeben; und weil $\triangle ABC$ dem $\triangle LEF$ ähnlich ist, so ist $\triangle ABC$ der Gattung nach gegeben.

Weil $LM < GH$, so muß $LM:EF$, das ist, die gegebene Verhältniß $AD:BC$ kleiner seyn als $GH:EF$, das ist, kleiner als die Verhältniß, welche die gerade Linie, wodurch die Grundlinie eines des gegebenen Winkels fähigen Kreis-Abschnittes, in zween gleiche Theile getheilt wird, zu dieser Grundlinie hat.

Zusatz. I. Wenn in zwey $\triangle ABC, LEF$ der Winkel $BAC = ELF$, und wenn das Loth AD sich zur Grundlinie BC verhält, wie das Loth LM zu der Grundlinie EF; so sind die $\triangle ABC, LEF$ einander ähnlich.

Man

Man beschreibe um das $\triangle ELF$ den Kreis EGF , und ziehe LN parallel mit EF ; man vereinige EN , NF , und ziehe NO senkrecht auf EF . Weil nun $ENF = ELF$, und $EFN = FNL$ (*angulo alterno*) das ist, FEL , der auf eben dem Bogen steht; so ist $\triangle NEF$ dem $\triangle LEF$ ähnlich; und in dem Abschnitt EGF kann es über der Grundlinie EF kein anderes Dreieck geben, worin die Verhältniß des Lothes zu EF mit der Verhältniß von LM oder NO zu EF einerley wäre, weil das Loth entweder größer oder kleiner seyn muß als LM oder NO . Nun aber kann, wie im vorhergehenden Beweise gezeigt worden, in dem Kreis-Abschnitt EGF über EF ein dem $\triangle ABC$ ähnliches Dreieck beschrieben werden, und die Verhältniß seines Lothes zu der Grundlinie ist, wie gezeigt worden, einerley mit $AD : BC$, das ist, $LM : EF$; folglich muß dieses Dreieck entweder $\triangle LEF$ oder $\triangle NEF$ seyen, die daher dem $\triangle ABC$ ähnlich sind.

Anmerkung des Uebersetzers: Dieser Beweis läßt sich auch auf folgende, vielleicht faßlichere Art vortragen.

Man beschreibe um das $\triangle ELF$ den Kreis EGF , und mache den Winkel $NEF = ABC$, und ziehe NF , so wird, weil $ENF = (ELF)$ BAC (*hyp.*), das $\triangle ENF$ dem $\triangle BAC$

$\triangle$ $\triangle$
 ENF BAC
 $\triangle$ $\triangle$

ähnlich

ähnlich seyn; nun fälle man von N das Loth NO auf EF, so ist, wie im Satze bewiesen worden, $AD : BC = NO : EF$; nun ist (*hyp.*) $AD : BC = LM : EF$, folglich $NO : EF = LM : EF$, mithin ist $NO = LM$. Man ziehe NL, so istⁱ NL mit OM parallel; mithin ist der Winkel NLE = LEF; nun ist $NLE = NFE$, folglich ist $NFE = LEF$, folglich ist das $\triangle NEF$ dem $\triangle ELF$ ähnlich; nun ist es dem $\triangle BAC$ ähnlich gemacht worden, folglich ist das $\triangle ELF$ dem $\triangle BAC$ ähnlich.

i 33. I.

Zusatz. 2. Wenn ein $\triangle ABC$ einen gegebenen Winkel BAC hat, und wenn die Linie AR, von dem gegebenen Winkel an die gegenüberstehende Seite, unter einem gegebenen Winkel ARC gezogen, eine gegebene Verhältniß zu BC hat; so ist das $\triangle ABC$ der Gattung nach gegeben.

Man ziehe AD senkrecht auf BC, so ist $\triangle ARD$ der Gattung nach gegeben; mithin ist $AD : AR$ gegeben, und weil (*hyp.*) $AR : BC$ gegeben ist, so ist^k $AD : BC$ gegeben; folglich^l ist $\triangle ABC$ der Gattung nach gegeben.

k 9. dat.

l 77. dat.

Zusatz. 3. Wenn in zwey $\triangle ABC, LEF$ der Winkel $BAC = ELF$, und wenn die
von

von diesen Winkeln auf die Grundlinien, unter gegebenen und gleichen Winkeln, gezogenen geraden Linien einerley Verhältniß zu den Grundlinien haben; so sind die Dreyecke einander ähnlich. Denn wenn man von den gleichen Winkeln Lothe auf die Grundlinien herabfällt, so verhält sich ein Loth zu seiner Grundlinie, wie das andere zu seiner Grundlinie m ; m $\left[\begin{array}{l} 4. 6. \\ 22. 5. \end{array} \right.$ folglich nach Zus. 1. sind die Dreyecke ähnlich.

Ein dem $\triangle ABC$ ähnliches Dreyeck läßt sich folgendermaßen finden. Nachdem man den Kreis = Abschnitt EGF beschrieben, und die Linie GH gezogen, wie in dem Satze gewiesen worden, so finde man FK , die zu EF die gegebene Verhältniß $AD : BC$ hat; und von dem Punct F richte man FK senkrecht über EF auf. Weil nun, wie gezeigt worden, $AD : BC$, das ist, $FK : EF$ kleiner seyn muß als $GH : EF$; so ist FK kleiner als GH ; folglich muß die, durch den Punct K mit EF parallel gezogene Linie den Bogen des Kreis = Abschnittes in zween Puncten berühren; einer davon sey L , und man ziehe EL , LF , und LM senkrecht auf EF ; so wird, weil der Winkel $BAC = ELF$, und $AD : BC = (KF) LM : EF$, das $\triangle ABC$ dem $\triangle LEF$ ähnlich seyn, kraft des 1. Zus.

80.

Satz LXXVIII.

Wenn ein Dreyeck einen gegebenen Winkel hat, und wenn die Verhältniß des Rechteckes der anliegenden Seiten zu dem Quadrate der dritten Seite gegeben ist; so ist das Dreyeck der Gattung nach gegeben. Fig. 80.

Das $\triangle ABC$ habe den gegebenen Winkel BAC , und die Verhältniß $BA \times AC : BC^2$ sey gegeben; so ist das $\triangle ABC$ der Gattung nach gegeben.

Von dem Punct A fälle man AD senkrecht auf BC , so ist ^a $AD \times BC : \triangle ABC$, (das Ganze zu der Hälfte), gegeben; und weil der Winkel BAC gegeben ist, so ist ^b $\triangle ABC : BA \times AC$ gegeben; nun ist (*hyp.*) $BA \times AC : BC^2$ gegeben, folglich ^c ist $AD \times BC : BC^2$, das ist ^d, $AD : BC$ gegeben; folglich ^e ist das $\triangle ABC$ der Gattung nach gegeben.

a 41. 1.
b Cor. 62. dat.
c 9. dat.
d 1. 6.
e 77. dat.

Ein dem $\triangle ABC$ ähnliches Dreyeck läßt sich folgendermaßen finden. Man nehme eine, der Lage und Größe nach, gegebene Linie EF , und mache FEH gleich dem gegebenen Winkel BAC , und ziehe FH senkrecht auf EG , und BK senkrecht auf AC ; folglich sind die $\triangle \triangle ABK$,

ABK , EFH einander ähnlich; und $AD \times BC$,
 oder das ihm gleiche $BK \times AC : BA \times AC =$
 $BK : BA = FH : FE$. Nun setze man, die
 gegebene Verhältniß $BA \times AC : BCq$ sey gleich
 $EF : FL$; so ist *ex æquo* $AD \times BC : BCq$,
 das ist, $AD : BC = HF : FL$; und weil
 AD nicht größer ist, als die Linie MN , welche
 in dem, um das $\triangle ABC$ beschriebenen Kreis-
 Abschnitt auf der Mitte von BC senkrecht steht,
 so muß $AD : BC$, das ist, $HF : FL$, nicht
 größer seyn als $MN : BC$. Dem sey so, und
 man finde aus dem 77sten S. ein $\triangle OPQ$, das
 einen seiner Winkel POQ gleich dem gegebenen
 BAC habe; und die Verhältniß des von diesem
 Winkel auf die Grundlinie PQ gesenkten Lothes
 sey gleich $HF : FL$; so wird das $\triangle ABC$ dem
 $\triangle OPQ$ ähnlich seyn. Denn, wie gezeigt wor-
 den, $AD : BC = (HF : FL$, das ist *per*
constr. $=) OR : PQ$; nun ist der Winkel
 $BAC = POQ$; folglich^f ist $\triangle ABC$ dem $\triangle POQ$ ähnlich.

f. I. Cor. 77.
dat.

Anderer Beweis.

Das $\triangle ABC$ habe den gegebenen Winkel
 BAC , und $BA \times AC : BCq$ sey gegeben; so
 ist das $\triangle ABC$ der Gattung nach gegeben.

- a 76. dat. Weil der Winkel BAC gegeben ist, so ist a die Verhältniß von $(BA + AC)q - BCq$ zu $\triangle ABC$ gegeben. Es sey $(BA + AC)q - BCq = D$, so ist $D : \triangle ABC$ gegeben, und weil der Winkel BAC gegeben ist, ist b $\triangle ABC : BA \times AC$ gegeben; nun ist c 10. dat. (*hyp.*) $BA \times AC : BCq$ gegeben, folglich d 7. dat. ist $D : BCq$ gegeben, und *componendo* d $D + BCq : BCq$ ist gegeben; nun aber ist $D + BCq = (BA + AC)q$, mithin ist $(BA + AC)q : BCq$ gegeben, folglich auch e $(BA + AC) : BC$; und weil der Winkel BAC gegeben ist, so ist f das $\triangle ABC$ der Gattung nach gegeben.

Die hieraus fließende Composition, die von den Compositionen des 76 und 48ten S. abhängt, ist verwickelter als die nächstvorhergehende, die von der des 77ten S. abhängt, welche leicht zu bewerkstelligen ist.

K.

Satz LXXIX.

Wenn ein Dreyeck einen gegebenen Winkel hat, und wenn die, von diesem Winkel auf die Grundlinie gezogene, und einen gegebenen Winkel mit ihr machende Linie, die Grundlinie in Segmente theilt, die eine ge-

gebene Verhältnis zu einander haben; so ist das Dreyek der Gattung nach gegeben. Fig. 81.

Daß $\triangle ABC$ habe den gegebenen Winkel BAC , und die gerade Linie AD , die, auf die Grundlinie BC gezogen, den gegebenen Winkel ADB macht, theile BC in die Segmente BD , DC , die eine gegebene Verhältnis zu einander haben; so wird $\triangle ABC$ der Gattung nach gegeben seyn.

Man beschreibe ^a um das Dreyek den Kreis ^a 5. 4. ABC , und aus dem Mittelpunct E ziehe man EA , EB , EC , ED . Weil nun der Winkel BAC gegeben ist, so ist der doppelte am Mittelpunct ^b gegeben; und weil $BE = EC$, so ^b 20. 3. ist $BE : EC$ gegeben; mithin ^c ist $\triangle BEC$ der ^c 44. dat. Gattung nach gegeben, und $EB : BC$ ist gegeben; ferner weil (*hyp.*) $BD : DC$ gegeben ist, so ist ^d $CB : BD$ gegeben; mithin ^e ist $EB : BD$ ^d 7. dat. ^e 9. dat. gegeben, und weil der Winkel $EB C$ gegeben ist, so ist ^e das $\triangle EBD$ der Gattung nach gegeben, mithin ist EB , das ist, $EA : ED$ gegeben, nun ist der Winkel EDA gegeben, weil jeder der Winkel BDE , BDA gegeben ist; folglich ^f ist das $\triangle AED$ der Gattung nach gegeben, ^f 47. dat. und der Winkel AED ist gegeben; nun ist, weil jeder der Winkel BED , BEC gegeben

§ 4

ben

ben ist, auch DEC gegeben; mithin ist der Winkel AEC gegeben; nun ist wegen der Gleichheit, $AE : EC$ gegeben; folglich ϵ ist $\triangle AEC$ der Gattung nach gegeben, und der Winkel ECA ist gegeben; weil nun auch ECB gegeben ist, so ist der Winkel ACB gegeben; nun ist (hyp.) ϵ 43. dat. BAC gegeben; folglich ζ ist das $\triangle ABC$ der Gattung nach gegeben.

Ein dem $\triangle ABC$ ähnliches Dreieck läßt sich folgendermaßen finden. Man nehme eine der Lage und Größe nach gegebene gerade Linie, und theile sie in zween Theile, die die gegebene Verhältniß BD : DC haben; alsdann beschreibe man über ihr einen Kreis = Abschnitt, der des gegebenen Winkels BAC fähig sey, und nachdem man von dem Theilungs = Punct unter dem gegebenen Winkel ADB eine gerade Linie gezogen hat, so ziehe man von dem Punct, wo sie dem Umfang begegnet, Linien an die Endpunkte der angenommenen Linie; so wird man ein Dreieck haben, das dem $\triangle ABC$ ähnlich ist; wie sich leicht zeigen läßt.

Der Beweis läßt sich auch auf eben die Art machen, wie der in dem 77sten S. und der im 77sten S. wie der in diesem.

Ende

Satz LXXX.

L.

Wenn zwei Seiten eines Dreyecks eine gegebene Verhältniß zu einander haben, und wenn das, von dem eingeschlossenen Winkel auf die Grundlinie gefällte Loth eine gegebene Verhältniß zu der Grundlinie hat; so ist das Dreyeck der Gattung nach gegeben. Fig. 82.

Die Seiten BA, AC in dem $\triangle ABC$ haben eine gegebene Verhältniß zu einander, und das Loth AD habe eine gegebene Verhältniß zu der Grundlinie BC ; so wird das $\triangle ABC$ der Gattung nach gegeben seyn.

Es sey erstlich $AB = AC$, so theilt ^{a 26. I.} das Loth AD die Grundlinie BC in zween gleiche Theile; folglich weil (*hyp.*) $AD : BC$ gegeben ist, so ist auch $AD : DB$ gegeben, und weil ADB gegeben ist, so ist ^{b 44. dat.} das $\triangle ABD$, folglich auch $\triangle ABC$ der Gattung nach gegeben. ^c

c. 43. dat.

Wenn aber die Seiten ungleich sind, und $BA > AC$; so mache man den Winkel $CAE = ABC$; weil nun der Winkel AEB den beyden $\triangle AEB, CEA$ gemein ist, so sind sie einander ähnlich; mithin ist $AB : BE$

§ 5

=

d 9. dat.
e 6. dat.

f 46. dat.

§ 43. dat.

* 19. 5.

— $CA:AE$, und *permutando* $BA:AC =$
 $BE:EA = EA:EC$; nun ist $BA:AC$
 gegeben, folglich auch $BE:EA$, und $EA:$
 EC , wie auch $d BE:EC$; folglich e ist $EB:$
 BC gegeben; nun ist (*hyp.*) $AD:BC$ gege-
 ben, mithin d ist $AD:BE$ gegeben; ferner ist,
 wie gezeigt worden, $BE:EA$ gegeben, folglich
 ist $AD:AE$ gegeben, und weil ADE ein rech-
 ter Winkel ist, so ist $\triangle ADE$ der Gattung nach
 gegeben f , und der Winkel AEB ist gegeben;
 gleicherweise ist $BE:EA$ gegeben, folglich ist b
 $\triangle ABE$ der Gattung nach gegeben, und der
 Winkel EAB , wie auch ABE , das ist, CAE
 ist gegeben; mithin ist der Winkel BAC gege-
 ben; und weil auch ABC gegeben ist, so ist $\triangle$
 ABC der Gattung nach gegeben.

Wie sich ein Dreyek finden läßt, das die
 in dem Satz gegebenen Dinge hat, ist evident im
 ersten Fall. Um es in dem zweyten Fall desto
 leichter zu finden, muß man bemerken, daß,
 wenn man die Linie EF gleich EA auf EB nach
 B zu, legt, der Punct F die Grundlinie in die
 Segmente BF, FC theilt, die sich zu einander
 verhalten wie $BA:AC$. Denn weil, wie ge-
 zeigt worden, $BE:(EA)EF = EF:EC$
 so ist * $BF:FC = BE:(EF)EA$, das ist,
 $BA:AC$; nun kann AE nicht kleiner seyn als
 die Höhe des $\triangle ABC$, aber sie kann derselben
 gleich

gleich seyn: ist dieses; so läßt sich in diesem Fall das Dreyek, wie auch die Verhältniß der Seiten folgendermaassen finden, wenn nämlich (*hyp.*) die Verhältniß des Lothes zur Grundlinie gegeben ist. Man nehme die der Lage und Größe nach gegebene GH zur Grundlinie des zu findenden Dreyeks, und die gegebene Verhältniß des Lothes zur Grundlinie sey $K : GH$, das ist, K sey dem Lothe gleich; nun setze man, GLH sey das zu findende Dreyek; demnach, wenn man den Winkel $HLM = LGH$ gemacht hat, so wird erfordert, daß LM senkrecht auf GM, und gleich K sey; und weil $GM : ML = ML : MH$, so wie vorhin $BE : EA = EA : EC$ war, so ist $GM \times MH = ML^2$. Nun theile man GH in N in zween gleiche Theile, so ist $GM \times HM + NH^2 = NM^2$, oder $h\ 6. 2.$ $ML^2 + NH^2 = NM^2$; da nun ML oder K, und NH gegeben sind, so ist NM, deren Quadrat den beyden Quadraten von ML und von NH gleich ist, gegeben, und der Punct M ist gegeben. Man richte also $ML = K$ senkrecht über GM auf; demnach weil ML der Lage und Größe nach gegeben ist, so ist der Punct L gegeben. Man ziehe LG, LH, so wird $\triangle LGH$ das gesuchte Dreyek seyn.

Dem

I 6. 6.

Denn (*constr.*) $NMq = NHq + MLq$;
 nun ist $GM \times MH + NHq = NMq$;
 folglich $GM \times MH = MLq$; mithin GM
 $ML = ML : MH$, mithin ist $\triangle LGM$
 mit $\triangle HLM$ gleichwinklicht, und der Winkel
 $HLM = LGM$. Demnach ist die von dem
 Scheitelpunct des Dreyecks gezogene ML gleich
 der gegebenen K , sie steht senkrecht auf der
 Grundlinie, und macht den Winkel $HLM =$
 LGH ; wie gefodert war. Endlich verhält sich
 GL zu LH , wie GM zu ML , das ist, wie
 die, aus GN , der Hälfte der Grundlinie, und
 NM , deren Quadrat den Quadraten von GN und
 von K gleich ist, zusammengesetzte Linie sich zu
 der Linie K verhält.

Ob nun $GM : ML$ größer oder kleiner sey
 als die Verhältniß der Seiten irgend eines andern
 Dreyecks, das auf der Grundlinie GH steht, und des-
 sen Höhe der geraden Linie K gleich ist, das ist, des-
 sen Scheitelpunct in der, durch L mit GH parallel
 gezogenen Linie liegt; das läßt sich also finden.
 Eines solcher Dreyecke sey $\triangle OGH$, und man
 ziehe OP so daß der Winkel $HOP = OGH$;
 mithin ist wie vorhin, $GP : PO = PO : PH$;
 und PO kann nicht gleich seyn LM , weil sonst
 $GP \times PH$ gleich seyn würde $GM \times MH$,
 welches unmöglich ist; denn der Punct P kann
 nicht auf M fallen, weil alsdann O auf L fallen
 würde.

würde: auch kann $P.O$ nicht kleiner seyn als LM ; folglich ist sie größer; folglich ist $(P.O.q)$ $GP \times PH > (LM.q) GM \times MH$, mithin ist $GP > GM$; nun (*) ist $GM : MH > GP : PH$, folglich^k $GM.q : ML.q < GP.q : PO.q$, ^{k 20. 6.} mithin ist $GM : ML > GP : PO$; nun aber ist $GM : ML = GL : LH$, und $GP : PO = GO : OH$; mithin ist $GL : LH > GO : OH$; folglich ist $GL : LH$ die größte unter allen, folglich muß die gegebene Verhältnis der größern Seite zu der kleinern nicht größer seyn als diese Verhältnis.

Wenn also die Verhältnis der Seiten nicht einerley ist mit der größten Verhältnis $GM : ML$, so muß sie nothwendigerweise kleiner seyn als dieselbe. Es sey irgend eine kleinere Verhältnis gegeben, und man nehme wie vorhin an, daß GH die Grundlinie, und K der Höhe des Dreyekß gleich sey; so läßt sich das Dreyekß folgendermaassen finden. Man theile GH in dem Punct Q ,
so

(*) Dieß beruht auf folgendem Satz: Wenn $A > B$, und C irgend eine dritte Größe, so ist $A : B > (A + C) : (B + C)$. Denn es sey $A : B = C : D$, so ist, weil $A > B$, auch $C > D$; und $A : B = A + C : B + D$; nun ist $B + D < B + C$, folglich^l $A + C : B + D > A + C : B + C$, folglich $A : B > A + C : B + C$. ^{18. 5.}

so daß $GQ : QH$ gleich sey der gegebenen Ver-
 hältnis der Seiten; ferner setze man $GQ : QH$
 m 19. 5. $\equiv GP : PQ$ mithin m $GP : PQ \equiv PQ :$
 PH ; mithin $GPq : PQq \equiv GP : PH$; und
 weil $GM : ML \equiv ML : MH$, so ist $GMq :$
 $MLq \equiv GM : MH$; nun ist $GQ : QH$,
 das ist, $GP : PQ < GM : ML$; mithin auch
 $GPq : PQq < GMq : MLq$; folglich $GP :$
 $PH < GM : MH$, und *dividendo* $GH : HP$
 n 19. 5. $< GH : HM$; folglich n ist $HP > HM$, und
 $GP \times PH$, das ist, $PQq > GM \times MH$, das
 ist, MLq , mithin ist $PQ > ML$. Nun ziehe
 man LR parallel mit GP , und von P richte man
 PR senkrecht über GP auf; weil nun $PQ > ML$
 oder PR , so muß der aus dem Mittelpunkt P
 mit dem Halbmesser PQ beschriebene Kreis, die
 Linie LR in zween Punkten schneiden; sie seyen
 O, S , und man ziehe OG, OH, SG, SH ,
 so hat jedes von den Dreyecken OGH, SGH
 die in dem Satz gegebenen Dinge. Denn man
 ziehe OP ; weil nun $GP : (PQ) PO \equiv PO :$
 PH , so ist $\triangle OGP$ mit $\triangle HOP$ gleichwink-
 lich; mithin ist $OG : GP \equiv HO : OP$, und
permutando $GO : OH \equiv GP : PO \equiv GP :$
 $PQ \equiv GQ : QH$. Folglich ist in dem
 $\triangle OGH$ die Verhältniß der Seiten $GO : OH$
 einerley mit der gegebenen Verhältniß $GQ : QH$,
 und das Loth hat zur Grundlinie die gegebene
 Verhältniß $K : GH$, weil das Loth gleich LM
 oder

oder K ist. Eben dieses läßt sich auf eben die Art von dem $\triangle SGH$ beweisen.

Diese Verzeichnung, wodurch $\triangle OGH$ ist gefunden worden, ist kürzer, als die, welche sich aus dem Beweise des Datum herleiten ließe; weil nämlich die Grundlinie GH der Lage und Größe nach gegeben ist, welches in dem Beweise nicht angenommen war. Eben das ist in dem nächstfolgenden Satze zu bemerken.

Satz LXXXI.

M.

Wenn zwei Seiten eines Dreyecks ungleich sind und eine gegebene Verhältniß zu einander haben, und wenn das von dem eingeschlossenen Winkel auf die Grundlinie gefällte Loth dieselbe in Segmente theilt, die eine gegebene Verhältniß zu einander haben; so ist das Dreyeck der Gattung nach gegeben. Fig. 83.

ABC sey ein Dreyeck, dessen Seiten um den Winkel BAC ungleich seyen, und eine gegebene Verhältniß zu einander haben, und das auf die Grundlinie BC gefällte Loth AD theile dieselbe in die Segmente BD, DC, die eine gegebene Verhältniß zu einander haben; so wird $\triangle ABC$ der Gattung nach gegeben seyn.

Es

- Es sey $AB > AC$, und man mache den Winkel $CAE = ABC$, so werden, wegen des gemeinschaftlichen Winkels AEB , die $\triangle ABE$, CAE gleichwinklicht seyn; folglich a $AB : BE = CA : AE$, und *permutando* $AB : AC = BE : EA = EA : EC$; nun ist $BA : AC$ gegeben, mithin ist $BE : EA$, b $9.$ dat. wie auch $EA : EC$ gegeben, folglich b ist $BE : EC$, c cor. 6. dat. EC , wie auch c $EC : CB$ gegeben; ferner weil d $7.$ dat. $BD : DC$ gegeben ist (*hyp.*) so ist d $BC : CD$ gegeben; mithin b ist $EC : CD$, folglich d auch $DE : EC$ gegeben; nun ist angezeigter maassen $EC : EA$ gegeben, folglich b ist $DE : EA$ gegeben; folglich weil ADE ein rechter Winkel ist, e $46.$ dat. so ist e $\triangle ADE$ der Gattung nach gegeben, und der Winkel AED ist gegeben; mithin, weil $CE : EA$ gegeben ist, so ist f $44.$ dat. $\triangle AEC$ der Gattung nach gegeben, folglich ist ACE , wie auch der Nebenwinkel ACB gegeben. Gleicherweise, weil $BE : EA$ gegeben ist, so ist $\triangle BEA$ der Gattung nach gegeben, mithin ist der Winkel ABE gegeben; und weil der Winkel ACB gegeben ist, g $43.$ dat. so ist g $\triangle ABC$ der Gattung nach gegeben.

Allein die Verhältniß der größern Seite BA zu der andern AC , muß kleiner seyn als die Verhältniß des größern Segments BD zu DC . Denn $BAq : ACq = BDq + DAq : DCq + DAq$; nun ist h $81.$ dat. $BDq + DAq : DCq + DAq$ not. (*)

$\angle BDq : DCq$, weil $BDq > DCq$; mithin
ist $BAq : ACq < BDq : DCq$, folglich BA
: $AC < BD : DC$.

Da diesem so ist, so läßt sich ein Dreyek,
das die in dem Satz gegebenen Dinge haben wird,
und dem das $\triangle BBC$ ähnlich ist, folgender-
maßen finden. Man nehme eine der Lage und
Größe nach gegebene gerade Linie GH , und thei-
le sie in K so, daß $GK : KH$ gleich sey der ge-
gebenen $BA : AC$; ferner theile man GH in L
so, daß $GL : LH$ gleich sey der gegebenen $BD :$
 DC , und richte LM senkrecht über GH auf.
Weil nun, wie gezeigt worden, die Verhältnis-
der Seiten eines Dreyeks kleiner ist, als die Ver-
hältnis der Segmente der Grundlinie, so ist $GK :$
 $KH < GL : LH$, mithin muß der Punct L
zwischen K und H fallen; nun mache man $GK :$
 $KH = GN : NK$, so ist $GN : NK =$ i 19. 5.
 $NK : NH$. Nun beschreibe man aus dem Mita-
telpunct N mit dem Halbmesser NK einen Kreis,
dessen Umfang dem Loth LM in O begegne, und
ziehe OG, OH ; so ist $\triangle OGH$ das gesuchte
Dreyek. Denn weil $GN : (NK) NO = NO :$
 NH , so ist $\triangle OGN$ mit $\triangle HON$ gleichwink-
lich, mithin $OG : GN = HO : ON$, und
permutando $GO : OH = GN : (NO) NK$
 $= GK : KH$, das ist, gleich der gegebenen
Verhältnis der Seiten, und GL, LH haben

3

(con-

(*constr.*) zu einander die gegebene Verhältnisse der Segmente der Grundlinie.

60.

Satz LXXXII.

Wenn ein der Gattung und Größe nach gegebenes Parallelogramm um einen der Größe nach gegebenen Gnomon (*) vermehrt oder vermindert wird; so sind die Seiten des Gnomons der Größe nach gegeben. Fig. 84.

Es werde erstlich das der Gattung und Größe nach gegebene Parallelogr AB um den gegebenen Gnomon ECBDFG vermehrt; so ist jede der geraden Linien CE, DF gegeben.

Weil AB der Gattung und Größe nach, und der Gnomon ECBDFG der Größe nach gegeben ist, so ist der ganze Raum AG der Größe nach gegeben; nun ist AG auch der Gattung nach gegeben, weil es ^a dem Parallelogr AB ähnlich ist, ^b 60. dat. mithin sind ^b die Seiten von AG gegeben; folge

(*) Man muß sich aus 2. def. 2. Elem. erinnern, daß, wenn man durch einen Punkt der Diagonale eines Parallelogrammes Linien zieht, die mit den Seiten parallel sind, der Gnomon drey Parallelogramme begreift, durch deren zwey die Diagonale nicht geht. Uebers.

lich ist jede der geraden Linien AE, AF gegeben; und da jede der Linien CA, AD gegeben ist^b, so ist^c jeder der Reste EC, DF gegeben. ^c 4. dat.

Zweitens werde das, der Gattung und Größe nach, gegebene Prllgr AG um den gegebenen Gnomon ECBDFG vermindert; so wird jede der geraden Linien CE, DF gegeben seyn.

Weil das Prllgr AG, so wie sein Gnomon ECBDFG gegeben ist, so ist der Rest AB der Größe nach gegeben; nun ist er auch der Gattung nach gegeben, weil^a er dem Prllgr AG ähnlich^a [2 def.
2. & 24. 5. ist; mithin^b sind seine Seiten CA, AD gegeben^b [60. dat.; nun ist jede der Linien EA, AF gegeben; folglich ist jede der Linien EC, DF gegeben.

Der Gnomon und seine Seiten CE, DF lassen sich im ersten Fall folgendermaßen finden. Es sey H der gegebene Raum, dem der Gnomon soll gleich gemacht werden, und man finde^d ein ^d 25. 6. Prllgr, das dem AB ähnlich, und den Figuren $AB + H$ gleich sey, und lege seine Seiten AE, AF von dem Punct A auf die geraden Linien AC, AD, und vollende das Prllgr AG, das um eben die Diagonale liegt^e wie AB; weil nun ^e 26. 6. $AG = AB + H$, so wird, wenn man von beyden Seiten AB wegnimmt, der Gnomon ECBDFG gleich H seyn; folglich ist ein der

Figur H gleicher Gnomon, samt seinen Seiten CE und DF gefunden worden. Auf gleiche Weise lassen sich diese Dinge in dem zweyten Falle finden, wo die gegebene Figur H kleiner seyn muß als die Figur FE, wovon sie soll weggenommen werden.

58.

Satz LXXXIII.

Wenn ein Parallelogramm, das einem gegebenen Raume gleich ist, auf einem Segment einer gegebenen geraden Linie steht, und wenn das Parallelogramm, das auf dem andern Segmente steht, und die Verlängerung des ersten ausmacht, der Gattung nach gegeben ist; so sind die Seiten dieses letztern Parallelogrammes gegeben. Fig. 85.

Das Prllgr AC, das einem gegebenen Raume gleich ist, stehe auf dem Segment AD der gegebenen Linie AB, und das Prllgr BDCL, das auf dem andern Segmente DB steht, und die Verlängerung des ersten ist, sey der Gattung nach gegeben; so wird jede der Linien CD, DB gegeben seyn.

Man theile AB in zween gleiche Theile in E, so ist EB der Größe nach gegeben; über EB
a 18. 6. beschreibe man a das Prllgr EF, das dem Prllgr
DL

DL ähnlich sey und ähnlich mit ihm liege; so ist EF der Gattung nach gegeben, und es liegt um eben die Diagonale ^b wie DL. Es sey BCG ^b 26. 6. diese Diagonale, und man verzeichne die Figur; weil nun die der Gattung nach gegebene Figur EF über der gegebenen Linie EB beschrieben ist, so ist ^c EF der Größe nach gegeben, und der ^c 56. dat. Gnomon ELH ist gleich ^d der gegebenen Figur ^d 36 & AC; weil nun ^e EF um den gegebenen Gnomon ^e 43. 1. 82. dat. ELH vermindert ist, so sind die Seiten des Gnomons EK, FH gegeben; nun ist $EK = DC$, und $FH = DB$; folglich sind CD, DB, jede für sich, gegeben.

Dieser Beweis ist die Analysis der Aufgabe des 28ten S. 6. B. und die Verzeichnung und der Beweis dieses Satzes ist die Composition der Analysis; und weil der gegebene Raum AC, oder der ihm gleiche Gnomon ELH, soll weggenommen werden von der Figur EF, die der BC ähnlich und über der Hälfte von AB beschrieben ist, so muß AC nicht größer seyn als EF, wie in dem 27ten S. 6. B. gezeigt worden.

Satz XXXIV.

59.

Wenn ein Parallelogramm, das einem gegebenen Raume gleich ist, auf dem gegebenen

§ 3

nen

nen Segment einer geraden Linie steht, und wenn das Parallelogramm, das auf dem andern Segmente steht und die Verlängerung des ersten ausmacht, der Gattung nach gegeben ist; so sind die Seiten des letztern Parallelogrammes gegeben. Fig. 86.

Das Prllgr AC, das einem gegebenen Raume gleich ist, stehe auf dem gegebenen Segment AB der Linie AD, und das Prllgr BDCL, das auf dem andern Segmente steht, und die Verlängerung des ersten ist, sey der Gattung nach gegeben; so wird jede der Linien CD, DB gegeben seyn.

- Man theile AB in zween gleiche Theile in E, so ist EB der Größe nach gegeben; über EB
- a 18. 6. beschreibe man ^a ein Prllgr EF, das dem Prllgr LD ähnlich sey und ähnlich mit ihm liege; mithin ist EF der Gattung nach gegeben, und es
- b 26. 6. liegt ^b um eben die Diagonale wie LD. Es sey CBG diese Diagonale, und man verzeichne die Figur; weil nun die der Gattung nach gegebene Figur EF über der gegebenen Linie EB beschrieben ist, so ist ^c EF der Größe nach gegeben, und
- c 36. dat. ^d der Gnomon ELH ist gleich ^d der gegebenen Figur AC; weil nun ^e EF um den gegebenen Gnomon ELH vermehrt ist, so sind die Seiten des Gnomons EK, FH gegeben; nun ist $EK =$
- CD,

CD, und $FH = BD$; folglich sind CD, DB, jede für sich, gegeben.

Dieser Beweis ist die Analysis der Aufgabe in dem 29sten S. 6. B. deren Verzeichnung und Beweis die Composition der Analysis ist.

Zusatz. Wenn ein der Gattung nach gegebenes Parallelogramm auf einer geraden Linie steht, wovon ein Segment gegeben ist, und wenn das Parallelogramm, das auf dem andern Segmente steht und einen Theil des ersten ausmacht, einem gegebenen Raume gleich ist: so sind die Seiten des erstern gegeben.

Das der Gattung nach gegebene Parallelogr ADCE stehe auf der geraden Linie AD, wovon das Segment AB gegeben ist, und das Parallelogr BDCG, das auf dem andern Segmente steht, sey einem gegebenen Raume gleich; so werden die Seiten AD, DC des erstern gegeben seyn.

Man ziehe die Diagonale DE des Parallelogr AC, und verzeichne die Figur. Weil nun ^a a 43. I. Parallelogr AK gleich dem gegebenen BC ist, so ist AK gegeben; und weil BK dem AC ähnlich ist ^b b 24. 6. so ist BK der Gattung nach gegeben. Weil demnach das, der Größe nach gegebene Parallelogr AK auf der Linie AD steht, wovon das Segment AB gegeben ist, und das Parallelogr BK,

das auf dem andern Segmente steht, der Sätzung nach gegeben ist; so sind, zu Folge dieses Satzes, BD , DK , die Seiten des letztern Parallelogramms, gegeben; mithin, weil die Linie AB gegeben ist, so ist das Ganze AD , wie auch DC , die zu AD eine gegebene Verhältniß hat, gegeben.

Aufgabe.

An AB , das gegebene Segment einer Linie ein Parallelogramm anzulegen, das einem gegebenen ähnlich, und dessen Theil, der auf dem andern Segmente steht, einem gegebenen Raume gleich sey.

c 29. 6.

An die gegebene Linie AB lege man c das Prllgr AK , das einem gegebenen Raume gleich, und dessen Theil BK einem gegebenen Prllgr ähnlich sey. Man ziehe DF , die Diagonale von BK , und durch den Punct A ziehe man AE parallel mit BF , bis sie der verlängerten DF in E beegne, und vollende das Prllgr AC .

Das Prllgr BC ist gleich a dem AK , das ist, dem gegebenen Raum; und Prllgr AC ist dem BK ähnlich; und dieß ist es was gesucht worden ist.

Ende

Satz LXXXV.

84. 53

Wenn zwei gerade Linien ein der Größe nach gegebenes Parallelogramm unter einem gegebenen Winkel einschließen; so wird, wenn der Unterschied der geraden Linien gegeben ist, jede derselben gegeben seyn. Fig. 87.

AB, BC schließen das der Größe nach gegebene Parallelogramm AC unter dem gegebenen Winkel ABC ein, und $BC - AB$ sey gegeben; so wird jede der Linien AB, BC gegeben seyn.

Es sey $DC = BC - AB$, mithin $BD = BA$. Man vollende das Parallelogramm AD; weil nun $AB = BD$, so ist $AB : BD$ gegeben; und weil der Winkel ABD gegeben ist, so ist das Parallelogramm AD der Gattung nach gegeben; mithin weil das gegebene Parallelogramm AC an dem gegebenen Segment DC liegt, und Parallelogramm AD, das ein Theil davon ist, der Gattung nach gegeben ist, so sind ^a die Seiten dieses letztern gegeben; mithin ^a 84. dat. ist BD gegeben; nun ist DC gegeben, mithin ist das Ganze BC gegeben; und weil auch AB gegeben ist, so ist jede der Linien AB, BC gegeben.

85.

Satz LXXXVI.

Wenn zwei gerade Linien ein der Größe nach gegebenes Parallelogramm unter einem gegebenen Winkel einschließen; so wird, wenn die Summe der geraden Linien gegeben ist, jede derselben gegeben seyn. Fig. 88.

Die zwei geraden Linien AB , BC schließen das der Größe nach gegebene Parallelogr AC unter dem gegebenen Winkel ABC ein, und $AB + BC$ sey gegeben; so wird jede der Linien AB , BC gegeben seyn.

Man verlängere CB und mache $BD = AB$, und vollende das Parallelogr $ABDE$. Weil nun $DB = BA$, und der Winkel ABD , wegen des gegebenen Nebenwinkels ABC , gegeben ist, so ist Parallelogr AD der Gattung nach gegeben; und weil $AB + BC$ gegeben ist, und $AB = BD$, so ist DC gegeben. Weil demnach das gegebene Parallelogr AC auf dem Segment BC der gegebenen Linie DC steht, und das Parallelogr AD , das auf dem andern Segmente DB steht, der Gattung nach gegeben ist, so sind ^a die Seiten AB , BD des letztern gegeben; nun ist DC gegeben, mithin auch der Rest BC ; folglich ist jede der geraden Linien AB , BC gegeben.

Satz

Satz LXXXVII.

87.

Wenn zwei gerade Linien ein der Größe nach gegebenes Parallelogramm, unter einem gegebenem Winkel, einschließen; so wird, wenn der Ueberschuß des Quadrates der größern über das Quadrat der Kleinern gegeben ist, jede der geraden Linien gegeben seyn. Fig. 89.

Die zwei geraden Linien AB, BC schließen ein gegebenes Parallelogr AC unter dem gegebenen Winkel ABC ein; so wird, wenn $BCq - BAq$ gegeben ist, jede der Linien AB, BC, gegeben seyn.

Es sey der gegebene Unterschied $BCq - BAq = CB \times BD$, so ist $BCq - CB \times BD$, das ist, ^a $BC \times CD = BAq$; weil nun der ^a 2. 2. Winkel ABC des Parallelogr AC gegeben ist, so ist ^b b 62. dat. $AB \times BC : AC$ gegeben; nun ist (*hyp.*) AC gegeben, mithin auch $AB \times BC$; ferner ist (*hyp.*) $CB \times BD$ gegeben; mithin ist die Verhältniß $CB \times BD : AB \times BC$, das ist, ^c $DB : c$ 1. 6. BA gegeben; folglich ^d ist $DBq : BAq$ gegeben; ^d 54. dat. nun ist $BAq = BC \times CD$, mithin ist $BC \times CD : BDq$ wie auch $4 BC \times CD : 4 BDq$ gegeben, mithin ist *componendo* ^e $4 BC \times CD : e$ 7. dat. $+ BDq : BDq$ gegeben; nun aber ist ^f $4 BC \times f$ 8. 2.

CD

- $CD + BDq = (BC + CD)q$; folglich ist
 § 58. dat. $(BC + CD)q : BDq$, wie auch § $BC + CD$
 BD gegeben; mithin *componendo* $(BC + CD$
 $+ BD) : 2BC : BD$ gegeben; folglich ist BC
 BD gegeben, wie auch $c BCq : CB \times BD$
 nun ist $CB \times BD = BCq - BAq$, mithin
 gegeben, folglich ist BCq und BC gegeben; nun
 ist $BC : BD$, wie auch $BD : BA$ gegeben;
 h 9. dat. folglich ist $h BC : BA$ gegeben; nun ist BC ge-
 geben, folglich ist BA gegeben.

Dieser Beweis ist die Analysis der folgenden Aufgabe.

Wenn ein Parallelogramm AC , das einen gegebenen Winkel ABC hat, der Größe nach gegeben ist, und wenn der Ueberschuß des Quadrates einer seiner Seiten BC , über das Quadrat der andern BA gegeben ist; die Seiten zu finden. Die Composition ist folgende.

Es sey EFG der gegebene Winkel, dem der Winkel ABC gleich seyn soll; und von irgend einem Punct E in FE falle man EG senkrecht auf FG ; nun sey $EG \times GH$ der gegebene Raum, dem das Parallelogramm AC soll gleich gemacht werden; und $HG \times GL$ der gegebene Unterschied $BCq - BAq$.

Auf dem Loth GE nehme man $GK = FE$,
 und $GM = 2 GK$; dann ziehe man ML , und
 in der verlängerten GL nehme man $LN =$
 LM ; man theile GN in O in zween gleiche Thei-
 le, und zwischen GH und GO finde man eine
 mittlere Proportional-Linie BC ; dann mache man
 $OG : GL = CB : BD$, und den Winkel
 $CBA = GFE$, und $LG : GK = DB : BA$,
 und vollende das Prallgr AC ; so ist $AC =$
 $EG \times GH$, und $CBq - BAq = HG \times GL$.

Denn weil $CB : BD = OG : GL$, so
 ist ^a $CBq : CB \times BD = HG \times GO : HG \times$ ^a 1. 6.
 GL ; nun ist, weil $GO : BC = BC : GH$,
 $CBq = HG \times GO$, mithin ist ^b $CB \times BD$ ^b 14. 5.
 $= HG \times GL$. Und weil $CB : BD = OG :$
 GL , so ist $2CB : BD = (2OG) GN : GL$,
 und *dividendo* $BC + CD : BD = (NL)$
 $LM : LG$; folglich ^c $(BC + CD)q : BDq$ ^c 22. 6.
 $= MLq : LGq$; nun ist $(BC + CD)q =$
 $4BC \times CD + BDq$ ^d, mithin ist $4BC \times CD$ ^d 8. 2.
 $+ BDq : BDq = MLq : LGq$, und *divi-*
dendo $4BC \times CD : BDq = MGq : GLq$;
 folglich ist $BC \times CD : BDq = (\frac{1}{4}MGq)$
 $KGq : GLq$, das ist, $= ABq : BDq$, weil
 $LG : GK = DB : BA$ gemacht worden ist;
 folglich ist ^b $BC \times CD = ABq$; auf beyden
 Seiten addire man $CB \times BD$, so wird CBq
 $= ABq + CB \times BD$; mithin ist $CBq -$
 ABq

$ABq = CB \times BD$, das ist, dem gegebenen
 $HG \times GL$. Nun fälle man von dem Punct A
 das Loth AP auf BC, so ist, weil der Winkel
 $ABP = EFG$, das $\triangle ABP$ mit dem $\triangle EFG$
 gleichwinklicht; nun ist $DB : BA = LG : GK$
 gemacht worden, mithin ist $CB \times BD : CB \times$
 $BA = HG \times GL : HG \times GK$, nun ist $CB \times$
 $BA : AP \times BC = (BA : AP = (FE)$
 $GK : EG =) HG \times GK : HG \times GE$; folg-
 lich *ex æquo*, $CB \times BD : AP \times BC = HG$
 $\times GL : HG \times GE$; nun ist $CB \times BD =$
 $HG \times GL$, folglich ist $AP \times BC$, das ist,
 Prillgr AC gleich dem gegebenen Rechteck EG
 $\times GH$.

N.

Satz LXXXVIII.

Wenn zwei gerade Linien ein der Größe
 nach gegebenes Parallelogramm unter einem
 gegebenen Winkel einschließen; so wird, wenn
 die Summe der Quadrate seiner Seiten gege-
 ben ist, jede dieser Seiten gegeben seyn.
 Fig. 90.

Die zwei geraden Linien AB, BC schließen
 das der Größe nach gegebene Prillgr ABCD un-
 ter dem gegebenen Winkel ABC ein, und AB^2
 $+ BC^2$ sey gegeben; so wird jede der Linien
 AB, BC gegeben seyn,

Es sey erstlich ABC ein rechter Winkel. Nun ist zweymal das von zwey gleichen Linien eingeschlossene Rechteck gleich der Summe ihrer Quadrate; sind aber die zwey Linien ungleich, so ist zweymal das von ihnen eingeschlossene Rechteck kleiner als die Summe ihrer Quadrate, wie aus dem 7ten S. 2. B. Elem. erhellt; demnach muß zweymal der gegebene Raum, dem das Rechteck, dessen Seiten zu finden sind, gleich ist, nicht größer seyn als die gegebene Summe der Quadrate der Seiten: und wenn zweymal dieser Raum gleich ist der gegebenen Summe der Quadrate, so müssen die Seiten des Rechtecks nothwendigerweise einander gleich seyn; in diesem Fall also beschreibe man ein Quadrat $ABCD$ gleich dem gegebenen Rechteck, so werden AB , BC die gesuchten Seiten seyn; denn das Rechteck AC ist dem gegebenen Raume gleich, und $ABq + BCq = 2AB \times BC$, das ist, (*hyp.*) gleich dem gegebenen Raum, dem die Summe der Quadrate gleich seyn sollte.

Ist aber zweymal das gegebene Rechteck nicht gleich der gegebenen Summe der Quadrate der Seiten, so muß es, wie gezeigt worden, kleiner seyn. Es sey $ABCD$ das Rechteck; man vereinige AC , und ziehe BE senkrecht darauf, und vollende das Rechteck $AEBF$; dann beschreibe man den Kreis ABC um das $\triangle ABC$, so ist a

a Cor. 5. 4.

AC

- AC sein Durchmesser; und weil $\triangle ABC$ dem
 b 8. 6. $\triangle AEB$ ähnlich ist, b so ist $AC : CB = AB : BE$, mithin ist $AC \times BE = AB \times BC$; nun ist $AB \times BC$ gegeben, folglich auch $AC \times BE$,
 c 47. 1. und weil $ABq + BCq$ gegeben ist, so ist e ACq gegeben, mithin ist AC selbst der Größe nach gegeben. Nun sey AC auch der Lage nach gegeben.
 d 32. dat. ben, so ist d AF der Lage nach gegeben; ferner weil, wie gezeigt worden, $AC \times BE$, gegeben
 e 61. dat. ist, und AC gegeben ist, so ist e BE oder AF der Größe nach gegeben; nun ist AF auch der Lage nach gegeben, mithin weil der Punct A gegeben ist, so ist f der Punct F gegeben, und die
 f 30. dat. Linie FB ist g der Lage nach gegeben; nun ist der
 g 31. dat. Umfang ABC der Lage nach gegeben, folglich h
 h 28. dat. ist der Punct B gegeben; nun sind auch die Puncte A, C gegeben; folglich i sind die geraden Linien AB, BC der Lage und Größe nach gegeben.

Die Seiten AB, BC des Rechteks lassen sich folgendermaßen finden. Es sey $GH \times GK$ der gegebene Raum, dem das Rechtek $AB \times BC$ gleich sey; und $GH \times GL$ sey das gegebene Rechtek, dem die Summe $ABq + BCq$ gleich sey. Nun finde man k ein Quadrat, das dem Rechtek, $GH \times GL$ gleich sey, und AC, die Seite dieses Quadrats, sey der Lage nach gegeben; über AC, als dem Durchmesser, beschreibe man den halben Kreis ABC, und mache $AC : GH =$

$\text{--- GK} : \text{AF}$, und von dem Punct A setze
 man AF senkrecht auf AC; demnach ist^l $\text{CA} \times \text{AF} = \text{GH} \times \text{GK}$, und (*hyp.*) $2 \text{GH} \times \text{GK} < \text{GH} \times \text{GL}$, das ist, ACq , folglich
 $2 \text{CA} \times \text{AF} < \text{ACq}$, und $\text{CA} \times \text{AF} < \frac{1}{2} \text{ACq}$, das ist, $\text{AC} \times \frac{1}{2} \text{AC}$; mithin ist AF
 kleiner als der Halbmesser des Kreises, folglich
 muß die, durch den Punct F mit AC parallel
 gezogene Linie dem Umfang in zween Puncten
 begegnen; einer davon sey B, und man ziehe
 AB, BC, und vollende das Rechteck ABCD;
 so ist ABCD das gesuchte Rechteck. Denn man
 ziehe BE senkrecht auf AC, so ist^m $\text{BE} = \text{AF}$, und weil der Winkel ABC in dem halben
 Kreis ein rechter ist, so ist^b $\text{AB} \times \text{BC} = \text{AC} \times \text{BE}$, das ist, $\text{CA} \times \text{AF}$, welches dem
 gegebenen $\text{GH} \times \text{GK}$ gleich ist; und^c $\text{ABq} + \text{BCq} = \text{ACq}$, das ist, gleich dem gegebenen
 Rechteck $\text{GH} \times \text{GL}$.

Wenn aber der gegebene Winkel ABC des
 Prllgr AC kein rechter Winkel ist, so ist in
 diesem Fallⁿ, weil ABC ein gegebener Winkelⁿ 62. dat.
 ist, $\text{AB} \times \text{BC} : \text{AC}$ gegeben, nun ist Prllgr
 AC gegeben, mithin ist $\text{AB} \times \text{BC}$ gegeben;
 und weil $\text{ABq} + \text{BCq}$ gegeben ist, so ist, nach
 dem vorhergehenden Fall, jede der Seiten AB,
 BC gegeben.

R

Die

Die Seiten AB, BC, und das Prllgr AC lassen sich folgendermaassen finden. Es sey EFG der gegebene Winkel des Prllgr, und von irgend einem Punct E in FE fälle man EG senkrecht auf FG. Nun sey EG $\times$ FH der gegebene Raum, dem das Prllgr gleich gemacht werden soll, und EF $\times$ FK sey das gegebene Rechteck, dem die Summe der Quadrate der Seiten gleich seyn soll; und man finde nach dem vorhergehenden Fall, die Seiten eines Rechtecks, das gleich sey dem gegebenen EF $\times$ FH, und worinn die Summe der Quadrate seiner Seiten gleich sey dem gegebenen EF $\times$ FK; demnach, wie in diesem Fall gezeigt worden, muß 2 EF $\times$ FH nicht größer seyn als EF $\times$ FK. Dem sey so, und AB, BC seyen die Seiten des Rechtecks, unter dem Winkel ABC, gleich dem gegebenen EFG, zusammengesetzt; und man vollende das Prllgr ABCD, welches das gesuchte Prllgr seyn wird.

Demn man fälle AL senkrecht auf BC; weil nun der Winkel ABL = EFG, so ist $\triangle ABL$ mit $\triangle EFG$ gleichwinklicht; und Prllgr AC, das ist, $AL \times BC : AB \times BC = (AL : AB = EG : EF =) EG \times FH : EF \times FH$; nun ist (*constr.*) $AB \times BC = EF \times FH$, folglich ist $AL \times BC$, das ist, Prllgr AC

AC — dem gegebenen $EG \times FH$; und
 (constr.) $ABq + BCq$ — dem gegebenen
 $EF \times FK$.

Satz LXXXIX.

80.

Wenn zwei gerade Linien ein gegebenes Parallelogramm unter einem gegebenen Winkel einschließen, und wenn der Ueberschuß des Quadrates der einen davon über einen gegebenen Raum, eine gegebene Verhältniß hat zu dem Quadrat der andern; so wird jede der geraden Linien gegeben seyn. Fig. 91.

Die zwei geraden Linien AB, BC schließen das gegebene Parallelogr AC unter dem gegebenen Winkel ABC ein, und der Ueberschuß des Quadrates von BC über einen gegebenen Raum habe eine gegebene Verhältniß zu dem Quadrat von AB ; so wird jede der Linien AB, BC gegeben seyn.

Weil der Ueberschuß des Quadrates von BC über einen gegebenen Raum eine gegebene Verhältniß hat zu dem Quadrat von BA , so wird, wenn $CB \times BD$ der gegebene Raum ist, $BCq - CB \times BD$, das ist $BC \times CD$ eine a 2. 2.

R 2

ge-

- gegebene Verhältniß zu BAq haben. Nun fällt man AE senkrecht auf BC , und setze $BFq = BC \times CD$; weil nun der Winkel ABC , auch BEA gegeben ist, so ist $b \triangle ABE$ Gattung nach gegeben, und $AE : AB$ ist gegeben; und weil $(BC \times CD, \text{ das ist, }) BFq$
- b 43. dat.** BAq gegeben ist, so ist $c BF : BA$ gegeben.
- c 58. dat.** nun ist $AE : AB$ gegeben, mithin d ist AE
- d 9. dat.** BF gegeben, wie auch $(AE \times BC, \text{ das ist, })$
- e 35. I.** $AC : FB \times BC$; nun ist AC gegeben, folglich ist $FB \times BC$ gegeben. Nun ist $BCq - BEq$, das ist, $BCq - BC \times CD$ gegeben, weil es a gleich dem gegebenen $CB \times BD$ ist, folglich weil $FB \times BC$, wie auch $BCq - BEq$
- f 87. dat.** gegeben ist, so ist f jede der Linien FB, BC gegeben; und weil $FB : BA$ gegeben ist, so sind AB, BC gegeben.

Die Composition ist folgende.

Es sey $G HK$ der gegebene Winkel, den der Winkel des Prillgr gleich gemacht werden soll, und von irgend einem Punct G in HG fällt man GK senkrecht auf HK . Nun sey $GKHL$ das Rechteck, dem das Prillgr gleich gemacht werden soll, und $LH \times HM$ sey das Rechteck, das dem gegebenen Raum gleich ist, und von dem Quadrat einer der Seiten soll weggenommen

werden; und die Verhältniß des Restes zu dem Quadrat der andern Seite sey gleich der Verhältniß des Quadrates der gegebenen Linie NH zu dem Quadrat der gegebenen Linie HG .

Nun finde man durch Hülfe des 87sten S. dat. zwei gerade Linien BC , BF , die ein dem gegebenen $NH \times HL$ gleiches Rechteck einschließen, so daß $BCq - BFq$ gleich sey dem gegebenen $LH \times HM$, und füge CB , BF unter dem Winkel FBC gleich dem gegebenen GHK , zusammen; alsdann mache man $NH : HG = FB : BA$, und vollende das Parallelogr AC , und falle AE senkrecht auf BC ; so ist Parallelogr $AC = GK \times HL$; und $BCq - LH \times HM : BAq = NHq : HGq$.

Denn weil (*constr.*) $BCq = BFq + LH \times HM$, so ist $BCq - LH \times HM = BFq$; nun ist g , weil $NH : HG = FB : g$ 22. 6. BA gemacht worden, $BFq : BAq = NHq : HGq$, folglich ist $BCq - LH \times HM : BAq = NHq : HGq$.

Ferner weil $\triangle GHK$ mit $\triangle ABE$ gleichwinklig ist, so ist $HG : GK = BA : AE$, und vorhin $NH : HG = FB : BA$, mithin *ex æquo* $NH : GK = FB : AE$; folglich h h 1. 3. $NH \times HL : GK \times HL = FB \times BC : AE$

$\times BC$; nun ist (*constr.*) $NH \times HL = FB$
 k 14. 5. $\times BC$, folglich $GK \times HL = AE \times BC$,
 das ist, $=$ Prllgr AC.

Die Analysis dieser Aufgabe hätte können gemacht werden, wie in dem 86sten S. des griechischen Textes, und die Composition davon läßt sich bewerkstelligen wie die, die sich in dem 87sten S. dieser Ausgabe findet.

O.

Satz XC.

Wenn zwei gerade Linien ein gegebenes Parallelogramm unter einem gegebenen Winkel einschließen, und wenn das Quadrat der einen davon samt dem Raum, der eine gegebene Verhältniß zu dem Quadrat der andern hat, gegeben ist; so wird jede der geraden Linien gegeben seyn. Fig. 92.

Die zwei geraden Linien AB, BC schließen das gegebene Prllgr AC unter dem gegebenen Winkel ABC ein, und BC q samt dem Raum, der eine gegebene Verhältniß zu AB q hat, gegeben; so wird jede der Linien AB, BC gegeben seyn.

Es sey BDq der Raum, der die gegebene Verhältniß zu ABq hat; mithin ist (*hyp.*) $BCq + BDq$ gegeben. Von dem Punct A fälle man AE senkrecht auf BC ; demnach weil die Winkel ABE, BEA gegeben sind, so ist a a 43. dat. $\triangle ABE$ der Gattung nach gegeben, mithin ist $BA : AE$ gegeben; und weil $BDq : BAq$ gegeben ist, so ist b $BD : BA$ gegeben, mithin c b 58. dat. c 9. dat. ist $AE : BD$ gegeben, wie auch ($AE \times BC$, das ist,) $AC : DB \times BC$; nun ist (*hyp.*) AC gegeben, mithin ist $DB \times BC$ gegeben; und weil auch $BCq + BDq$ gegeben ist, so d d 88. dat. ist jede der Linien DB, BC gegeben; folglich weil $DB : BA$ gegeben ist, so sind AB, BC gegeben.

Die Composition ist folgende.

Es sey FGH der gegebene Winkel, dem der Winkel des Prllgr soll gleich gemacht werden; und von irgend einem Punct F in GF fälle man FH senkrecht auf GH ; und $FH \times GK$ sey das Rechteck, dem das Prllgr soll gleich gemacht werden; und $KG \times GL$ sey der Raum, dem das Quadrat von einer der Seiten des Prllgr samt dem Raum, der eine gegebene Verhältniß zu dem Quadrat der andern Seite hat, soll gleich gemacht werden; und diese gegebene

Verhältnis sey eben die, die das Quadrat der gegebenen Linie $M G$ zu dem Quadrat von $G F$ hat.

Aus dem 88sten S. dat. finde man zwei gerade Linien $D B, B C$, die ein, dem gegebenen $M G \times G K$ gleiches Rechtek einschließen, so daß $D B q + B C q$ gleich sey dem gegebenen $K G \times G L$; mithin, vormöge der Bestimmung der Aufgabe in jenem Satz, muß $2 M G \times G K$ nicht größer seyn als $K G \times G L$. Dem sey so, und man füge die Linien $D B, B C$ unter dem Winkel $D B C$ gleich dem gegebenen $F G H$, zusammen, und mache $M G : G F = D B : B A$, und vollende das Prüllgr $A C$; so ist $A C = F H \times G K$, und $B C q$ samt $B D q$, das (*constr.*) zu $B A q$ die gegebene Verhältnis hat, die $M G q$ zu $G F q$ hat, ist (*constr.*) gleich dem gegebenen Rechtek $K G \times G L$.

Man falle $A E$ senkrecht auf $B C$. Weil nun $D B : B A = M G : G F$ (*constr.*) und $B A : A E = G F : F H$, so ist *ex aequo* $D B : A E = M G : F H$; mithin $D B \times B C : A E \times B C = M G \times G K : F H \times G K$; nun ist $D B \times B C = M G \times G K$, folglich $A E \times B C$, das ist, Prüllgr $A C = F H \times G K$.

Satz

Satz XCI.

88.

Wenn eine gerade Linie, in einem der Größe nach gegebenen Kreise gezogen, einen Kreis = Abschnitt begränzt, der eines gegebenen Winkels fähig ist; so ist die gerade Linie der Größe nach gegeben. Fig. 93.

In dem, der Größe nach, gegebenen Kreise ABC sey die gerade Linie AC gezogen, und begränze den Kreis = Abschnitt AEC, der eines gegebenen Winkels fähig sey; so ist die gerade Linie AC der Größe nach gegeben.

Man finde D den Mittelpunct des Kreises a, und durch D ziehe man AE, und verleihe EC; so ist b der Winkel ACE ein rechter, b 31. 3. mithin gegeben; und weil auch der Winkel AEC gegeben ist (hyp.) so ist c $\triangle ACE$ der Gattung c 43. dat. nach gegeben, und EA : AC ist gegeben; nun ist d EA der Größe nach gegeben, weil der Kreis d 5. def. der Größe nach gegeben ist; folglich e ist AC e 2. dat. der Größe nach gegeben.

Satz XCII.

89.

Wenn eine der Größe nach gegebene gerade Linie in einem der Größe nach gegebenen

K 5

gez

gegebenen Kreise gezogen ist; so begränzt sie einen Kreis-Abschnitt, der eines gegebenen Winkels fähig ist. Fig. 94.

Die der Größe nach gegebene gerade Linie AC sey in dem, der Größe nach gegebenen Kreise ABC gezogen; so wird sie einen Kreis-Abschnitt begränzen, der eines gegebenen Winkels fähig ist.

Man finde D den Mittelpunkt des Kreises, und durch D ziehe man AE , und vereinige EC ; weil nun jede der Linien EA , AC gegeben ist, so ist a ihre Verhältniß gegeben; mithin, weil b $\triangle ACE$ ein rechter Winkel ist, so ist b $\triangle ACE$ der Gattung nach gegeben, folglich ist der Winkel AEC gegeben.

a 1. dat.

b 46. dat.

90.

Satz LCIII.

Wenn von irgend einem Punct in dem Umfang eines der Lage nach gegebenen Kreises zwei gerade Linien gezogen werden, die dem Umfang begegnen, und einen gegebenen Winkel einschließen; so wird, wenn der Punct, worin die eine dem Umfang begegnet, gegeben ist, auch der Punct, worin die andere demselben begegnet, gegeben seyn. Fig. 95.

Von irgend einem Punct A in dem Umfang des, der Lage nach gegebenen Kreises ABC, seyen AB, AC an den Umfang gezogen, und machen den gegebenen Winkel BAC; so wird, wenn der Punct B gegeben ist, auch der Punct C gegeben seyn.

Man nehme D den Mittelpunct des Kreises, und ziehe BD, DC; weil nun jeder der Puncte B, D gegeben ist, so ist ^a BD der Lage nach gegeben; und weil der Winkel BAC gegeben ist, so ist ^b der Winkel BDC gegeben; mithin weil ^b 20 3. die Linie DC an den gegebenen Punct D in der, der Lage nach gegebenen Linie BD, unter dem gegebenen Winkel BDC gezogen ist, so ist ^c DC ^c 32. dat. der Lage nach gegeben; nun ist (*hyp.*) der Umfang ABC der Lage nach gegeben, folglich ^d ist ^d 28. dat. der Punct C gegeben.

Satz XCIV.

91.

Wenn von einem gegebenen Punct eine gerade Linie gezogen wird, die einen der Lage nach gegebenen Kreis berührt; so ist die gerade Linie der Lage und Größe nach gegeben. Fig. 96.

Die

Die gerade Linie AB, von dem gegebenen Punct A gezogen, berühre den, der Lage nach gegebenen Kreis BC; so wird AB der Lage und Größe nach gegeben seyn.

Man finde D, den Mittelpunct des Kreises, und ziehe DA, DB; weil nun jeder der
 a 29. dat. Puncte D, A gegeben ist, so ist ^a die gerade Linie AD der Lage und Größe nach gegeben; und
 b 18. 3. weil DBA ein rechter Winkel ist ^b, so ist ^c DA
 c Cor. 5. 4. ein Durchmesser des, um das $\triangle DBA$ beschriebenen Kreises DBA, und dieser Kreis ist daher ^d
 d 6. def. der Lage nach gegeben; nun ist auch der
 e 28. dat. Kreis BC der Lage nach gegeben, folglich ist der Punct B gegeben; und weil auch der Punct A gegeben ist, so ist ^a die gerade Linie AB der Lage und Größe nach gegeben.

92.

Satz XCV.

Wenn von einem gegebenen Punct außerhalb eines der Lage nach gegebenen Kreises, eine gerade Linie gezogen wird, die den Umfang des Kreises in zween Puncten schneidet; so wird das Rechteck, das durch die, zwischen dem gegebenen Punct und den Puncten des Umfanges liegende Linien formirt wird, gegeben seyn, Fig. 97.

Von

Von dem Punct A aufferhalb des, der Lage nach gegebenen Kreises B C D sey die gerade Linie A B C gezogen, die den Umfang in den Puncten B, C schneide; so wird $BA \times AC$ gegeben seyn.

Von dem Punct A ziehe man ^a A D, die ^a 17. 3. den Kreis berühre; mithin ^b ist A D der Lage ^b 94. dat. und Größe nach gegeben; weil demnach A D gegeben ist, so ist ^c A D q gegeben; nun ist ^d A D q ^c 56. dat. ^d 36. 3. $\equiv BA \times AC$; folglich ist $BA \times AC$ gegeben.

Satz XCVI.

93.

Wenn durch einen gegebenen Punct in einem der Lage nach gegebenen Kreis eine gerade Linie gezogen wird; so ist das Rechteck, das durch die, zwischen dem Punct und dem Umfang liegenden Segmente formirt wird, gegeben. Fig. 98.

Durch den Punct A innerhalb des, der Lage nach gegebenen Kreises B C E sey die gerade Linie B A C gezogen; so ist $BA \times AC$ gegeben.

Man

- Man nehme D den Mittelpunct des Krei-
 ses, ziehe AD, und verlängere sie bis zu den
 Puncten E, F. Weil nun die Puncte A, D
 gegeben sind, so ist ^a AD der Lage nach gege-
 ben, und weil (*hyp.*) der Kreis BEC der Lage
 nach gegeben ist, so sind ^b die Puncte E, F ge-
 geben; nun ist der Punct A gegeben, mithin ^a
 ist jede der Linien EA, AF gegeben, folglich
 ist EA $\times$ AF gegeben, folglich auch das ihm
 gleiche ^c Rechteck BA $\times$ AC.

94.

Satz LCVII.

Wenn in einem der Größe nach gegeben-
 en Kreis eine gerade Linie gezogen wird,
 die einen, eines gegebenen Winkels fähigen,
 Abschnitt begränzt; so wird, wenn der Win-
 kel in dem Abschnitt, durch eine bis an den
 Umfang verlängerte gerade Linie in zweien
 gleiche Theile getheilt wird, die Summe der,
 den gegebenen Winkel einschließenden Linien
 eine gegebene Verhältniß zu der theilenden
 Linie haben: und das Rechteck, das durch
 die Summe der einschließenden Linien, und
 das, unter der Grundlinie des Abschnittes
 liegende Segment der theilenden Linie for-
 mirt ist, wird gegeben seyn. Fig. 99.

Die

Die gerade Linie BC , in dem, der Größe nach gegebenen, Kreis ABC begränze einen, des gegebenen Winkels BAC fähigen Abschnitt, und der Winkel BAC werde durch die gerade Linie AD in zween gleiche Theile getheilt; so wird $BA + AC : AD$, wie auch das Rechtek $(BA + AC) \times ED$ gegeben seyn.

Man ziehe BD ; weil nun BC in dem der Größe nach gegebenen Kreis ABC einen Abschnitt BAC begränzt, der eines gegebenen Winkels BAC fähig ist, so ist ^a BC der Größe nach ^a 91. dat. gegeben; aus eben dem Grund ist BD gegeben; mithin ^b ist $BC : BD$ gegeben; und weil der ^b 1. dat. Winkel BAC durch AD in zween gleiche Theile getheilt ist, so ist ^c $BA : AC = BE : EC$, ^c 3. 6. und *permutando* $AB : BE = AC : CE$, mithin ^d $BA + AC : BC = AC : CE$; ^d 12. 5. und weil der Winkel $BAE = EAC$, und ^e ^e 21. 3. der Winkel $ACE = ADB$; so ist $\triangle ACE$ mit dem $\triangle ADB$ gleichwinklicht; mithin ist $AC : CE = AD : DB$; nun ist $AC : CE = BA + AC : BC$, folglich $BA + AC : BC = AD : DB$, und *permutando* $BA + AC : AD = BC : DB$; nun ist $BC : DB$ gegeben, folglich ist auch $BA + AC : AD$ gegeben.

Zwey-

Zweytens ist das Rechtek $(BA + AC) \times DE$ gegeben. Denn weil $\triangle BDE$ gleichwinklicht ist mit dem $\triangle ACE$, so ist $BD:DE = AC:CE$, nun ist $AC:CE = BA+AC:BC$, mithin ist $BA + AC : BC = BD:DE$, folglich ist $(BA + AC) \times DE = CB \times BD$; nun ist $CB \times BD$ gegeben, folglich ist $(BA + AC) \times DE$ gegeben.

Underer Beweis.

Man verlängere CA und mache $AF =$
 25 & 32. I. AB , und ziehe BF ; weil nun a der Winkel BAC doppelt so groß ist, als jeder der Winkel BFA, BAD , so ist $BFA = BAD$; nun ist auch $BCA = BDA$, mithin ist $\triangle FCB$ gleichwinklicht mit dem $\triangle ADB$; folglich ist $FC:CB = AD:DB$, und *permutando*, $(FC, \text{ das ist, }) BA + AC : AD = CB:BD$; nun ist $CB:BD$ gegeben, folglich ist $BA + AC : AD$ gegeben.

Und weil der Winkel $BFC = DAC$, das ist, DBC , und der Winkel $ACB = ADB$, so ist $\triangle FCB$ gleichwinklicht mit dem $\triangle BDE$; mithin ist $(FC) BA + AC : CB = BD:DE$; folglich ist $(BA + AC) \times DE = CB \times BD$, welches gegeben ist, folglich ist $(BA + AC) \times DE$ gegeben.

Q.E.D.

Satz XCVIII.

P.

Wenn in einem der Größe nach gegebenen Kreis eine gerade Linie gezogen wird, die einen, eines gegebenen Winkels fähigen Kreis = Abschnitt begränzt, und wenn der Nebenwinkel des Winkels im Abschnitt, durch eine gerade Linie, die dem Umfang aufs neu und der Grundlinie des Abschnittes begegnet, in zween gleiche Theile getheilt wird; so wird der Unterschied der, den gegebenen Winkel einschliessenden Linien eine gegebene Verhältniß zu dem, im Kreise liegenden Segment der theilenden Linie haben: und das Rechteck, das durch eben diesen Unterschied und die theilende, zwischen der verlängerten Grundlinie und dem zweyten Punct des Umfanges liegende Linie formirt wird, wird gegeben seyn. Fig. 100.

In dem der Größe nach gegebenen Kreis ABC begränze die gerade Linie BC einen, des gegebenen Winkels BAC fähigen Kreis = Abschnitt, und CAF , der Nebenwinkel von BAC , werde durch die gerade Linie DAE , die dem Umfang aufs neu in D , und der verlängerten BC in E begegnet, in zween gleiche

2 Theile

Theile getheilt; so wird die Verhältniß $(BA - AC) : AD$, wie auch das Rechteck $(BA - AC) \times ED$, gegeben seyn.

a 9I. dat.

Man ziehe BD , und durch B ziehe man BG parallel mit DE , bis sie der verlängerten AC in G begegne; weil nun BC in dem der Größe nach gegebenen Kreis ABC den Abschnitt BAC begränzt, der eines gegebenen Winkels fähig ist, so ist a BC der Größe nach gegeben. Aus eben dem Grund ist BD gegeben, weil der Winkel BAD dem gegebenen EAF gleich ist; mithin ist $BC : BD$ gegeben; und weil der Winkel $CAE = EAF$, wovon CAE gleich ist dem Wechselwinkel AGB , und EAF gleich dem innern entgegengesetzten ABG , so ist $AGB = ABG$, und $AB = AG$, mithin ist GC der Unterschied zwischen AB und AC . Wenn nun der Winkel $BGC = GAE$, das ist EAF oder BAD ; und BGC ist gleich dem innern entgegengesetzten Winkel BDA des im Kreis beschriebenen Vierecks $BCAD$; so ist $\triangle BGC$ gleichwinklicht mit dem $\triangle BDA$; folglich ist $GC : CB = AD : DB$, und *permutando* GC , das ist, $(AB - AC) : AD = CB : DB$; nun ist $CB : BD$ gegeben, folglich ist $(AB - AC) : AD$ gegeben.

Zwey

Zweitens weil der Winkel GBC gleich ist dem Wechselwinkel DEB , und $BCG = BDE$, so ist $\triangle BCG$ gleichwinklicht mit dem $\triangle BDE$; mithin $GC : CB = BD : DE$, folglich ist $GC \times DE = CB \times BD$, weil nun CB, BD gegeben sind, so ist $CB \times BD$, mithin auch $GC \times DE$, das ist, $(AB - AC) \times DE$ gegeben.

Satz XCIX.

95.

Wenn von einem gegebenen Punct in dem Durchmesser eines der Lage nach gegebenen Kreises, oder in dem verlängerten Durchmesser, eine gerade Linie an irgend einen Punct des Umfanges, und von diesem Punct eine gerade Linie senkrecht auf die erstere, und von dem Punct, worin diese dem Umfang wiederum begegnet, eine gerade Linie mit der ersten parallel gezogen wird; so wird der Punct, worin die Parallel-Linie dem Durchmesser begegnet, gegeben seyn; und das, durch die zwei Parallel-Linien formirte Rechteck wird gegeben seyn.
Fig. 101.

In BC dem Durchmesser des der Lage nach gegebenen Kreises ABC , oder in der verlängerten BC , werde der gegebene Punct D genommen, und von D werde eine gerade Linie DA an irgend einen Punct A in dem Umfang, und AE werde senkrecht auf DA , und von E , wo diese dem Umfang wiederum begegnet, werde EF mit DA parallel gezogen, und begegne BC in F ; so ist der Punct F , wie auch AD & EF gegeben.

Man verlängere EF bis an den Umfang in G , und ziehe AG ; weil nun GEA ein rechter Winkel ist, so ist ^a AG der Durchmesser des Kreises ABC , und eben so ist BC einer; mithin ist der Punct H , wo sie einander begegnen, der Mittelpunkt des Kreises, folglich ist H gegeben; nun ist der Punct D gegeben, mithin ist DH der Größe nach gegeben; und weil AD mit FG parallel ist, und $GH = HA$, ist ^b $DH = HF$, und $AD = GF$; mithin ist DH gegeben, mithin ist HF der Größe nach gegeben; nun ist sie auch der Lage nach gegeben, folglich ^c ist der Punct F gegeben.

Zweytens weil die gerade Linie EF von einem gegebenen Punct F in oder außerhalb eines, der Lage nach gegebenen Kreises ABC

gezogen ist, so ist a das Rechteck $EF \times FG$ d 95. oder
 gegeben; nun ist $GF = AD$, folglich ist $96.$ dat.
 $AD \times EF$ gegeben.

Satz C.

2.

Wenn von einem gegebenen Punct in
 einer der Lage nach gegebenen geraden Li-
 nie, an irgend einen Punct im Umfang ei-
 nes der Lage nach gegebenen Kreises eine
 gerade Linie und von diesem Punct eine an-
 dere gerade Linie, gezogen wird, die mit der
 erstern einen Winkel macht, der gleich ist
 dem Unterschied eines Rechten und desjeni-
 gen Winkels, welcher von der, der Lage
 nach gegebenen, und der, zwischen dem ge-
 gebenen Punct und dem Mittelpuncte des
 Kreises liegenden geraden Linie formirt wird;
 wenn ferner von dem Punct, worin die
 zweyte Linie dem Umfang wiederum begeg-
 net, eine dritte gezogen wird, die mit der
 zweyten einen Winkel macht, welcher gleich
 ist dem, den die erste mit der zweyten macht:
 so ist der Punct, worin diese dritte Linie der,
 der Lage nach gegebenen Linie begegnet, ge-
 geben; und das Rechteck, formirt durch die erste
 und das Segment der dritten, das zwischen dem
 Umfang und der, der Lage nach gegebenen

geraden Linie liegt, ist gleicherweise gegeben. Fig. 102.

Die gerade Linie CD werde von dem gegebenen Punct C in der, der Lage nach gegebenen geraden Linie AB an den Umfang des, der Lage nach gegebenen Kreises DEF , dessen Mittelpunct G ist, gezogen; man verbinde CG , und ziehe von dem Punct D die Linie DF , so daß der Winkel CDF gleich ist dem Unterschied zwischen einem rechten und dem Winkel BCG ; und von dem Punct F ziehe man FE so daß sie den Winkel $DFE = CDF$ macht, und der Linie AB in H begegnet: so wird der Punct H , wie auch das Rechteck $CD \times FH$ gegeben seyn.

CD , FH begegnen einander in dem Punct K , von dem man KL senkrecht auf DF ziehe; und DC begegne dem Umfang wiederum in M , und FH begegne ihm in E ; dann ziehe man MG , GF , GH .

Weil der Winkel $MDF = DFE$,
 a 26. 3. so ist a der Bogen $MF = DE$; mithin
 wenn man den gemeinschaftlichen Bogen ME
 hinzuthut oder hinwegnimmt, so ist der Bogen $DM = EF$, folglich die gerade

nie $DM \equiv$ der geraden Linie EF , und
 der Winkel $GMD \equiv^b GFE$; mithin b 8. I.
 sind die Winkel GMC , GFH einander
 gleich, weil sie entweder einerley sind mit
 den Winkeln GMD , GFE , oder Neben-
 winkel davon: und weil die Winkel KDL ,
 LKD zusammen genommen gleich sind c ei- c 32. I.
 nem Rechten, das ist, (*hyp.*) den Winkeln
 KDL , GCB ; so ist der Winkel GCB
 oder $GCH \equiv (LKD \equiv) LKF$ oder
 GKH ; mithin sind die Punkte C , K , H , G
 in dem Umfang eines Kreises, folglich ist der
 Winkel $GCK \equiv GHF$; nun ist der
 Winkel $GMC \equiv GFH$, und $GM \equiv$
 GF , folglich ist d $CG \equiv GH$, und CM d 26. I.
 $\equiv HF$; weil nun $CG \equiv GH$, so ist
 der Winkel $GCH \equiv GHC$, nun ist
 GCH gegeben, folglich auch $GH C$; folg-
 lich ist CGH gegeben, und weil CG der
 Lage nach, samt dem Punct G gegeben ist,
 so ist e GH der Lage nach gegeben; nun ist e 32. dat.
 auch CB der Lage nach gegeben, folglich ist
 der Punct H gegeben.

Und

Und weil $HF = CM$, so ist $DC \times$
 f 95. oder $FH = DC \times CM$; nun ist $f DC \times CM$
 96. dat.
 gegeben, weil der Punct C gegeben ist; folge-
 lich ist $DC \times FH$ gegeben.

Q. E. D.

