Universitätsbibliothek Paderborn

Lehrbuch des Hochbaues

Grundbau, Steinkonstruktionen, Holzkonstruktionen, Eisenkonstruktionen , Eisenbetonkonstruktionen

Esselborn, Karl

Leipzig, 1908

§ 10. Berechnungsweise für die verschiedenen Beanspruchungsarten

urn:nbn:de:hbz:466:1-50294

Visual Library

3. **Beanspruchung auf reine Biegung** tritt auf, wenn die äußeren Kräfte zwei benachbarte Querschnitte gegeneinander so verdrehen wollen, daß diese nach der Verdrehung nicht mehr parallel sind; bei dieser Verdrehung ändern sich jedoch die Abstände ihrer Schwerpunkte nicht.

Biegungsfestigkeit ist diejenige Biegungsspannung, die in den äußersten Fasern, der auf Biegung beanspruchten Querschnitte unmittelbar vor der Zerstörung des Körpers durch Biegung vorhanden ist.

4. **Verdrehungs- oder Torsionsbeanspruchung** tritt auf, wenn die äußeren Kräfte zwei unmittelbar nebeneinanderliegende Querschnitte um die Achse des Körpers so verdrehen wollen, daß die Querschnitte parallel bleiben und ihren Abstand in der Richtung der Achse nicht ändern.

Torsionsfestigkeit ist die unmittelbar vor der Zerstörung des Körpers durch Torsion an der Bruchstelle auftretende Torsionsspannung. Die Torsionsbeanspruchung ist für die Hochbaukonstruktionen von untergeordneter Bedeutung, und soll hierauf an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden.

Treten von den erwähnten Beanspruchungen zwei oder mehr gleichzeitig auf, so spricht man von zusammengesetzter Beanspruchung und demgemäß auch von zusammengesetzter Festigkeit.

In der Praxis handelt es sich nun weniger um die Festigkeiten für die verschiedenen Beanspruchungsweisen als um die betreffende zulässige Inanspruchnahme. Unter dieser letzteren versteht man diejenige Kraft für ein qcm, die man dem Material mit Sicherheit auf die Dauer zumuten kann. Für die Wahl dieser zulässigen Beanspruchung ist die Elastizitätsgrenze maßgebend, und zwar soll diese niemals erreicht oder gar überschritten werden. Um nun aber unvorhergesehenen Überbelastungen oder Materialänderungen Rechnung zu tragen, führt man einen Sicherheitskoeffizienten ein, indem man mit der zulässigen Beanspruchung nur bis zu einem Bruchteil der Elastizitätsgrenze herangeht, z. B. $\frac{1}{2}$ bis $\frac{2}{3}$.

Näheres über die zulässigen Beanspruchungen für die verschiedenen Beanspruchungsarten findet sich in § 10. Für solche Konstruktionen, die einem plötzlichen Belastungswechsel unterworfen sind und bei denen die Belastungen mit Erschütterung oder Stößen verbunden auftreten, nimmt man die zulässige Beanspruchung geringer an als bei den durch ruhende Belastung beanspruchten Konstruktionen; man rechnet dann noch mit einem sog. Stoßkoeffizienten, indem man als zulässige Beanspruchung einen weiteren Bruchteil der zulässigen Beanspruchung für ruhende Lasten einführt, oder die stoßend wirkenden Lasten mit einem größeren Wert in Rechnung stellt.

Bei der Belastung der Konstruktion spielt noch der Elastizitätsmodul oder die Elastizitätszahl eine wesentliche Rolle. Diese Zahl gibt uns ein Bild von der Widerstandsfähigkeit des Materials gegen Deformationen; je größer der Elastizitätsmodul ist, desto widerstandsfähiger ist das Material gegen elastische Deformationen.

Die Größe (E) der Elastizitätszahl für die verschiedenen Materialien hat man durch Versuche bestimmt und hat als Mittelwert für Fluß-, Schweißeisen und Stahl gefunden $E = 2000000$ kg/qcm, für Gußeisen 1000000 kg/qcm.

§ 10. Berechnungsweise für die verschiedenen Beanspruchungsarten.

1. **Zug- und Druckfestigkeit (Normalspannung, Normalfestigkeit).** Wirken auf einen stabförmigen, geradachsigen Körper äußere Kräfte in der Stabachse, so erzeugen diese eine über den ganzen Querschnitt gleichmäßig verteilte Zug- oder Druckbeanspruchung, je nachdem die Kräfte dem Körper eine positive Verlängerung oder eine negative Verlängerung (Verkürzung) zu erteilen bestrebt sind. Hat der Stab konstanten

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Querschnitt und ist F die Querschnittsfläche in qcm, P die Größe der Kraft in kg, so ist die Spannung in diesem Querschnitt

$$\sigma = \frac{P}{F} \text{ kg/qcm.} \tag{1}$$

Diese Spannung darf nun die zulässige Beanspruchung nicht überschreiten. Bezeichnet man diese mit k, und soll der Stab für eine vorliegende Kraft P dimensioniert werden, so ergibt sich als erforderliche Querschnittsfläche

$$F = \frac{P}{k}. \tag{2}$$

Die zulässige Beanspruchung auf Zug sei k_z,
» » » » Druck » k_d.

Für ruhende Belastung kann man als zulässige Beanspruchung $\frac{2}{3}$ der Elastizitätsgrenze einführen. Da nun die

Elastizitätsgrenze bei Schweißeisen für Zug und Druck = rund 1600 kg/qcm
» » Flußeisen » » » » = » 2000 » ,

so sind die zulässigen Beanspruchungen auf Zug und Druck für ruhende Belastung:

bei Schweißeisen $k_z = k_d = \frac{2}{3} \cdot 1600 = 1050$ kg/qcm
» Flußeisen $k_z = k_d = \frac{2}{3} \cdot 2000 = 1350$ »

Bei stoßend wirkender Belastung wählt man die zulässige Beanspruchung nur $\frac{2}{3}$ bis $\frac{3}{4}$ so hoch als bei ruhender Belastung, demnach:

bei Schweißeisen $k_z = k_d = \frac{2}{3} \cdot 1050 = 700$ kg/qcm
» Flußeisen $k_z = k_d = \frac{2}{3} \cdot 1350 = 900$ »

Bei Gußeisen liegt die Elastizitätsgrenze für Zug bei rund 650 kg/qcm und für Druck bei rund 1700 kg/qcm. Jedoch werden die zulässigen Beanspruchungen beim Gußeisen wegen seiner Sprödigkeit verhältnismäßig viel geringer angenommen als bei Schmiedeeisen, und zwar ist allgemein festgesetzt:

Zulässige Beanspruchung auf Zug 250 kg/qcm
» » » Druck 500 »

Diese Werte gelten nur für ruhende Belastung; für stoßende Belastung darf Gußeisen keine Verwendung finden.

Die folgende Tabelle gibt übliche Mittelwerte für die zulässigen Beanspruchungen, sowie für die Elastizitätszahlen und spezifischen Gewichte der verschiedenen Eisensorten an, wobei Schweißeisen und Flußeisen als Schmiedeeisen zusammengenommen sind.

Tabelle: Zulässige Beanspruchungen, Elastizitätszahlen und spezifische Gewichte der verschiedenen Eisensorten.

Material	Zulässige Beanspruchungen in kg/qcm bei stoßender Belastung		bei ruhiger Belastung		Elastiz. Mod.	Spez. Gew. in
	Zug	Druck	Zug	Druck	kg/qcm	kg/cbm
Gußeisen	—	—	250	500	1 000 000	7250
Schmiedeeisen	750	750	1000	1000	2 000 000	7800
Stahl	1500	1500	1500—1800	1800—2000	2 000 000	7850

Wie schon in § 9 angeführt wurde, tritt mit jeder Beanspruchung eine Formänderung auf, die bei Schmiedeeisen und Stahl innerhalb der Elastizitätsgrenze proportional der

Spannung wächst. Dieses Elastizitätsgesetz lautet für einen Stab mit konstantem Querschnitt

$$\frac{\varDelta l}{l} = \frac{\sigma}{E}, \tag{3}$$

worin l die ursprüngliche Stablänge und $\varDelta l$ gleich der Verlängerung des Stabes ist.

Hierin nach Formel 1 für σ den Wert $\frac{P}{F}$ eingesetzt, ergibt

$$\frac{\varDelta l}{l} = \frac{P}{F \cdot E},$$

woraus sich die Gesamtverlängerung des Stabes findet:

$$\varDelta l = \frac{P \cdot l}{E \cdot F}. \tag{4}$$

Mit jeder Längenänderung ist eine Queränderung verbunden, und zwar im entgegengesetzten Sinne, d. h. einer positiven Längenänderung entspricht eine negative Queränderung und umgekehrt. Sind die Querabmessungen des prismatischen Stabes a und b, so ist

$$\frac{\varDelta a}{a} = \frac{1}{m} \cdot \frac{\varDelta l}{l} \quad \text{und} \quad \frac{\varDelta b}{b} = \frac{1}{m} \cdot \frac{\varDelta l}{l}.$$

m ist für alle Körper, die nach allen Seiten gleich elastisch sind, also auch für Eisen, annähernd eine Zahl zwischen 3 und 4, für Schmiedeeisen und Stahl empfiehlt sich der Wert $m = 3$.

Bei einem Stab mit nicht konstantem Querschnitt hat man bei der Dimensionierung oder Spannungsberechnung die schwächste Stelle ins Auge zu fassen, d. h. den Nettoquerschnitt zu berechnen. So ist z. B. bei Eisenkonstruktionen an den Anschluß- und Stoßstellen der Stabquerschnitt durch die Niet- oder Schraubenlöcher geschwächt und diese Schwächungen sind bei der Dimensionierung zu berücksichtigen, indem der wirkliche Stabquerschnitt um diese Schwächung größer zu nehmen ist, als die berechnete, erforderliche Querschnittsfläche. Dieser Zuschlag für die Schwächung kommt hauptsächlich bei den gezogenen Stäben in Betracht, weniger bei den gedrückten; denn hier ist die Schwächung in den meisten Fällen durch die Verbindungsmittel wieder ausgefüllt.

Dagegen ist bei gedrückten Stäben gegen die Gefahr des Ausknickens vorzubeugen, d. h. es ist die Knicksicherheit bei gedrückten Stäben nachzuweisen. Ein vollkommen gleichartiger, geradachsiger Stab, der genau zentrisch belastet ist, dürfte theoretisch kein Ausknicken erleiden; da aber praktisch diese Bedingungen nicht erfüllbar sind, so haben diese Abweichungen von der theoretischen Form und Art der Belastung ein Ausbiegen des Stabes zur Folge, wenn nicht nach allen Seiten eine genügende Steifigkeit vorhanden ist. Einen Ausdruck für diese nach jeder Seite hin mindestens nötige Steifigkeit ist gegeben in der EULERschen Knickformel:

$$J_{\min} \geqq \frac{s \cdot l^2 \cdot P}{C \cdot E}. \tag{5}$$

Hierin bedeutet $J_{\min}$ das kleinste Trägheitsmoment in cm^4, s den Sicherheitsgrad, l die freie Stablänge in cm, P die Stabkraft in kg, C eine Konstante, die von der Endbefestigung des Stabes abhängt und E den Elastizitätsmodul.

In bezug auf die Konstante C unterscheidet man 4 Arten von Endbefestigungen und somit 4 Knickfälle:

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

1. Der Stab ist am einen Ende eingespannt und am anderen Ende frei (Abb. 35)[9])

$$C = \frac{\pi^2}{4}.$$

2. Der Stab ist an beiden Enden gelenkartig gehalten (Abb. 36)

$$C = \pi^2.$$

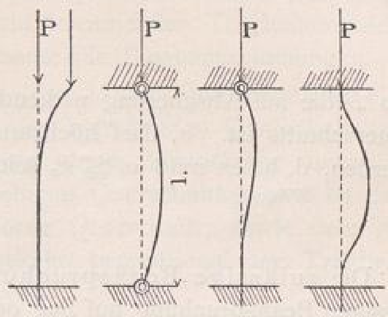
3. Der Stab ist am einen Ende eingespannt und am anderen gelenkartig gehalten (Abb. 37)

$$C = 2 \cdot \pi^2.$$

4. Der Stab ist an beiden Enden eingespannt (Abb. 38)

$$C = 4\pi^2.$$

Abb. 35 bis 38. Die 4 Knickfälle.



In der Praxis spielt der Fall 2, bei dem die beiden Stabenden gelenkartig gehalten sind, und für den die Konstante $C = \pi^2$ ist, eine vorwiegende Rolle. Denn für die meisten Konstruktionsteile, wie Fachwerksstäbe, Stützen usw. wird für die Berechnung derselben eine gelenkartige Endbefestigung angenommen und oft eine solche auch ausgeführt. Setzt man für diesen 2. Knickfall in die EULERsche Formel den Wert $C = \pi^2$ oder 10, die Stabkraft in Tonnen und die freie Länge in Metern ein, so ergibt sich nach Formel 5 für Schmiedeeisen und Stahl, für die $E = 2\,000\,000$ kg/qcm ist, und für eine 5fache Sicherheit ($s = 5$):

$$J_{\min} \geqq \frac{5 \cdot l^2 \cdot 100 \cdot 100 \cdot P \cdot 1000}{10 \cdot 2\,000\,000}$$

und hieraus die einfache Formel:

$$J_{\min} \geqq 2{,}5 \cdot P \cdot l^2, \qquad (6)$$

worin P in t und l in m einzusetzen ist.

Für Gußeisen, für das $E = 1\,000\,000$ kg/qcm ist und für das eine 8fache Sicherheit ($s = 8$) verlangt wird, ergibt sich der Wert

$$J_{\min} \geqq \frac{8 \cdot l^2 \cdot 100 \cdot 100 \cdot P \cdot 1000}{10 \cdot 1\,000\,000}, \text{ oder}$$

$$J_{\min} \geqq 8 \cdot P \cdot l^2. \qquad (7)$$

Auch hier ist P in t und l in m einzusetzen.

Liegt ein anderer Knickfall vor, so kann dieser aus Fall 2 leicht durch einfache Multiplikation mit der Verhältniszahl der Konstanten geschehen. Z. B. bei Fall 1 muß $J_{\min}$ viermal so groß und bei Fall 3 nur halb so groß sein als bei Fall 2, wenn man die gleiche Knicksicherheit erhalten will.

Der Vorgang bei der Berechnung gedrückter Stäbe ist folgender: Zunächst wird die erforderliche Querschnittsfläche $F = \frac{P}{k}$ ermittelt und diese, wenn möglich so angeordnet, daß das für die Knicksicherheit erforderliche, kleinste Trägheitsmoment mindestens vorhanden ist. Genügt trotz geschickter Anordnung die berechnete Querschnittsfläche nicht zur Erzielung der verlangten Steifigkeit, so muß man zur Erreichung des erforderlichen $J_{\min}$ die Querschnittsfläche entsprechend vergrößern.

[9]) Die Abb. 35 bis 38, 89, 90, 115 bis 119, 128, 129, 145, 146, 227, 234, 255, 256, 271 bis 274, 279, 280, 286 bis 291, 302 bis 304, 308 bis 322, 332 bis 337, 340 bis 342, 356 bis 359, 383 bis 386, 399, 420, 421 und 459 bis 470 sind entnommen aus: MAX FOERSTER, »Die Eisenkonstruktionen der Ingenieur-Hochbauten«, 3. Aufl., Leipzig 1906.

Über die Berechnung der Trägheitsmomente einfacher und zusammengesetzter Querschnitte siehe § 11. Beispiele für die Berechnung folgen ebenfalls später.

2. **Schubfestigkeit (Abscherung).** Nimmt man die in einem Querschnitt auftretende Schubspannung als gleichmäßig verteilt an, so ergibt sich als Schubbeanspruchung für 1 qcm, also die Schubspannung nach der Formel

$$\sigma_s = \frac{P}{F}, \tag{8}$$

wo P die auf Abscherung wirkende Kraft und F die Querschnittsfläche des betrachteten Querschnitts ist. σ_s darf höchstens gleich der zulässigen Beanspruchung auf Schub (k_s) werden, d. h. es muß $\sigma_s \leqq k_s$ sein, und als Dimensionierungsformel ergibt sich

$$F = \frac{P}{k_s}. \tag{9}$$

Die zulässige Beanspruchung auf Schub kann man ungefähr gleich $\frac{4}{5}$ der zulässigen Beanspruchung auf Zug oder Druck setzen, d. h. $k_s = \frac{4}{5} k_d$ oder $\frac{4}{5} k_z$, wobei der kleinere dieser beiden Werte maßgebend ist.

Demnach ergibt sich für:

Gußeisen	$k_s = 250 \cdot \frac{4}{5} = 200$ kg/qcm	für ruhende Belastung
Schweißeisen	$k_s = 1050 \cdot \frac{4}{5} = 840$ kg/qcm	
Flußeisen	$k_s = 1350 \cdot \frac{4}{5} = 1080$ kg/qcm	
Schweißeisen	$k_s = 700 \cdot \frac{4}{5} = 560$ kg/qcm	für stoßend wirkende Belastung.
Flußeisen	$k_s = 900 \cdot \frac{4}{5} = 720$ kg/qcm	

Als Mittelwert könnte man gemäß der Tabelle auf S. 307 für Schmiedeeisen (Flußeisen und Schweißeisen) einführen:

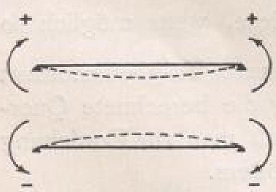
$k_s = 750 \cdot \frac{4}{5} = 600$ kg/qcm bei stoßender Belastung,
$k_s = 1000 \cdot \frac{4}{5} = 800$ kg/qcm bei ruhender Belastung.

Rechnungsbeispiele siehe bei den Vernietungen usw.

Für die Berechnung von Schubbeanspruchungen in Querschnitten vollwandiger Konstruktionen ist meist die Querkraft maßgebend. Unter Querkraft eines Querschnitts versteht man die algebraische Summe, der zum Querschnitt parallelen Komponenten sämtlicher Kräfte auf der einen Seite dieses Querschnitts. (Näheres siehe bei den Trägern, Abschnitt IV.)

3. **Biegungsfestigkeit.** Nach § 9, 3 tritt Biegung auf, wenn die Kräfte zwei Nachbarquerschnitte um eine zur Kraftebene senkrecht stehende Achse so zu drehen bestrebt sind, daß die anfänglich parallelen Querschnitte nicht mehr parallel bleiben. Diese Verdrehung wird durch die Summe der Momente aller Kräfte auf der einen Seite des Querschnitts, bezogen auf den Schwerpunkt des betreffenden Querschnitts als Drehpunkt, bedingt. Diese Summe der Momente wird das Biegungsmoment des betreffenden Querschnitts genannt. Als positive Biegungsmomente bezeichnet man in der Regel diejenigen, die den Träger nach unten durchzubiegen bestrebt sind, die also auf beiden Seiten des Querschnitts nach oben drehen (Abb. 39). Die umgekehrt wirkenden Biegungsmomente sind dann negativ (Abb. 40).

Abb. 39 u. 40. Positive und negative Biegungsmomente.



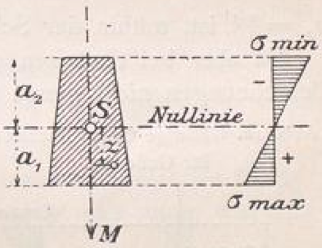
Die maximalen Biegungsspannungen sind abhängig von den maximalen Biegungsmomenten und zwar ist in den einzelnen Querschnittspunkten die Biegungsspannung um so größer, je größer der Abstand der betreffenden Querschnittspunkte vom Schwerpunkt dieses Querschnitts ist. Die größte Biegungsspannung tritt also an der äußersten Faser des Querschnitts auf. Ferner ist die Größe der Biegungsspannung abhängig von der Gestalt und Größe des beanspruchten Querschnitts; denn die Querschnittsformen und zwar die Trägheitsmomente der Querschnitte bedingen die Widerstandsfähigkeit des Körpers gegen Verbiegungen. Je widerstandsfähiger der Träger gegen Verbiegung ist, d. h. je größer die in Betracht kommenden Trägheitsmomente sind, desto kleiner sind für vorliegende Biegungsmomente die Biegungsspannungen.

Schneidet die durch die äußeren Kräfte gelegte Ebene den Querschnitt in einer Hauptachse (siehe § 11), so erfolgt die Verdrehung des betreffenden Querschnitts um eine zur Kraftebene senkrechte Achse, d. h. um die zur obigen Hauptachse zugehörige Hauptachse und die Biegungsspannung in einem beliebigen Querschnittspunkte ist dann direkt proportional dem Biegungsmoment M für diesen Querschnitt, sowie dem Abstande z vom Schwerpunkt (der Drehachse) und umgekehrt proportional dem Trägheitsmoment J. Folglich ist

$$\sigma = \frac{M \cdot z}{J}. \tag{10}$$

Wird hierin M in kgcm, z in cm und J in cm^4 eingesetzt, so ergibt sich σ in kg/qcm.

Abb. 41. Spannungsdiagramm.



Alle Punkte mit derselben Entfernung z haben die gleiche Spannung. Wird für jeden Querschnittspunkt die zugehörige Spannung aufgetragen, so ergibt sich das sog. Spannungsdiagramm (Abb. 41).

In den Punkten, für die $z = 0$ ist, wird auch die Spannung gleich 0 (neutrale Achse des Querschnitts oder Nullinie).

Bei positiven Biegungsmomenten erleiden die Punkte unterhalb der Nullinie Zugspannungen (+) und diejenigen oberhalb der Nullinie Druckspannungen (—). Die Biegungsspannungen werden also auf Zug- und Druckspannungen zurückgeführt, sind also Normalspannungen. Die größten Beanspruchungen treten in den äußersten Punkten auf, mithin die größte Zugspannung für $z = a_1$ und die größte Druckspannung für $z = a_2$. Es ist daher:

$$\sigma_{\max} = \frac{M \cdot a_1}{J} \quad \text{und} \quad \sigma_{\min} = \frac{M \cdot a_2}{J}.$$

$\sigma_{\max}$ und $\sigma_{\min}$ dürfen höchstens gleich der zulässigen Zug- bzw. Druckbeanspruchung werden, d. h.

$$\sigma_{\max} = k_z = \frac{M \cdot a_1}{J} \quad \text{und} \quad \sigma_{\min} = k_d = \frac{M \cdot a_2}{J}. \tag{11}$$

Für Schmiedeeisen und Stahl, für die $k_z = k_d = k$ ist, ergibt sich als Bedingung für eine gute Materialausnutzung:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\min} = k,$$

und somit auch $a_1 = a_2 = a$.

Die Dimensionierungsgleichung ist also

$$k = \frac{M \cdot a}{J} \quad \text{oder} \quad \frac{J}{a} = \frac{M}{k}. \tag{12}$$

J und a sind abhängig von der Querschnittsform und somit gesucht, wenn für ein vorliegendes Biegungsmoment M ein Träger zu berechnen ist.

$\frac{J}{a}$ bezeichnet man als Widerstandsmoment (W) und dieses ist für die meisten Normalprofile direkt in den Profilbüchern gegeben; es kann in solchem Falle das erforderliche Profil unmittelbar gewählt werden nach der Gleichung:

$$W = \frac{M}{k}; \tag{13}$$

worin k die zulässige Zug- und Druckbeanspruchung bedeutet. Es sind also für Schmiedeeisen und Stahl dieselben Werte für k wie bei der Zug- und Druckfestigkeit (siehe § 10, 1) zugrunde zu legen. Beispiele für die Berechnung siehe später.

Ist k_z nicht gleich k_d, so ist als zulässige Biegungsbeanspruchung der kleinere dieser beiden Werte zu wählen, und man wird dann mit Rücksicht auf eine gute Materialausnutzung bei der $\sigma_{\max} = k_z$ und $\sigma_{\min} = k_d$ ist, dem Querschnitt wenn möglich solche Abmessungen geben, daß $\frac{a_1}{a_2} = \frac{k_z}{k_d}$ wird. Bei Gußeisen z. B. mit $k_z = 250$ kg/qcm und $k_d = 500$ kg/qcm wäre bei $a_1 = a_2$, d. h. wenn der Schwerpunkt in halber Höhe liegt, mit einer zulässigen Biegungsspannung von $k = 250$ kg/qcm zu rechnen und nach der Formel $W = \frac{M}{k}$ zu dimensionieren; oder auch, um k_d und k_z voll auszunutzen, die Querschnittsform so zu wählen, daß $\frac{a_1}{a_2} = \frac{k_z}{k_d} = \frac{250}{500} = \frac{1}{2}$ also: $a_1 = \frac{1}{3}h$ und $a_2 = \frac{2}{3}h$ ist, mithin der Schwerpunkt in einem Drittel der Höhe liegt (Abb. 42).

Da aber bei Gußeisen das Proportionalitätsgesetz nicht gilt, und somit auch diese Berechnungen nicht genau zutreffen, empfiehlt es sich, Gußeisen für auf Biegung beanspruchte Teile nicht zu verwenden; dies ist auch mit Rücksicht auf die Sprödigkeit des Gußeisens sehr empfehlenswert.

Abb. 42. Günstige Querschnittsform für Gußeisen.

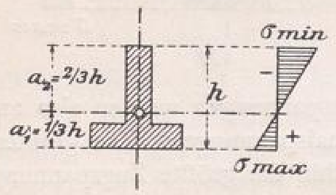
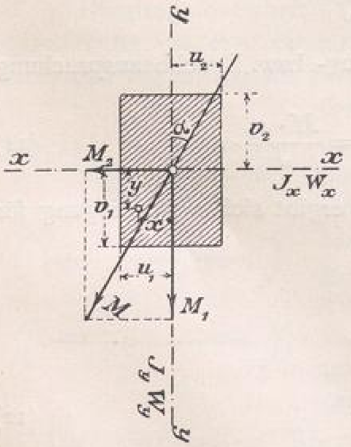


Abb. 43. Kraftebene schneidet den Querschnitt nicht in Hauptachse.



Schneidet die Kraftebene den Querschnitt nicht in einer Hauptachse, so findet die Verdrehung nicht um eine zur Kraftebene senkrecht stehende Achse statt. Die Richtung der Drehachse, d. h. die Richtung der Nullinie ist also von vornherein nicht bekannt. Zur Berechnung zerlegt man das Biegungsmoment M des betreffenden Querschnitts in 2 Seitenkomponenten M_1 und M_2 (Abb. 43), berechnet für jede die zugehörigen Spannungen und addiert diese.

Die Spannung in einem beliebigen Punkte mit dem Abstande y von der x-Achse und dem Abstand x von der y-Achse berechnet sich zu

$$\sigma = \frac{M_1 \cdot y}{J_x} + \frac{M_2 \cdot x}{J_y}.$$

Ferner ist

$$M_1 = M \cdot \cos\alpha; \; M_2 = M \cdot \sin\alpha.$$

M_1 und M_2 können auch aus der Zeichnung direkt abgegriffen werden, wenn man M in einem bestimmten Maßstab aufträgt und graphisch zerlegt.

Es sei J_x = Trägheitsmoment des Querschnitts auf die x-Achse bezogen und J_y = Trägheitsmoment auf die y-Achse bezogen. Für die Grenzwerte von x und y treten die größten Spannungen auf; bei positiven Biegungsmomenten ist daher die größte Zugspannung $\sigma_{\max}$ für $x = +u_1$

UNIVERSITÄTS-BIBLIOTHEK PADERBORN

und $y = +v_1$; die größte Druckspannung $\sigma_{\min}$ für $x = -u_2$ und $y = -v_2$; also:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_1 \cdot v_1}{J_x} + \frac{M_2 \cdot u_1}{J_y} \quad \text{und} \quad \sigma_{\min} = -\left(\frac{M_1 \cdot v_2}{J_x} + \frac{M_2 \cdot u_2}{J_y}\right).$$

Sind die zulässigen Beanspruchungen auf Zug und Druck wieder einander gleich, d. h. ist $k_z = k_d = k$, so wird mit Rücksicht auf eine gute Materialausnutzung $v_1 = v_2 = v$ und $u_1 = u_2 = u$ gewählt und die Bedingungsgleichung heißt dann:

$$k = \frac{M_1 \cdot v}{J_x} + \frac{M_2 \cdot u}{J_y}. \tag{14}$$

Da nun $\frac{J_x}{v} = W_x$ das Widerstandsmoment für die X-Achse und $\frac{J_y}{u} = W_y$ dasjenige für die y-Achse ist, so ergibt sich somit

$$k = \frac{M_1}{W_x} + \frac{M_2}{W_y} = \frac{1}{W_x}\left(M_1 + \frac{W_x}{W_y} \cdot M_2\right).$$

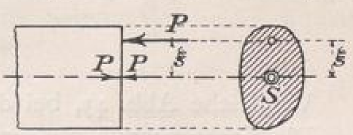
Wird das Verhältnis der beiden Widerstandsmomente $\frac{W_x}{W_y} = c$ gesetzt, so ist $k = \frac{M_1 + c \cdot M_2}{W_x}$, und die Dimensionierungsformel heißt:

$$W_x = \frac{M_1 + c \cdot M_2}{k}, \tag{15}$$

c wird zunächst gewählt (für I-Eisen $c = 7$ bis 9 und für ⊏-Eisen $c = 5$ bis 7, für mittlere Profile) und mittels Annäherung die Rechnung durchgeführt (Beispiele siehe bei der Pfettenberechnung in Abschnitt V).

4. **Zusammengesetzte Festigkeit.** Der häufigste Fall der zusammengesetzten Festigkeit ist derjenige, der durch eine Achsialkraft P und ein Moment M oder auch, was dasselbe ist, durch eine den Querschnitt exzentrisch, d. h. nicht im Schwerpunkt, treffende Kraft erzeugt wird. Den letzten Belastungsfall kann man ersetzen durch eine achsialwirkende Kraft und ein Kräftepaar mit dem Moment $P \cdot \xi$, wenn ξ die Exzentrizität der Kraft ist (Abb. 44). Die durch die Achsialkraft P und das Moment M erzeugten Spannungen addieren sich direkt, da sie beide Normalspannungen sind; selbstredend ist bei der Summierung das Vorzeichen zu berücksichtigen.

Abb. 44. Zusammengesetzte Festigkeit.



Trifft die Kraft P den Querschnitt nicht senkrecht, so kommt für die Normalspannungen die zur Querschnittsebene senkrechte Komponente der Kraft in Betracht; die andere in der Querschnittsebene wirkende Komponente erzeugt Schubspannungen im Querschnitt.

Wird ein Querschnitt durch eine Achsialkraft P und ein Biegungsmoment M beansprucht, so sind bei der Spannungsermittelung wieder zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die Kraft- oder Momentenebene den Querschnitt in einer Hauptachse schneidet oder nicht. Schneidet die Kraftebene den Querschnitt in einer Hauptachse, so ist die Spannung in einem beliebigen Punkte im Abstand z von der zugehörigen Hauptachse:

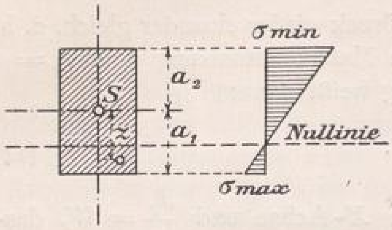
$$\sigma = \pm \frac{P}{F} + \frac{M \cdot z}{J}, \tag{16}$$

$\frac{P}{F}$ ist positiv oder negativ, je nachdem die Achsialkraft auf Zug oder auf Druck wirkt.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Abb. 45 entspricht einem negativen $\frac{P}{F}$. Die Grenzspannungen treten auf für die Grenzwerte von z und zwar ist bei positivem Biegungsmoment M

Abb. 45. Zusammengesetzte Festigkeit.



$$\sigma_{\max} = \pm \frac{P}{F} + \frac{M \cdot a_1}{J}$$

und

$$\sigma_{\min} = \pm \frac{P}{F} - \frac{M \cdot a_2}{J}.$$

Bei $a_1 = a_2 = a$ ergeben sich durch Einsetzung von $\frac{J}{a} = W$ die Werte

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{P}{F} + \frac{M}{W} \quad \text{und} \quad \sigma_{\min} = \pm \frac{P}{F} - \frac{M}{W}. \tag{17}$$

Erzeugt P Zugspannungen, so ist

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \frac{M}{W} \quad \text{und} \quad \sigma_{\min} = \frac{P}{F} - \frac{M}{W}.$$

Wirkt P auf Druck, dann wird

$$\sigma_{\max} = -\frac{P}{F} + \frac{M}{W} \quad \text{und} \quad \sigma_{\min} = -\frac{P}{F} - \frac{M}{W}.$$

Haben $\sigma_{\max}$ und $\sigma_{\min}$ gleiche Vorzeichen, so wird der ganze Querschnitt nur gezogen oder gedrückt; die Nullinie fällt dann außerhalb des Querschnitts. Ist das Vorzeichen von $\sigma_{\max}$ und $\sigma_{\min}$ verschieden, so tritt im Querschnitt teils Zug und teils Druck auf, d. h. die Nullinie fällt in den Querschnitt.

Schneidet die Kraftebene den Querschnitt nicht in einer Hauptachse, so steht die Richtung der Nullinie nicht mehr senkrecht auf der Kraftebene. Man zerlegt dann das Moment wie bei der reinen Biegung in zwei Seitenkomponenten M_1 und M_2 und es ergibt sich nach S. 312 die Spannung in einem beliebigen Querschnittspunkte

$$\sigma = \pm \frac{P}{F} + \frac{M_1 \cdot y}{J_x} + \frac{M_2 \cdot x}{J_y}. \tag{18}$$

Vergleiche Abb. 43, bei der in S noch eine Achsialkraft P wirkend zu denken ist. Die Grenzspannungen ergeben sich wieder für die Grenzwerte von y und x zu:

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{P}{F} + \frac{M_1 \cdot v_1}{J_x} + \frac{M_2 \cdot u_1}{J_y} \quad \text{und} \quad \sigma_{\min} = \pm \frac{P}{P} - \frac{M_1 \cdot v_2}{J_x} - \frac{M_2 \cdot u_2}{J_y}$$

und bei $M_1 = M_2 = M$; $v_1 = v_2 = v$, wobei $\frac{J_x}{v} = W_x$ und $\frac{J_y}{u} = W_y$ ist,

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{P}{F} + \frac{M_1}{W_x} + \frac{M_2}{W_y} \quad \text{und} \quad \sigma_{\min} = \pm \frac{P}{F} - \frac{M_1}{W_x} - \frac{M_2}{W_y}. \tag{19}$$

Hierin ist für $\frac{P}{F}$ je nach der Wirkung von P das positive oder negative Vorzeichen zu wählen. Auch hierbei wird wieder der ganze Querschnitt gezogen oder gedrückt, wenn $\sigma_{\max}$ und $\sigma_{\min}$ gleiche Vorzeichen haben. Die Nullinie fällt dann außerhalb des Querschnitts. Haben $\sigma_{\max}$ und $\sigma_{\min}$ entgegengesetztes Vorzeichen, so liegt die Nulllinie im Querschnitt und auf ihrer einen Seite treten Zug-, auf der anderen Seite Druckspannungen auf.

Die Dimensionierungsformel kann analog, wie bei der reinen Biegung gebildet werden.

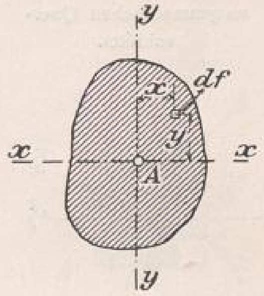
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Die aus Druck und Biegung zusammengesetzte Festigkeit spielt im Hochbau besonders bei exzentrisch belasteten Stützen, sowohl bei eisernen als auch gemauerten, eine große Rolle. Beispiele siehe bei Säulen (Abschnitt III).

Wegen der zusammengesetzten Schub- und Biegungsspannung vergleiche in § 14, 1, e die »Berechnung der Gelenkbolzen«.

§ 11. Trägheitsmomente. Wie aus § 10 ersichtlich ist, sind zum Nachweis der Knicksicherheit und zur Berechnung der Biegungsspannungen die Trägheitsmomente erforderlich. Diese sind Flächenmomente höherer Ordnung, und zwar versteht man unter dem Trägheitsmoment eines Querschnitts auf irgend eine Achse die Summe der Produkte aus den unendlich kleinen Flächenteilchen df des Querschnitts und den Quadraten der zugehörigen Abstände von der betreffenden Achse. Diese Achse nennt man Trägheitsachse.

Abb. 46. Trägheitsmoment eines Querschnitts.



Nimmt man z. B. für den in Abb. 46 dargestellten Querschnitt 2 beliebige Achsen xx und yy an, und sind die Abstände eines beliebigen Flächenteilchens von diesen Achsen y und x, so ist das Trägheitsmoment bezogen auf die x-Achse:

$$J_x = \Sigma y^2 \cdot df$$

und dasjenige bezogen auf die y-Achse

$$J^y = \Sigma x^2 \cdot df.$$

Diese beiden Trägheitsmomente nennt man äquatoriale Trägheitsmomente, da die Trägheitsachsen in der Ebene des Querschnitts liegen. Stehen dagegen die Trägheitsachsen senkrecht auf der Ebene des Querschnitts, so spricht man von polaren Trägheitsmomenten (J_p), z. B. für eine solche Achse im Punkte A ist

$$J_p = \Sigma \varrho^2 \cdot df, \text{ wobei } \varrho \text{ der direkte Abstand von } A \text{ ist.}$$

Schneiden sich zwei äquatoriale und eine polare Trägheitsachse in einem Punkt, wie in Abb. 46, und stehen die beiden äquatorialen Achsen x und y senkrecht aufeinander, so ist das polare Trägheitsmoment gleich der Summe der beiden äquatorialen Trägheitsmomente, da in diesem Falle $\varrho^2 = x^2 + y^2$:

$$J_p = J_x + J_y. \tag{20}$$

Neben den Trägheitsmomenten unterscheidet man noch die Zentrifugalmomente und zwar ist $\Sigma x \cdot y \cdot df$ das Zentrifugalmoment des Querschnitts auf die beiden Achsen x und y.

In der Festigkeitslehre sind hauptsächlich die äquatorialen Trägheitsmomente von Bedeutung und im besonderen Maße die Trägheitsmomente auf Achsen, die durch den Schwerpunkt gehen und Schwerachsen genannt werden. Für jede Schwerachse ist im allgemeinen das Trägheitsmoment ein anderes, und diejenigen Achsen, die das größte und kleinste Trägheitsmoment aufweisen, nennt man Hauptachsen. Diejenige Hauptachse, für die das Trägheitsmoment ein Maximum ist, wird erste Hauptachse, diejenige für die das Trägheitsmoment ein Minimum ist, zweite Hauptachse genannt. Die beiden Hauptachsen stehen senkrecht aufeinander, und das Zentrifugalmoment des Querschnitts auf die beiden Hauptachsen ist gleich Null.

Hieraus folgt weiter, daß jede Symmetrieachse eine Hauptachse ist, und daß die zugehörige andere Hauptachse auf jener im Schwerpunkt senkrecht steht. Hiernach lassen sich für Querschnitte, die eine Symmetrieachse haben, die Hauptachsen direkt angeben, wie z. B. in Abb. 47 u. 48. Will man für einen unsymmetrischen Querschnitt die Lage der Hauptachsen berechnen, so ermittelt man zunächst die Trägheitsmomente

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN