und $y = + v_1$; die größte Druckspannung $\sigma_{\min}$ für $x = - u_2$ und $y = - v_2$; also:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_1 \cdot v_1}{J_x} + \frac{M_2 \cdot u_1}{J_y} \quad \text{und} \quad \sigma_{\min} = -\left(\frac{M_1 \cdot v_2}{J_x} + \frac{M_2 \cdot u_2}{J_y}\right).$$

Sind die zulässigen Beanspruchungen auf Zug und Druck wieder einander gleich, d. h. ist $k_z = k_d = k$, so wird mit Rücksicht auf eine gute Materialausnutzung $v_1 = v_2 = v$ und $u_1 = u_2 = u$ gewählt und die Bedingungsgleichung heißt dann:

$$k = \frac{M_1 \cdot v}{J_x} + \frac{M_2 \cdot u}{J_y}. \tag{14}$$

Da nun $\frac{J_x}{v} = W_x$ das Widerstandsmoment für die $X$-Achse und $\frac{J_y}{u} = W_y$ dasjenige für die $y$-Achse ist, so ergibt sich somit

$$k = \frac{M_1}{W_x} + \frac{M_2}{W_y} = \frac{1}{W_x}\left(M_1 + \frac{W_x}{W_y} \cdot M_2\right).$$

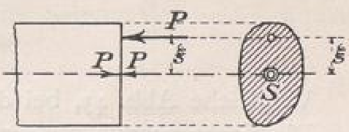
Wird das Verhältnis der beiden Widerstandsmomente $\frac{W_x}{W_y} = c$ gesetzt, so ist $k = \frac{M_1 + c \cdot M_2}{W_x}$, und die Dimensionierungsformel heißt:

$$W_x = \frac{M_1 + c \cdot M_2}{k}, \tag{15}$$

$c$ wird zunächst gewählt (für I-Eisen $c = 7$ bis 9 und für ⊏-Eisen $c = 5$ bis 7, für mittlere Profile) und mittels Annäherung die Rechnung durchgeführt (Beispiele siehe bei der Pfettenberechnung in Abschnitt V).

4. **Zusammengesetzte Festigkeit.** Der häufigste Fall der zusammengesetzten Festigkeit ist derjenige, der durch eine Achsialkraft $P$ und ein Moment $M$ oder auch, was dasselbe ist, durch eine den Querschnitt exzentrisch, d. h. nicht im Schwerpunkt, treffende Kraft erzeugt wird. Den letzten Belastungsfall kann man ersetzen durch eine achsialwirkende Kraft und ein Kräftepaar mit dem Moment $P \cdot \xi$, wenn $\xi$ die Exzentrizität der Kraft ist (Abb. 44). Die durch die Achsialkraft $P$ und das Moment $M$ erzeugten Spannungen addieren sich direkt, da sie beide Normalspannungen sind; selbstredend ist bei der Summierung das Vorzeichen zu berücksichtigen.

Abb. 44. Zusammengesetzte Festigkeit.




Trifft die Kraft $P$ den Querschnitt nicht senkrecht, so kommt für die Normalspannungen die zur Querschnittsebene senkrechte Komponente der Kraft in Betracht; die andere in der Querschnittsebene wirkende Komponente erzeugt Schubspannungen im Querschnitt.

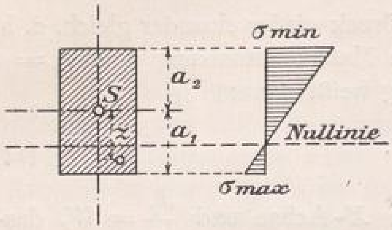
Wird ein Querschnitt durch eine Achsialkraft $P$ und ein Biegungsmoment $M$ beansprucht, so sind bei der Spannungsermittelung wieder zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die Kraft- oder Momentenebene den Querschnitt in einer Hauptachse schneidet oder nicht. Schneidet die Kraftebene den Querschnitt in einer Hauptachse, so ist die Spannung in einem beliebigen Punkte im Abstand $z$ von der zugehörigen Hauptachse:

$$\sigma = \pm \frac{P}{F} + \frac{M \cdot z}{J}, \tag{16}$$

$\frac{P}{F}$ ist positiv oder negativ, je nachdem die Achsialkraft auf Zug oder auf Druck wirkt.

Abb. 45 entspricht einem negativen $\frac{P}{F}$. Die Grenzspannungen treten auf für die Grenzwerte von $z$ und zwar ist bei positivem Biegungsmoment $M$

Abb. 45. Zusammengesetzte Festigkeit.




$$\sigma_{\max} = \pm \frac{P}{F} + \frac{M \cdot a_1}{J}$$

und
$$\sigma_{\min} = \pm \frac{P}{F} - \frac{M \cdot a_2}{J}.$$

Bei $a_1 = a_2 = a$ ergeben sich durch Einsetzung von $\frac{J}{a} = W$ die Werte

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{P}{F} + \frac{M}{W} \quad \text{und} \quad \sigma_{\min} = \pm \frac{P}{F} - \frac{M}{W}. \tag{17}$$

Erzeugt $P$ Zugspannungen, so ist

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \frac{M}{W} \quad \text{und} \quad \sigma_{\min} = \frac{P}{F} - \frac{M}{W}.$$

Wirkt $P$ auf Druck, dann wird

$$\sigma_{\max} = -\frac{P}{F} + \frac{M}{W} \quad \text{und} \quad \sigma_{\min} = -\frac{P}{F} - \frac{M}{W}.$$

Haben $\sigma_{\max}$ und $\sigma_{\min}$ gleiche Vorzeichen, so wird der ganze Querschnitt nur gezogen oder gedrückt; die Nullinie fällt dann außerhalb des Querschnitts. Ist das Vorzeichen von $\sigma_{\max}$ und $\sigma_{\min}$ verschieden, so tritt im Querschnitt teils Zug und teils Druck auf, d. h. die Nullinie fällt in den Querschnitt.

Schneidet die Kraftebene den Querschnitt nicht in einer Hauptachse, so steht die Richtung der Nullinie nicht mehr senkrecht auf der Kraftebene. Man zerlegt dann das Moment wie bei der reinen Biegung in zwei Seitenkomponenten $M_1$ und $M_2$ und es ergibt sich nach S. 312 die Spannung in einem beliebigen Querschnittspunkte

$$\sigma = \pm \frac{P}{F} + \frac{M_1 \cdot y}{J_x} + \frac{M_2 \cdot x}{J_y}. \tag{18}$$

Vergleiche Abb. 43, bei der in $S$ noch eine Achsialkraft $P$ wirkend zu denken ist. Die Grenzspannungen ergeben sich wieder für die Grenzwerte von $y$ und $x$ zu:

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{P}{F} + \frac{M_1 \cdot v_1}{J_x} + \frac{M_2 \cdot u_1}{J_y} \quad \text{und} \quad \sigma_{\min} = \pm \frac{P}{P} - \frac{M_1 \cdot v_2}{J_x} - \frac{M_2 \cdot u_2}{J_y}$$

und bei $M_1 = M_2 = M$; $v_1 = v_2 = v$, wobei $\frac{J_x}{v} = W_x$ und $\frac{J_y}{u} = W_y$ ist,

$$\sigma_{\max} = \pm \frac{P}{F} + \frac{M_1}{W_x} + \frac{M_2}{W_y} \quad \text{und} \quad \sigma_{\min} = \pm \frac{P}{F} - \frac{M_1}{W_x} - \frac{M_2}{W_y}. \tag{19}$$

Hierin ist für $\frac{P}{F}$ je nach der Wirkung von $P$ das positive oder negative Vorzeichen zu wählen. Auch hierbei wird wieder der ganze Querschnitt gezogen oder gedrückt, wenn $\sigma_{\max}$ und $\sigma_{\min}$ gleiche Vorzeichen haben. Die Nullinie fällt dann außerhalb des Querschnitts. Haben $\sigma_{\max}$ und $\sigma_{\min}$ entgegengesetztes Vorzeichen, so liegt die Nullinie im Querschnitt und auf ihrer einen Seite treten Zug-, auf der anderen Seite Druckspannungen auf.

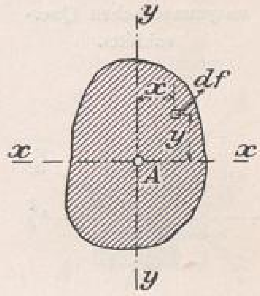
Die Dimensionierungsformel kann analog, wie bei der reinen Biegung gebildet werden.

Die aus Druck und Biegung zusammengesetzte Festigkeit spielt im Hochbau besonders bei exzentrisch belasteten Stützen, sowohl bei eisernen als auch gemauerten, eine große Rolle. Beispiele siehe bei Säulen (Abschnitt III).

Wegen der zusammengesetzten Schub- und Biegungsspannung vergleiche in § 14, 1, e die »Berechnung der Gelenkbolzen«.

**§ 11. Trägheitsmomente.** Wie aus § 10 ersichtlich ist, sind zum Nachweis der Knicksicherheit und zur Berechnung der Biegungsspannungen die Trägheitsmomente erforderlich. Diese sind Flächenmomente höherer Ordnung, und zwar versteht man unter dem Trägheitsmoment eines Querschnitts auf irgend eine Achse die Summe der Produkte aus den unendlich kleinen Flächenteilchen $df$ des Querschnitts und den Quadraten der zugehörigen Abstände von der betreffenden Achse. Diese Achse nennt man Trägheitsachse.

Abb. 46. Trägheitsmoment eines Querschnitts.




Nimmt man z. B. für den in Abb. 46 dargestellten Querschnitt 2 beliebige Achsen $xx$ und $yy$ an, und sind die Abstände eines beliebigen Flächenteilchens von diesen Achsen $y$ und $x$, so ist das Trägheitsmoment bezogen auf die $x$-Achse:

$$J_x = \Sigma y^2 \cdot df$$

und dasjenige bezogen auf die $y$-Achse

$$J^y = \Sigma x^2 \cdot df.$$

Diese beiden Trägheitsmomente nennt man äquatoriale Trägheitsmomente, da die Trägheitsachsen in der Ebene des Querschnitts liegen. Stehen dagegen die Trägheitsachsen senkrecht auf der Ebene des Querschnitts, so spricht man von polaren Trägheitsmomenten ($J_p$), z. B. für eine solche Achse im Punkte $A$ ist

$$J_p = \Sigma \varrho^2 \cdot df, \text{ wobei } \varrho \text{ der direkte Abstand von } A \text{ ist.}$$

Schneiden sich zwei äquatoriale und eine polare Trägheitsachse in einem Punkt, wie in Abb. 46, und stehen die beiden äquatorialen Achsen $x$ und $y$ senkrecht aufeinander, so ist das polare Trägheitsmoment gleich der Summe der beiden äquatorialen Trägheitsmomente, da in diesem Falle $\varrho^2 = x^2 + y^2$:

$$J_p = J_x + J_y. \qquad (20)$$

Neben den Trägheitsmomenten unterscheidet man noch die Zentrifugalmomente und zwar ist $\Sigma x \cdot y \cdot df$ das Zentrifugalmoment des Querschnitts auf die beiden Achsen $x$ und $y$.

In der Festigkeitslehre sind hauptsächlich die äquatorialen Trägheitsmomente von Bedeutung und im besonderen Maße die Trägheitsmomente auf Achsen, die durch den Schwerpunkt gehen und Schwerachsen genannt werden. Für jede Schwerachse ist im allgemeinen das Trägheitsmoment ein anderes, und diejenigen Achsen, die das größte und kleinste Trägheitsmoment aufweisen, nennt man Hauptachsen. Diejenige Hauptachse, für die das Trägheitsmoment ein Maximum ist, wird erste Hauptachse, diejenige für die das Trägheitsmoment ein Minimum ist, zweite Hauptachse genannt. Die beiden Hauptachsen stehen senkrecht aufeinander, und das Zentrifugalmoment des Querschnitts auf die beiden Hauptachsen ist gleich Null.

Hieraus folgt weiter, daß jede Symmetrieachse eine Hauptachse ist, und daß die zugehörige andere Hauptachse auf jener im Schwerpunkt senkrecht steht. Hiernach lassen sich für Querschnitte, die eine Symmetrieachse haben, die Hauptachsen direkt angeben, wie z. B. in Abb. 47 u. 48. Will man für einen unsymmetrischen Querschnitt die Lage der Hauptachsen berechnen, so ermittelt man zunächst die Trägheitsmomente