Lehrbuch des Hochbaues

Grundbau, Steinkonstruktionen, Holzkonstruktionen, Eisenkonstruktionen , Eisenbetonkonstruktionen

Esselborn, Karl

Leipzig, 1908

§ 11. Trägheitsmomente

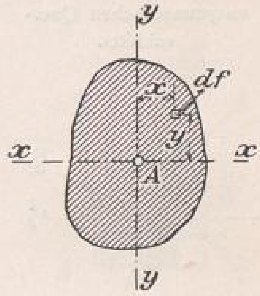
urn:nbn:de:hbz:466:1-50294

Die aus Druck und Biegung zusammengesetzte Festigkeit spielt im Hochbau besonders bei exzentrisch belasteten Stützen, sowohl bei eisernen als auch gemauerten, eine große Rolle. Beispiele siehe bei Säulen (Abschnitt III).

Wegen der zusammengesetzten Schub- und Biegungsspannung vergleiche in § 14, 1, e die »Berechnung der Gelenkbolzen«.

§ 11. Trägheitsmomente. Wie aus § 10 ersichtlich ist, sind zum Nachweis der Knicksicherheit und zur Berechnung der Biegungsspannungen die Trägheitsmomente erforderlich. Diese sind Flächenmomente höherer Ordnung, und zwar versteht man unter dem Trägheitsmoment eines Querschnitts auf irgend eine Achse die Summe der Produkte aus den unendlich kleinen Flächenteilchen df des Querschnitts und den Quadraten der zugehörigen Abstände von der betreffenden Achse. Diese Achse nennt man Trägheitsachse.

Abb. 46. Trägheitsmoment eines Querschnitts.



Nimmt man z. B. für den in Abb. 46 dargestellten Querschnitt 2 beliebige Achsen xx und yy an, und sind die Abstände eines beliebigen Flächenteilchens von diesen Achsen y und x, so ist das Trägheitsmoment bezogen auf die x-Achse:

$$J_x = \Sigma y^2 \cdot df$$

und dasjenige bezogen auf die y-Achse

$$J^y = \Sigma x^2 \cdot df.$$

Diese beiden Trägheitsmomente nennt man äquatoriale Trägheitsmomente, da die Trägheitsachsen in der Ebene des Querschnitts liegen. Stehen dagegen die Trägheitsachsen senkrecht auf der Ebene des Querschnitts, so spricht man von polaren Trägheitsmomenten (J_p), z. B. für eine solche Achse im Punkte A ist

$$J_p = \Sigma \varrho^2 \cdot df, \text{ wobei } \varrho \text{ der direkte Abstand von } A \text{ ist.}$$

Schneiden sich zwei äquatoriale und eine polare Trägheitsachse in einem Punkt, wie in Abb. 46, und stehen die beiden äquatorialen Achsen x und y senkrecht aufeinander, so ist das polare Trägheitsmoment gleich der Summe der beiden äquatorialen Trägheitsmomente, da in diesem Falle $\varrho^2 = x^2 + y^2$:

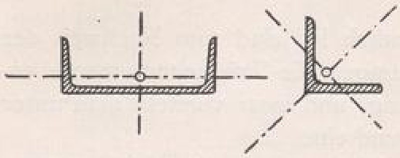
$$J_p = J_x + J_y. \qquad (20)$$

Neben den Trägheitsmomenten unterscheidet man noch die Zentrifugalmomente und zwar ist $\Sigma x \cdot y \cdot df$ das Zentrifugalmoment des Querschnitts auf die beiden Achsen x und y.

In der Festigkeitslehre sind hauptsächlich die äquatorialen Trägheitsmomente von Bedeutung und im besonderen Maße die Trägheitsmomente auf Achsen, die durch den Schwerpunkt gehen und Schwerachsen genannt werden. Für jede Schwerachse ist im allgemeinen das Trägheitsmoment ein anderes, und diejenigen Achsen, die das größte und kleinste Trägheitsmoment aufweisen, nennt man Hauptachsen. Diejenige Hauptachse, für die das Trägheitsmoment ein Maximum ist, wird erste Hauptachse, diejenige für die das Trägheitsmoment ein Minimum ist, zweite Hauptachse genannt. Die beiden Hauptachsen stehen senkrecht aufeinander, und das Zentrifugalmoment des Querschnitts auf die beiden Hauptachsen ist gleich Null.

Hieraus folgt weiter, daß jede Symmetrieachse eine Hauptachse ist, und daß die zugehörige andere Hauptachse auf jener im Schwerpunkt senkrecht steht. Hiernach lassen sich für Querschnitte, die eine Symmetrieachse haben, die Hauptachsen direkt angeben, wie z. B. in Abb. 47 u. 48. Will man für einen unsymmetrischen Querschnitt die Lage der Hauptachsen berechnen, so ermittelt man zunächst die Trägheitsmomente und das Zentrifugalmoment auf zwei aufeinander senkrecht stehende Achsen, die für die Berechnung bequem liegen; sind die Trägheitsmomente auf diese beiden Achsen J_ξ und J_η, das Zentrifugalmoment $= J_{\xi\eta}$ (Abb. 49), so lautet die Bedingung für die Lage der Hauptachsen:

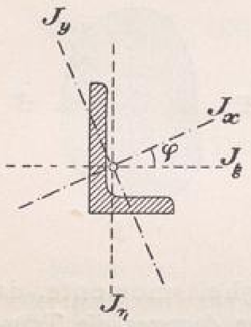
Abb. 47 u. 48. Querschnitte mit einer Symmetrieachse.



$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2 \cdot J_{\xi\eta}}{J_\eta - J_\xi}. \qquad (21)$$

Die hierdurch gegebenen 2 Winkel φ sind um 90° voneinander verschieden und geben die Winkel an, die die gesuchten Hauptachsen mit der ξ-Achse bilden.

Abb. 49. Hauptachsen eines unsymmetrischen Querschnitts.



Hat ein Querschnitt 2 oder mehr Symmetrieachsen, die nicht senkrecht aufeinander stehen, so sind auch mehrere Paare von Hauptachsen vorhanden, wie z. B. beim Quadrat, Kreis usw. Beim Quadrat sind 2 Paare von Hauptachsen vorhanden (x und y, sowie ξ und η in Abb. 50), und zwar sind alle 4 Trägheitsmomente gleich groß, denn es ist $J_x = J_y$ und $J_\xi = J_\eta$; ferner ist $J_x = J_\xi$, da 2 verschiedene Maxima nicht möglich sind. Beim Kreis und Kreisring ist jede Schwerachse eine Symmetrieachse, also auch eine Hauptachse, und die Trägheitsmomente auf sämtliche Schwerachsen sind gleich groß.

Ist das Trägheitsmoment eines Querschnitts auf eine Schwerachse bekannt und gleich J_s, so läßt sich das Trägheitsmoment auf eine zu dieser Schwerachse im Abstand u parallele Achse A (Abb. 51) leicht bilden nach der Formel:

$$J_A = J_s + F \cdot u^2. \qquad (22)$$

Abb. 50. Querschnitt mit mehr als zwei Symmetrieachsen.

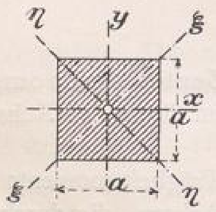


Abb. 51. Trägheitsmoment auf eine zur Schwerachse parallele Achse.

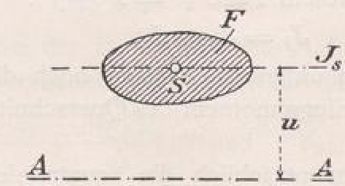
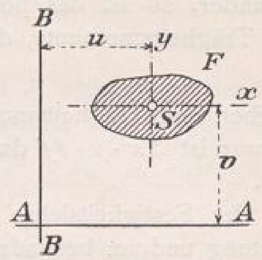


Abb. 52. Zentrifugalmoment eines Querschnitts.



Diese Beziehung läßt sich zur Ermittelung der Trägheitsmomente zusammengesetzter Querschnitte sehr zweckmäßig verwenden, wie die später folgenden Beispiele zeigen.

Analog ist nach Abb. 52 das Zentrifugalmoment für die Achsen A und B.

$$J_{AB} = J_{xy} + F \cdot u \cdot v.$$

Sind die x- und y-Achsen Hauptachsen, so ist

$$J_{xy} = 0, \quad \text{und es wird} \quad J_{AB} = F \cdot u \cdot v.$$

Die Maßeinheiten der Trägheitsmomente und Zentrifugalmomente sind vierter Dimension, z. B. cm^4 oder m^4 usw. Bei Umwandlung von m^4 in cm^4 sind also die Zahlen mit 100^4 zu multiplizieren. Z. B. $2{,}5\ m^4 = 250\,000\,000\ cm^4$.

Trägheitsmomente verschiedener Querschnitte.

1. Rechteck (Abb. 53).

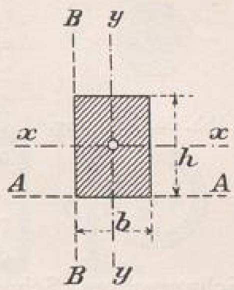
Die Trägheitsmomente auf die Hauptachsen sind:

$$J_x = \frac{b \cdot h^3}{12}; \quad J_y = \frac{h \cdot b^3}{12},$$

für Achse A: $J_A = J_x + F \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{b \cdot h^3}{12} + b \cdot h \cdot \frac{h^2}{4} = \frac{b \cdot h^3}{3}$.

Analog für Achse B: $J_B = \frac{h \cdot b^3}{3}$.

Abb. 53. Rechteck.



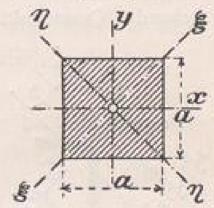
2. Quadrat (Abb. 54).

$$J_x = J_y = \frac{a^4}{12}.$$

Für die beiden anderen Hauptachsen ist J gerade so groß; desgleichen für alle anderen Schwerachsen:

$$J_\xi = J_\eta = \frac{a^4}{12} = J.$$

Abb. 54. Quadrat.



3. Dreieck (Abb. 55).

$$J_x = \frac{b \cdot h^3}{36}.$$

4. Trapez (Abb. 56).

$$J = \frac{6 \cdot b^2 + 6 b \cdot b_1 + b_1^2}{36 \cdot (2 b + b_1)} \cdot h^3.$$

5. I-Querschnitt (Abb. 57).

Berechnet als Differenz von Rechtecken, ergibt sich:

$$J_x = \frac{B \cdot H^3}{12} - \frac{(B - \delta) \cdot (H - 2 d)^3}{12}.$$

Abb. 55. Dreieck.

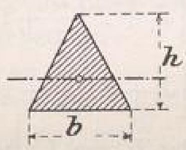


Abb. 56. Trapez.

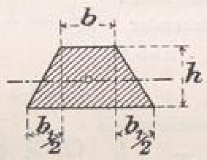
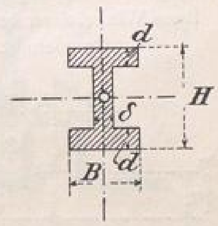


Abb. 57. I-Querschnitt.



Ebenso kann man das Trägheitsmoment eines genieteten Blech-Trägers (Abb. 58) ermitteln:

$$J_x = \frac{B \cdot H^3}{12} - \frac{2 \delta_1 \cdot h_1^3}{12} - \frac{2 b' \cdot h_2^3}{12} - \frac{2 \cdot \lambda \cdot h_3^3}{12}.$$

Abb. 58. Blechträger.

Hiervon ist noch das Trägheitsmoment der Nietlöcher, entweder der horizontalen oder der vertikalen in Abzug zu bringen; nicht beide zugleich, da diese gegeneinander versetzt sind. Für die vertikalen Nietlöcher wäre abzuziehen: $J_{\min} = 4 \cdot f_n \cdot \left(\frac{h_n}{2}\right)^2$, wobei f_n = Querschnittsanteil eines Nietloches und h_n der Schwerpunktsabstand zweier übereinanderliegender Nietlöcher ist.

Als angenäherten Ausdruck für das Trägheitsmoment des genieteten Blechträgers könnte man auch schreiben:

$$J = \frac{\delta \cdot \mathfrak{h}^3}{12} + 2 \cdot f \left(\frac{\mathfrak{h}}{2}\right)^2 = \frac{\mathfrak{h}^2}{2} \left(\frac{\delta \cdot \mathfrak{h}}{6} + f\right),$$

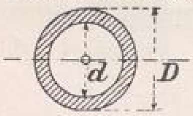
worin $\mathfrak{h}$ = Steghöhe, δ = Stegstärke, f = Fläche jeder Gurtung (Winkel und Deckplatten). Für überschlägliche und vorläufige Berechnungen ist diese Formel oft ausreichend.

6. Kreis und Kreisring (Abb. 59 u. 60).

Abb. 59. Kreis.

Für den Kreis ist $J_s = \frac{d^4 \cdot \pi}{64}$ oder $\frac{\pi \cdot r^4}{4}$, für den Kreisring $J_s = \left(\frac{D^4 - d^4}{64}\right) \pi$ oder $(R^4 - r^4) \frac{\pi}{4}$.

Abb. 60. Kreisring.



Für weitere Querschnittsformen sind die Trägheitsmomente aus der »Hütte« 1905, I, S. 392 usw. ersichtlich; doch dürfte man im allgemeinen mit den angegebenen auskommen.

Sehr zweckmäßig läßt sich die Formel $J = J_s + F \cdot u^2$ zur Berechnung zusammengesetzter Querschnitte verwenden, indem man die in den Profiltabellen angegebenen Trägheitsmomente für die Schwerachsen, Schwerpunktsabstände usw. der einzelnen Teilprofile mit benutzt.

Es seien nachstehend für einige wichtige **Querschnittsformen von Fachwerksstäben, Stützen usw.** die Gleichungen für J_{max} und J_{min} gegeben.[10])

Abb. 61. Aus zwei übereck gestellten Winkeleisen bestehender Querschnitt.

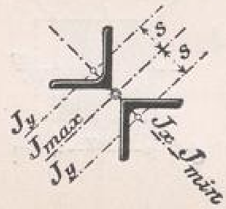


Abb. 62. Aus zwei gleichschenkeligen Winkeleisen bestehender Querschnitt.

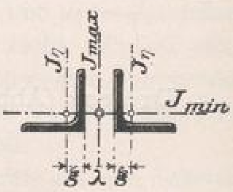


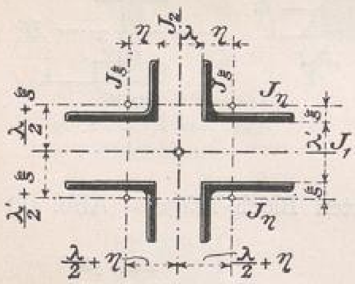
Abb. 61. $\begin{cases} J_{max} = 2 \cdot (J_y + F \cdot s^2), \\ J_{min} = 2 \cdot J_x. \end{cases}$

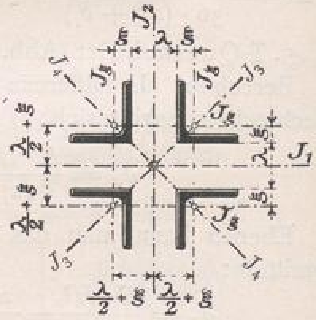
Abb. 62. $\begin{cases} J_{max} = 2 \cdot \left[J_\eta + F \cdot \left(\frac{\lambda}{2} + \xi\right)^2\right], \\ J_{min} = 2 \cdot J_\xi. \end{cases}$

Abb. 63. Aus vier ungleichschenkeligen Winkeleisen bestehender Querschnitt.

Abb. 63. $\begin{cases} J_1 = 4 \cdot \left[J_\eta + F\left(\frac{\lambda'}{2} + \xi\right)^2\right], \\ J_2 = 4 \cdot \left[J_\xi + F \cdot \left(\frac{\lambda}{2} + \eta\right)^2\right]. \end{cases}$

Abb. 64. Aus vier gleichschenkeligen Winkeleisen bestehender Querschnitt.





Ob J_1 oder J_2 zum J_{max} wird, ist hier abhängig von λ und λ'.

Bei gleichschenkeligen Winkeln und $\lambda = \lambda'$ ergeben sich vier Hauptachsen mit J_1, J_2, J_3 und J_4, die alle einander gleich sind (Abb. 64).

$$J_1 = J_2 = J_3 = J_4 = 4 \cdot \left[J_\xi + F \cdot \left(\frac{\lambda}{2} + \xi\right)^2\right].$$

Der gleiche Wert ergibt sich auch für alle anderen Schwerachsen.

Abb. 65. Aus vier Winkeleisen und einem Futterblech bestehender Querschnitt.

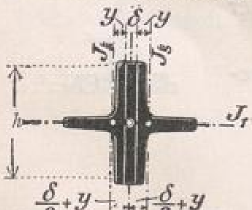


Abb 66. Aus zwei Zoreseisen bestehender Querschnitt.

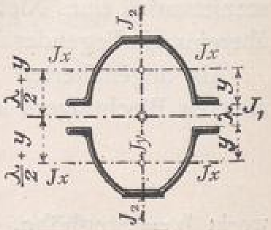


Abb. 65. $\begin{cases} J_1 = 2 \cdot J_y + \frac{\delta \cdot h^3}{12}, \\ J_2 = 2 \cdot \left[J_x + F \cdot \left(\frac{\delta}{2} + y\right)^2\right] + \frac{h \cdot \delta^3}{12}. \end{cases}$

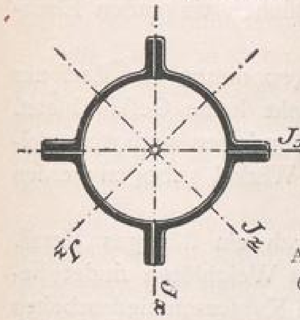
Abb. 66. $\begin{cases} J_1 = 2 \cdot \left[J_x + F\left(y + \frac{\lambda}{2}\right)^2\right], \\ J_2 = 2 \cdot J_y. \end{cases}$

Ob J_1 oder J_2 das Maximum wird, hängt ab von λ.

[10]) Hierbei sind die Bezeichnungen der »Hütte« 1905, zu Grunde gelegt, wonach sich J_x, J_y, J_ξ, J_η und F immer auf ein Profil beziehen.

Bei dem nebenstehenden Querschnitt aus 4 Quadranteisen sind wieder zwei Paare von Hauptachsen (Symmetrieachsen) vorhanden, für die die Trägheitsmomente ebenfalls sämtlich einander gleich sind. Auch für alle anderen Schwerachsen ergeben sich die gleichen Trägheitsmomente.

Abb. 67. Aus vier Quadranteisen bestehender Querschnitt.



$J = J_x = J_z$; die Werte hierfür sind für die verschiedenen Durchmesser in der »Hütte« gegeben.

Abb. 68. Aus zwei ⊏-Eisen bestehender Querschnitt.

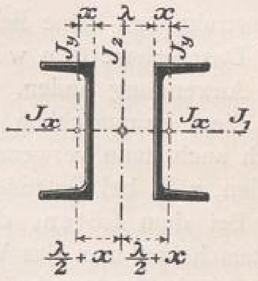
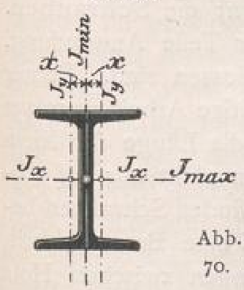


Abb. 68. $$\begin{cases} J_1 = 2 \cdot J_x, \\ J_2 = 2 \cdot \left[J_y + F \cdot \left(\frac{\lambda}{2} + x\right)^2\right]. \end{cases}$$

In der »Hütte« und auch in den meisten anderen Profiltabellen sind für die verschiedenen ⊏-Profile die Werte für λ (i) angegeben, für die $J_1 = J_2$ wird.

Abb. 69. Aus zwei dicht nebeneinander liegenden ⊏-Eisen bestehender Querschnitt.



Ist $\lambda < i$ so wird $J_1 = J_{\max}$ und $J_2 = J_{\min}$.
Ist $\lambda > i$ so wird $J_2 = J_{\max}$ und $J_1 = J_{\min}$.
Für $\lambda = 0$ (Abb. 69) ist $J_2 = J_{\min} = 2 \cdot (J_y + F \cdot x^2)$, oder auch, da J_b meist für ein ⊏-Eisen angegeben ist,

$$J_{\min} = 2 \cdot J_b.$$

Abb. 70. Aus vier ⅃-Eisen bestehender Querschnitt.

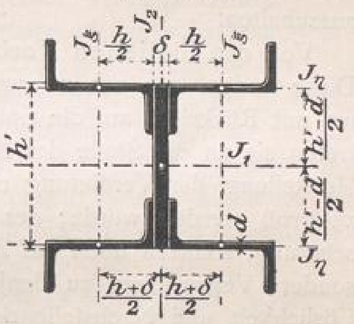


Abb. 70. $$\begin{cases} J_1 = \dfrac{\delta \cdot h'^3}{12} + 4 \cdot \left[J_\eta + F \cdot \left(\dfrac{h' - d}{2}\right)^2\right], \\ J_2 = \dfrac{h' \cdot \delta^3}{12} + 4 \cdot \left[J_\xi + F \cdot \left(\dfrac{h + \delta}{2}\right)^2\right]. \end{cases}$$

Für unregelmäßige, krummlinig begrenzte Querschnitte erfolgt die Ermittelung der Trägheitsmomente am zweckmäßigsten auf graphischem Wege, worauf hier jedoch nicht näher eingegangen werden kann.

II. Die Konstruktionselemente.

A. Die Verbindungsmittel der Eisenkonstruktionen.

§ 12. Die verschiedenen Arten der Verbindungsmittel. Die Mittel, welche zur Verbindung zweier oder mehrerer Konstruktionsteile verwendet werden, sind je nach den an sie gestellten Anforderungen und dem Zweck, dem sie dienen, verschieden. Man unterscheidet lösliche und unlösliche Verbindungen und demgemäß lösliche und unlösliche Verbindungsmittel.

Unlöslich nennt man eine Verbindung, wenn eine spätere Trennung der verbundenen Teile nur durch Zerstörung der Verbindungsmittel möglich ist. Lösliche Verbindungen sind solche, die jederzeit auseinander genommen werden können, ohne daß die Konstruktionsteile zerstört werden.

Die löslichen Verbindungsmittel teilt man noch ein in feste und regulierbare, je nachdem die Verbindung eine unveränderlich feste oder eine nachstellbare ist.