Lehrbuch des Hochbaues

Grundbau, Steinkonstruktionen, Holzkonstruktionen, Eisenkonstruktionen , Eisenbetonkonstruktionen

Esselborn, Karl

Leipzig, 1908

3. Biegungsfestigkeit

Über die Berechnung der Trägheitsmomente einfacher und zusammengesetzter Querschnitte siehe § 11. Beispiele für die Berechnung folgen ebenfalls später.

2. Schubfestigkeit (Abscherung). Nimmt man die in einem Querschnitt auftretende Schubspannung als gleichmäßig verteilt an, so ergibt sich als Schubbeanspruchung für 1 qcm, also die Schubspannung nach der Formel

$$\sigma_s = \frac{P}{F}, \tag{8}$$

wo P die auf Abscherung wirkende Kraft und F die Querschnittsfläche des betrachteten Querschnitts ist. σ_s darf höchstens gleich der zulässigen Beanspruchung auf Schub (k_s) werden, d. h. es muß $\sigma_s \leqq k_s$ sein, und als Dimensionierungsformel ergibt sich

$$F = \frac{P}{k_s}. \tag{9}$$

Die zulässige Beanspruchung auf Schub kann man ungefähr gleich $\frac{4}{5}$ der zulässigen Beanspruchung auf Zug oder Druck setzen, d. h. $k_s = \frac{4}{5} k_d$ oder $\frac{4}{5} k_z$, wobei der kleinere dieser beiden Werte maßgebend ist.

Demnach ergibt sich für:

Gußeisen	$k_s = 250 \cdot \frac{4}{5} = 200$ kg/qcm	für ruhende Belastung
Schweißeisen	$k_s = 1050 \cdot \frac{4}{5} = 840$ kg/qcm	
Flußeisen	$k_s = 1350 \cdot \frac{4}{5} = 1080$ kg/qcm	
Schweißeisen	$k_s = 700 \cdot \frac{4}{5} = 560$ kg/qcm	für stoßend wirkende Belastung.
Flußeisen	$k_s = 900 \cdot \frac{4}{5} = 720$ kg/qcm	

Als Mittelwert könnte man gemäß der Tabelle auf S. 307 für Schmiedeeisen (Flußeisen und Schweißeisen) einführen:

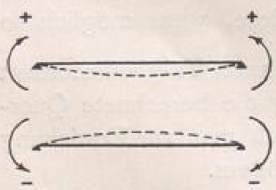
$k_s = 750 \cdot \frac{4}{5} = 600$ kg/qcm bei stoßender Belastung,
$k_s = 1000 \cdot \frac{4}{5} = 800$ kg/qcm bei ruhender Belastung.

Rechnungsbeispiele siehe bei den Vernietungen usw.

Für die Berechnung von Schubbeanspruchungen in Querschnitten vollwandiger Konstruktionen ist meist die Querkraft maßgebend. Unter Querkraft eines Querschnitts versteht man die algebraische Summe, der zum Querschnitt parallelen Komponenten sämtlicher Kräfte auf der einen Seite dieses Querschnitts. (Näheres siehe bei den Trägern, Abschnitt IV.)

3. Biegungsfestigkeit. Nach § 9, 3 tritt Biegung auf, wenn die Kräfte zwei Nachbarquerschnitte um eine zur Kraftebene senkrecht stehende Achse so zu drehen bestrebt sind, daß die anfänglich parallelen Querschnitte nicht mehr parallel bleiben. Diese Verdrehung wird durch die Summe der Momente aller Kräfte auf der einen Seite des Querschnitts, bezogen auf den Schwerpunkt des betreffenden Querschnitts als Drehpunkt, bedingt. Diese Summe der Momente wird das Biegungsmoment des betreffenden Querschnitts genannt. Als positive Biegungsmomente bezeichnet man in der Regel diejenigen, die den Träger nach unten durchzubiegen bestrebt sind, die also auf beiden Seiten des Querschnitts nach oben drehen (Abb. 39). Die umgekehrt wirkenden Biegungsmomente sind dann negativ (Abb. 40).

Abb. 39 u. 40. Positive und negative Biegungsmomente.



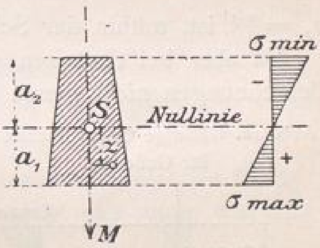
Die maximalen Biegungsspannungen sind abhängig von den maximalen Biegungsmomenten und zwar ist in den einzelnen Querschnittspunkten die Biegungsspannung um so größer, je größer der Abstand der betreffenden Querschnittspunkte vom Schwerpunkt dieses Querschnitts ist. Die größte Biegungsspannung tritt also an der äußersten Faser des Querschnitts auf. Ferner ist die Größe der Biegungsspannung abhängig von der Gestalt und Größe des beanspruchten Querschnitts; denn die Querschnittsformen und zwar die Trägheitsmomente der Querschnitte bedingen die Widerstandsfähigkeit des Körpers gegen Verbiegungen. Je widerstandsfähiger der Träger gegen Verbiegung ist, d. h. je größer die in Betracht kommenden Trägheitsmomente sind, desto kleiner sind für vorliegende Biegungsmomente die Biegungsspannungen.

Schneidet die durch die äußeren Kräfte gelegte Ebene den Querschnitt in einer Hauptachse (siehe § 11), so erfolgt die Verdrehung des betreffenden Querschnitts um eine zur Kraftebene senkrechte Achse, d. h. um die zur obigen Hauptachse zugehörige Hauptachse und die Biegungsspannung in einem beliebigen Querschnittspunkte ist dann direkt proportional dem Biegungsmoment M für diesen Querschnitt, sowie dem Abstande z vom Schwerpunkt (der Drehachse) und umgekehrt proportional dem Trägheitsmoment J. Folglich ist

$$\sigma = \frac{M \cdot z}{J}. \tag{10}$$

Wird hierin M in kgcm, z in cm und J in cm^4 eingesetzt, so ergibt sich σ in kg/qcm.

Abb. 41. Spannungsdiagramm.



Alle Punkte mit derselben Entfernung z haben die gleiche Spannung. Wird für jeden Querschnittspunkt die zugehörige Spannung aufgetragen, so ergibt sich das sog. Spannungsdiagramm (Abb. 41).

In den Punkten, für die $z = 0$ ist, wird auch die Spannung gleich 0 (neutrale Achse des Querschnitts oder Nullinie).

Bei positiven Biegungsmomenten erleiden die Punkte unterhalb der Nullinie Zugspannungen (+) und diejenigen oberhalb der Nullinie Druckspannungen (—). Die Biegungsspannungen werden also auf Zug- und Druckspannungen zurückgeführt, sind also Normalspannungen. Die größten Beanspruchungen treten in den äußersten Punkten auf, mithin die größte Zugspannung für $z = a_1$ und die größte Druckspannung für $z = a_2$. Es ist daher:

$$\sigma_{\max} = \frac{M \cdot a_1}{J} \quad \text{und} \quad \sigma_{\min} = \frac{M \cdot a_2}{J}.$$

$\sigma_{\max}$ und $\sigma_{\min}$ dürfen höchstens gleich der zulässigen Zug- bzw. Druckbeanspruchung werden, d. h.

$$\sigma_{\max} = k_z = \frac{M \cdot a_1}{J} \quad \text{und} \quad \sigma_{\min} = k_d = \frac{M \cdot a_2}{J}. \tag{11}$$

Für Schmiedeeisen und Stahl, für die $k_z = k_d = k$ ist, ergibt sich als Bedingung für eine gute Materialausnutzung:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\min} = k,$$

und somit auch $a_1 = a_2 = a$.

Die Dimensionierungsgleichung ist also

$$k = \frac{M \cdot a}{J} \quad \text{oder} \quad \frac{J}{a} = \frac{M}{k}. \tag{12}$$

J und a sind abhängig von der Querschnittsform und somit gesucht, wenn für ein vorliegendes Biegungsmoment M ein Träger zu berechnen ist.

$\frac{J}{a}$ bezeichnet man als Widerstandsmoment (W) und dieses ist für die meisten Normalprofile direkt in den Profilbüchern gegeben; es kann in solchem Falle das erforderliche Profil unmittelbar gewählt werden nach der Gleichung:

$$W = \frac{M}{k}; \tag{13}$$

worin k die zulässige Zug- und Druckbeanspruchung bedeutet. Es sind also für Schmiedeeisen und Stahl dieselben Werte für k wie bei der Zug- und Druckfestigkeit (siehe § 10, 1) zugrunde zu legen. Beispiele für die Berechnung siehe später.

Ist k_z nicht gleich k_d, so ist als zulässige Biegungsbeanspruchung der kleinere dieser beiden Werte zu wählen, und man wird dann mit Rücksicht auf eine gute Materialausnutzung bei der $\sigma_{\max} = k_z$ und $\sigma_{\min} = k_d$ ist, dem Querschnitt wenn möglich solche Abmessungen geben, daß $\frac{a_1}{a_2} = \frac{k_z}{k_d}$ wird. Bei Gußeisen z. B. mit $k_z = 250$ kg/qcm und $k_d = 500$ kg/qcm wäre bei $a_1 = a_2$, d. h. wenn der Schwerpunkt in halber Höhe liegt, mit einer zulässigen Biegungsspannung von $k = 250$ kg/qcm zu rechnen und nach der Formel $W = \frac{M}{k}$ zu dimensionieren; oder auch, um k_d und k_z voll auszunutzen, die Querschnittsform so zu wählen, daß $\frac{a_1}{a_2} = \frac{k_z}{k_d} = \frac{250}{500} = \frac{1}{2}$ also: $a_1 = \frac{1}{3}h$ und $a_2 = \frac{2}{3}h$ ist, mithin der Schwerpunkt in einem Drittel der Höhe liegt (Abb. 42).

Da aber bei Gußeisen das Proportionalitätsgesetz nicht gilt, und somit auch diese Berechnungen nicht genau zutreffen, empfiehlt es sich, Gußeisen für auf Biegung beanspruchte Teile nicht zu verwenden; dies ist auch mit Rücksicht auf die Sprödigkeit des Gußeisens sehr empfehlenswert.

Abb. 42. Günstige Querschnittsform für Gußeisen.

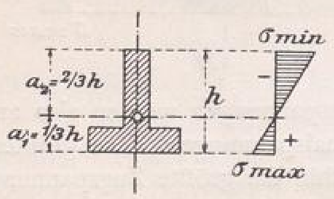
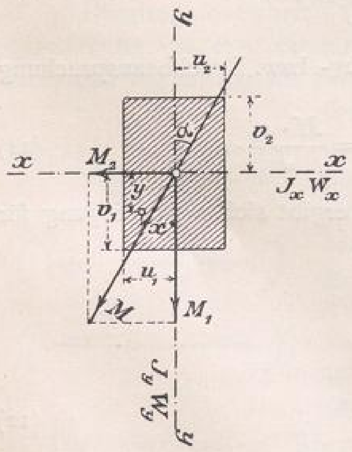


Abb. 43. Kraftebene schneidet den Querschnitt nicht in Hauptachse.



Schneidet die Kraftebene den Querschnitt nicht in einer Hauptachse, so findet die Verdrehung nicht um eine zur Kraftebene senkrecht stehende Achse statt. Die Richtung der Drehachse, d. h. die Richtung der Nullinie ist also von vornherein nicht bekannt. Zur Berechnung zerlegt man das Biegungsmoment M des betreffenden Querschnitts in 2 Seitenkomponenten M_1 und M_2 (Abb. 43), berechnet für jede die zugehörigen Spannungen und addiert diese.

Die Spannung in einem beliebigen Punkte mit dem Abstande y von der x-Achse und dem Abstand x von der y-Achse berechnet sich zu

$$\sigma = \frac{M_1 \cdot y}{J_x} + \frac{M_2 \cdot x}{J_y}.$$

Ferner ist

$$M_1 = M \cdot \cos\alpha; \; M_2 = M \cdot \sin\alpha.$$

M_1 und M_2 können auch aus der Zeichnung direkt abgegriffen werden, wenn man M in einem bestimmten Maßstab aufträgt und graphisch zerlegt.

Es sei J_x = Trägheitsmoment des Ouerschnitts auf die x-Achse bezogen und J_y = Trägheitsmoment auf die y-Achse bezogen. Für die Grenzwerte von x und y treten die größten Spannungen auf; bei positiven Biegungsmomenten ist daher die größte Zugspannung $\sigma_{\max}$ für $x = + u_1$

und $y = + v_1$; die größte Druckspannung $\sigma_{\min}$ für $x = - u_2$ und $y = - v_2$; also:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_1 \cdot v_1}{J_x} + \frac{M_2 \cdot u_1}{J_y} \quad \text{und} \quad \sigma_{\min} = -\left(\frac{M_1 \cdot v_2}{J_x} + \frac{M_2 \cdot u_2}{J_y}\right).$$

Sind die zulässigen Beanspruchungen auf Zug und Druck wieder einander gleich, d. h. ist $k_z = k_d = k$, so wird mit Rücksicht auf eine gute Materialausnutzung $v_1 = v_2 = v$ und $u_1 = u_2 = u$ gewählt und die Bedingungsgleichung heißt dann:

$$k = \frac{M_1 \cdot v}{J_x} + \frac{M_2 \cdot u}{J_y}. \tag{14}$$

Da nun $\frac{J_x}{v} = W_x$ das Widerstandsmoment für die X-Achse und $\frac{J_y}{u} = W_y$ dasjenige für die y-Achse ist, so ergibt sich somit

$$k = \frac{M_1}{W_x} + \frac{M_2}{W_y} = \frac{1}{W_x}\left(M_1 + \frac{W_x}{W_y} \cdot M_2\right).$$

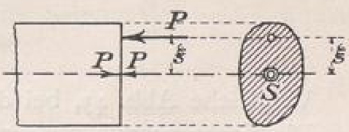
Wird das Verhältnis der beiden Widerstandsmomente $\frac{W_x}{W_y} = c$ gesetzt, so ist $k = \frac{M_1 + c \cdot M_2}{W_x}$, und die Dimensionierungsformel heißt:

$$W_x = \frac{M_1 + c \cdot M_2}{k}, \tag{15}$$

c wird zunächst gewählt (für I-Eisen $c = 7$ bis 9 und für ⊏-Eisen $c = 5$ bis 7, für mittlere Profile) und mittels Annäherung die Rechnung durchgeführt (Beispiele siehe bei der Pfettenberechnung in Abschnitt V).

4. **Zusammengesetzte Festigkeit.** Der häufigste Fall der zusammengesetzten Festigkeit ist derjenige, der durch eine Achsialkraft P und ein Moment M oder auch, was dasselbe ist, durch eine den Querschnitt exzentrisch, d. h. nicht im Schwerpunkt, treffende Kraft erzeugt wird. Den letzten Belastungsfall kann man ersetzen durch eine achsialwirkende Kraft und ein Kräftepaar mit dem Moment $P \cdot \xi$, wenn ξ die Exzentrizität der Kraft ist (Abb. 44). Die durch die Achsialkraft P und das Moment M erzeugten Spannungen addieren sich direkt, da sie beide Normalspannungen sind; selbstredend ist bei der Summierung das Vorzeichen zu berücksichtigen.

Abb. 44. Zusammengesetzte Festigkeit.



Trifft die Kraft P den Querschnitt nicht senkrecht, so kommt für die Normalspannungen die zur Querschnittsebene senkrechte Komponente der Kraft in Betracht; die andere in der Querschnittsebene wirkende Komponente erzeugt Schubspannungen im Querschnitt.

Wird ein Querschnitt durch eine Achsialkraft P und ein Biegungsmoment M beansprucht, so sind bei der Spannungsermittelung wieder zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die Kraft- oder Momentenebene den Querschnitt in einer Hauptachse schneidet oder nicht. Schneidet die Kraftebene den Querschnitt in einer Hauptachse, so ist die Spannung in einem beliebigen Punkte im Abstand z von der zugehörigen Hauptachse:

$$\sigma = \pm \frac{P}{F} + \frac{M \cdot z}{J}, \tag{16}$$

$\frac{P}{F}$ ist positiv oder negativ, je nachdem die Achsialkraft auf Zug oder auf Druck wirkt.