Lehrbuch des Hochbaues

Grundbau, Steinkonstruktionen, Holzkonstruktionen, Eisenkonstruktionen , Eisenbetonkonstruktionen

Esselborn, Karl

Leipzig, 1908

§ 23. Die Berechnung der Balkenträger

urn:nbn:de:hbz:466:1-50294

einzelnen Säulen normale Fuß- und Kopfkonstruktionen gewählt werden. Diese Anordnung hat den Vorteil, daß jede einzelne Säule den auf sie entfallenden Kräften entsprechend dimensioniert werden kann, und daß die Montage hierbei mit weniger Schwierigkeiten verbunden ist, als bei den durchlaufenden Säulen. Selbstredend muß für eine zentrische und klare Übertragung der einzelnen Säulenlasten, sowie für eine sachgemäße Auflagerung der Deckenträger und Unterzüge Sorge getragen werden.

IV. Balkenträger.

§ 22. Die Träger im allgemeinen. Träger sind in bestimmten Punkten gelagerte Konstruktionen, welche Lasten und Kräfte aufzunehmen und auf die betreffenden Lagerpunkte zu übertragen haben. Die Kräfte, die auf die Auflagerpunkte übertragen werden, nennt man Auflagerdrücke. Je nach der Art der Kraftübertragung und der Wirkung der Auflager unterscheidet man zwei Hauptarten von Trägern, Balkenträger und Bogenträger. Balkenträger sind solche Tragkonstruktionen, die bei lotrechter Belastung senkrechte Auflagerdrücke erzeugen, während Bogenträger bei lotrechter Belastung schräg gerichtete Auflagerdrücke zur Folge haben.

Als Bogenträger sind auch solche Konstruktionen aufzufassen, bei denen die Horizontalkomponenten durch Zugstangen usw. aufgenommen werden und die auf die Auflager selbst somit nur lotrechte Kräfte übertragen, also äußerlich als Balkenträger wirken, jedoch zur Berechnung der inneren Spannungen als Bogenträger aufzufassen sind. Solche Träger werden als Bogenträger mit aufgehobenem Horizontalschub bezeichnet.

An dieser Stelle sollen nur die Balkenträger zur Besprechung kommen. Wegen der Bogenträger, die auch im Hochbau, z. B. für größere Dachkonstruktionen usw., mitunter Verwendung finden, sei auf die betreffenden Werke der Literatur verwiesen.

Bei den Balkenträgern unterscheidet man, je nach der Lagerung derselben: Träger auf zwei Stützen, Träger auf mehreren Stützen (kontinuierliche oder durchlaufende Träger), Krag- oder Konsolträger, die an dem einen Ende eingespannt und an dem anderen frei sind, beiderseits eingespannte Träger usw. Hinsichtlich der Konstruktion der Träger selbst unterscheidet man noch vollwandige und gegliederte Träger (Fachwerksträger).

Die vollwandigen Balkenträger dienen im Eisenhochbau in der Hauptsache als Deckenträger und Unterzüge, zur Überspannung von Maueröffnungen und zur Konstruktion von Balkonen, Erkern usw. Für kleinere Verhältnisse können direkt Walzprofile, wie L-, T-, Ⳇ- und I-Eisen als Träger Verwendung finden, während für größere Verhältnisse genietete Blechträger einfachen und kastenförmigen Querschnitts gewählt werden. Wenn auch diese Blechträger nicht mehr ausreichen oder wegen ihres großen Gewichtes nicht empfehlenswert sind, wird man Fachwerksträger zur Ausführung bringen. Diese letzteren kommen besonders bei den Dachkonstruktionen (siehe Abschnitt V) zur Verwendung.

Zwecks Erzielung einer klaren Lagerung der Träger erhalten die Lagerpunkte eine besondere konstruktive Ausbildung, welche die der Berechnung zugrunde gelegten Lagerbedingungen möglichst gewährleisten.

§ 23. Die Berechnung der Balkenträger.

1. Allgemeines. Die Berechnung der Träger beruht auf den Gesetzen des Gleichgewichts, das zwischen den vorliegenden Lasten, Auflagerkräften und den inneren Spannungen bestehen muß. Wenn die durch das Gleichgewicht gegebenen Bedingungen zur Berechnung der Auflagerkräfte und inneren Spannungen genügen, so nennt man die

Konstruktion statisch bestimmt; reichen jedoch die Gleichgewichtsbedingungen zur Ermittelung dieser Unbekannten nicht aus, so spricht man von statisch unbestimmten Konstruktionen. Je nachdem die durch das Gleichgewicht nicht bestimmbaren Größen äußere Kräfte (Auflagerdrücke) oder innere Kräfte (Stabkräfte, Spannungen usw.) sind, liegen äußerlich bzw. innerlich statisch unbestimmte Konstruktionen vor. Die nicht bestimmbaren Größen werden auch als Überzählige bezeichnet und je nach deren Anzahl unterscheidet man einfach, zweifach, und mehrfach statisch unbestimmte Konstruktionen.

2. **Die Belastungen** der Träger setzten sich zusammen aus dem Eigengewicht, der Träger selbst und der durch die Träger zu tragenden Bauteile sowie den Nutzlasten (Verkehrslasten, zufällige Lasten). Das Eigengewicht der Träger selbst wirkt als gleichmäßig über die Träger verteilte (kontinuierliche) Belastung; die Gewichte der zu tragenden Konstruktionsteile können ebenfalls gleichmäßig verteilt oder in einzelnen Punkten auf die Träger als Einzellasten gelagert sein. Auch die Nutzlasten können als kontinuierliche Belastung oder als Einzellasten auf die Träger wirken. So stellt z. B. eine an sich gleichmäßig verteilte Belastung einer Decke für die Deckenträger selbst eine kontinuierliche Belastung vor, während ein die Deckenträger stützender Unterzug in den Auflagerpunkten der Deckenträger die an sich gleichmäßige auf die Decke verteilte Nutzlast als Einzellasten aufzunehmen hat. Eine solche Lastübertragung wird auch als indirekte bezeichnet.

Die Größen der verschiedenen Belastungen sind vor der Berechnung der Auflagerdrücke und inneren Kräfte, soweit sie nicht gegeben sind, zu ermitteln. Die Nutzlasten werden in den einzelnen Fällen fast immer vorgeschrieben sein, bzw. müssen sie dem Zweck entsprechend gewählt werden, wobei selbstredend der jeweils ungünstige Fall ins Auge zu fassen ist. Die Eigengewichte der zu tragenden Konstruktionsteile (Decken, Mauern usw.) können nach den jeweiligen Abmessungen, unter zu Grundelegung der betreffenden Einheitsgewichte ermittelt werden.

In der folgenden Zusammenstellung seien die Einheitsgewichte (Eigengewichte) der wichtigsten Baustoffe, die event. für die Belastung von Trägern in Betracht kommen können, angeführt.

Eigengewichte von Baustoffen. [12])

Baustoff	kg/cbm	Baustoff	kg/cbm
Erde, Lehm und Sand	1600	Eisenbeton	2400
Kies	1800	Tannenholz	600
Klinkermauerwerk in Zementmörtel	1800	Kiefernholz	650
Ziegelmauerwerk aus vollen Steinen	1600	Buchenholz	750
Desgl. aus porigen Steinen	1000—1200	Eichenholz	800
Desgl. aus Lochsteinen	1300	Gußeisen	7250
Desgl. aus porigen Lochsteinen	900—1100	Schweißeisen	7800
Mauerwerk aus Schwemmsteinen	850—900	Flußeisen	7850
» » Kalksteinen	2600	Bronze	8600
» » Sandstein	2400	Kupfer	8900
» » Granit und Marmor	2700	Zink (gegossen)	6860
Beton je nach Zusammensetzung	1800—2300	» (gewalzt)	7200

Zur Berechnung von Deckenträgern und Deckenunterzügen seien noch folgende Gewichte von Massivdecken gegeben, wobei für die gewölbten Kappen ein Stich von

[12]) Teils nach den Vorschriften der Bauabteilung des preußischen Ministeriums der öffentlichen Arbeiten und der Berliner Baupolizei.

$\frac{1}{8}$ angenommen ist. In den Gewichten ist eine Verfüllung mit Sand oder Koksasche, einschließlich Hintermauerung bis Scheitelhöhe, sowie Lagerhölzer von 10/10 cm in 0,8 m Abstand, und Dielen (3,5 cm) mit inbegriffen, jedoch das Gewicht der eisernen Träger ausgeschlossen.

Preußische Kappe bis 2,0 m Spannweite, $\frac{1}{2}$ Stein stark, aus vollen Steinen	370 kg/qm
Desgl. aus porigen oder Lochsteinen	310 „
Desgl. aus Schwemmsteinen	260 „
Preußische Kappe 2 bis 3,0 m Spannweite, $\frac{1}{2}$ Stein stark, aus vollen Steinen	440 „
Desgl. aus porigen oder Lochsteinen	380 „
Desgl. aus Schwemmsteinen	330 „
Kappe aus Beton mit 1,5 m Spannweite	370 „

Zu diesen amtlichen Vorschriften könnte man noch anführen:

Betondecke gestampft, oben mit Schlackenausfüllung	275 bis 325 kg/qm
Betondecke, zwischen Trägern gewölbt, oben wagerecht abgeglichen	420 bis 500 „
Betondecke über Belageisen, Wellblech oder Buckelplatten	250 bis 350 „

Für besonders schwer belastete Decken, wie solche für Speicher, Kellereien, Lagerräume usw. oft vorkommen, müssen die Deckengewichte nach den erforderlichen Abmessungen ermittelt werden.

Die Nutzlasten oder zufälligen Lasten können je nach dem Zweck der Konstruktionen verschieden sein. Für Deckenträger und Unterzüge kommen hauptsächlich Menschengedränge, Belastung durch Möbel, zu lagernde und aufzustapelnde Stoffe usw. in Betracht. Sind die Nutzlasten von vornherein nicht gegeben, so müssen sie aus den näheren Angaben über die Art der Belastung ermittelt werden. Als mittlere Werte für Nutzlasten von Zwischendecken können folgende Angaben zugrunde gelegt werden:

Nutzlast für Wohn- und kleine Dienstgebäude	250 kg/qm
„ „ größere Geschäftsgebäude	400 kg/qm
„ „ Versammlungssäle	400 bis 450 kg/qm
„ „ Decken unter Durchfahrten oder befahrbaren Höfen	800 kg/qm

(eventl. sind auch größere Einzellasten für Raddrücke usw. zu berücksichtigen).

Nutzlast für Treppen	400 bis 500 kg/qm
Menschengedränge	400 bis 500 kg/qm
Heu und Stroh	100 kg/cbm
Leichtere Frucht (Hafer u. kleine Gerste)	450 bis 500 kg/cbm
Schwerere Frucht (Große Gerste, Roggen, Weizen)	650 bis 750 kg/cbm
Erbsen, Bohnen, Linsen	850 kg/cbm
Mehl	700 kg/cbm
Kartoffel, Zucker	700 bzw. 750 kg/cbm
Torf, Braunkohlen	600 bzw. 650 kg/cbm
Steinkohlen	900 kg/cbm
Koks	450 kg/cbm

Sind die angeführten Stoffe in Säcke gefüllt, so ist das 0,8 fache der gegebenen Werte zu wählen.

Aktengerüste und Bücherschränke	500 bis 600 kg/cbm.

Eventuell nötige weitere Angaben können aus den betreffenden Handbüchern entnommen werden.

Das Eigengewicht der Träger selbst ist von vornherein nicht bekannt; es muß deshalb für die Berechnung vorläufig geschätzt, in die Belastung mit eingerechnet und nach der Dimensionierung nachgeprüft bezw. korrigiert werden. Oft genügt es auch, das Trägergewicht bei der Dimensionierung ganz zu vernachlässigen und die geringe Vergrößerung der Spannung durch das Trägergewicht nachträglich nachzuweisen, da der verhältnismäßig geringe Einfluß des Trägergewichts von untergeordneter Bedeutung ist.

3. **Auflagerdrücke und innere Kräfte.** Nachdem die äußeren Belastungen der Träger bestimmt sind, kann zu der Berechnung der Auflagerdrücke und dann zur Ermittelung der innern Kräfte übergegangen werden. Die Auflagerkräfte stehen mit den Belastungen im Gleichgewicht und sind demgemäß mit Hilfe der hierdurch gegebenen Bedingung zu ermitteln. Für ebene Konstruktionen lauten die Gleichgewichtsbedingungen:

1. Die Summe aller Vertikalkräfte bzw. aller Vertikalkomponenten der Kräfte ist $= 0$; $\Sigma V = 0$.
2. Die Summe aller Horizontalkräfte bzw. aller Horizontalkomponenten der Kräfte ist ebenfalls $= 0$; $\Sigma H = 0$.
3. Die Summe aller Momente sämtlicher Kräfte bezogen auf einen beliebigen Drehpunkt ist gleichfalls $= 0$; $\Sigma M = 0$.

Aus diesen 3 Bedingungen lassen sich die Auflagerkräfte immer bestimmen, wenn die Anzahl der Auflagerunbekannten nicht mehr als drei ist. Doch dürfen auch nicht weniger als 3 Unbekannte vorhanden sein, da in diesem Falle der Träger labil gelagert ist; d. h. es können Belastungsfälle vorkommen, für welche ein Gleichgewicht nicht möglich ist, also die Kräfte nicht aufgenommen werden können. Im allgemeinen erhält deshalb ein Träger eine solche Lagerung, daß 3 Auflagerunbekannte vorhanden sind; der Träger ist dann statisch bestimmt. Eine solche statisch bestimmte Lagerung liegt z. B. vor, wenn ein Träger durch ein festes Auflager (mit 2 Unbekannten) und ein bewegliches Auflager (mit einer Unbekannten) gestützt ist (Abb. 364).

Das feste Auflager hat den Zweck, bei allgemeiner Belastung mit horizontalen und vertikalen bzw. schrägen Kräften neben der auf es entfallenden lotrechten Kraft noch die Resultierende der Horizontalkomponenten aufzunehmen, während das lose Auflager nur eine Kraft senkrecht zu seiner Bewegungsrichtung übertragen kann. Sind alle äußeren Kräfte lotrecht, so erhalten die beiden Auflager nur senkrechte Belastungen. Das bewegliche Auflager dient noch gleichzeitig dazu die durch die Temperaturschwankungen bedingten Längenänderungen der Träger zuzulassen.

Abb. 364. Berechnung der Auflagerdrücke. 1. Beispiel.

Die rechnerische Ermittelung der Auflagerunbekannten mit Hilfe der 3 Gleichgewichtsbedingungen sei nachstehend an einigen Beispielen vorgeführt: So ergeben sich z. B. für den allgemeinen Belastungsfall nach Abb. 364 die 3 Gleichungen:

1. Aus $\Sigma H = 0$: $H - P_3 \cdot \cos \alpha = 0$

$$H = P_3 \cdot \cos \alpha.$$

2. Aus $\Sigma M = 0$: für Drehpunkt in A:

$$P_1 \cdot a_1 + P_2\, a_2 + P_3 \cdot \sin \alpha \cdot a_3 - B \cdot l = 0$$

$$B = \frac{P_1 \cdot a_1 \cdot + P_2 \cdot a_2 + P_3 \cdot \sin \alpha \cdot a_3}{l}.$$

3. Aus $\Sigma V = o$:

$$A + B - P_1 - P_2 - P_3 \cdot \sin \alpha = o$$

$$A + \frac{P_1 \cdot a_1 + P_2 \cdot a_2 + P_3 \cdot \sin \alpha \cdot a_3}{l} - P_1 - P_2 - P_3 \cdot \sin \alpha = o$$

$$A = \frac{P_1 (l - a_1) + P_2 \cdot (l - a_2) + P_3 \cdot \sin \alpha \cdot (l - a_3)}{l}$$

$$= \frac{P_1 \cdot b_1 + P_2 \cdot b_2 + P_3 \cdot \sin \alpha \cdot b_3}{l}.$$

An Stelle der 3 Gleichungen $\Sigma V = o$, $\Sigma H = o$ und $\Sigma M = o$ kann auch die Momentengleichung zweimal für verschiedene Drehpunkte und noch eine von den Gleichungen $\Sigma H = o$, $\Sigma V = o$ angewendet werden. So ergibt sich z. B. die letzte Gleichung für den Auflagerdruck A direkt aus der Momentengleichung für den Drehpunkt B. Mitunter ist es auch vorteilhaft, dreimal die Momentengleichung für drei verschiedene Drehpunkte zu benutzen. In der Regel empfiehlt es sich, die lotrechten Auflagerdrücke A und B mit Hilfe der Momentengleichungen für B bzw. A und die Horizontalkomponente H des festen Auflagers nach $\Sigma H = o$ zu bestimmen. Mit Hilfe von $\Sigma V = o$ kann man die so gefundenen Werte von A und B kontrollieren.

Wenn alle äußeren Belastungen lotrecht sind, hat auch das feste Auflager nur eine senkrechte Kraft aufzunehmen. Eine solche Belastungsweise spielt bei den Balkenträger des Hochbaues — Dachstuhlkonstruktionen und besondere Fälle ausgenommen — fast durchweg die Hauptrolle. Man hat hierbei also nur die lotrechten Auflagerdrücke A und B zu bestimmen, was wiederum am zweckmäßigsten mit den Gleichungen $\Sigma M = o$ für Drehpunkt B bzw. für Drehpunkt A geschieht. Zur Kontrolle muß $A + B =$ der Summe der äußeren Belastungen sein.

Beispiel (Abb. 365): Aus $\Sigma M = o$ für Drehpunkt B folgt: $A = \frac{P_1 \cdot b_1 + P_2 \cdot b_2}{l}$,

aus $\Sigma M = o$ für Drehpunkt A: $B = \frac{P_1 \cdot a_1 + P_2 \cdot a_2}{l}$.

$$\text{Kontrolle: } A + B = \frac{P_1 \cdot b_1 + P_2 \cdot b_2 + P_1 \cdot a_1 + P_2 \cdot a_2}{l} = \frac{P_1 \cdot (a_1 + b_1) + P_2 \cdot (a_2 + b_2)}{l}$$

$$= \frac{P_1 \cdot l + P_2 \cdot l}{l} = P_1 + P_2.$$

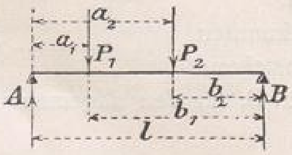


Abb. 365. Berechnung der Auflagerdrücke. 2. Beispiel.

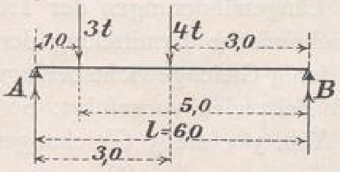


Abb. 366. Berechnung der Auflagerdrücke. Zahlenbeispiel.

Zahlenbeispiel (Abb. 366): $A = \frac{3 \cdot 5{,}0 + 4 \cdot 3{,}0}{6{,}0} = \frac{15 + 12}{6{,}0} = \frac{27}{6} = 4{,}5$ t,

$$B = \frac{3 \cdot 1{,}0 + 4 \cdot 3{,}0}{6{,}0} = \frac{3 + 12}{6} = \frac{15}{6} = 2{,}5 \text{ t}.$$

Kontrolle: $A + B = 4{,}5 + 2{,}5 = 7$ t u. $P_1 + P_2 = 3 + 4 = 7$ t.

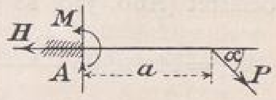
Bei symmetrischer Belastung sind die beiden Auflagerdrücke ebenfalls symmetrisch, also einander gleich. So ist z. B. bei einer Einzellast P in der Mitte des Trägers $A = B = \frac{P}{2}$ und bei einer über die ganze Trägerlänge gleichmäßig verteilten Belastung für das lfd. Meter $A = B = p \cdot \frac{l}{2}$.

Die Auflager von Trägern, die nur lotrechte Lasten aufzunehmen haben, werden in kleineren Verhältnissen wie bei Deckenträgern, Unterzügen usw. meist gleichartig ausgebildet, d. h. es wird kein Unterschied zwischen dem festen und dem beweglichen Auflager gemacht. Die Träger werden dann gewöhnlich auf die Auflagersteine direkt oder unter Benutzung einer besonderen Auflagerplatte aufgelegt und meist eingemauert. Auf die Längenänderungen durch Temperaturschwankungen braucht hierbei in der Regel keine Rücksicht genommen zu werden, da diese bei solchen kleinen Verhältnissen eine untergeordnete Rolle spielen. Bei Trägern von größeren Spannweiten, die höheren Temperaturschwankungen ausgesetzt sind, ist mit Rücksicht auf die hierdurch bedingten bedeutenderen Längenänderungen auf eine sachgemäße Lagerausbildung Wert zu legen (siehe Lager der Balkenträger).

Konsol- oder Kragträger werden diejenigen Träger genannt, die nur an einem Ende gelagert sind; damit Gleichgewicht möglich ist und die äußeren Kräfte getragen werden können, muß mit der Lagerung eine Einspannung verbunden sein. Die Einspannungsstelle vertritt dann drei Unbekannte, eine senkrechte und wagerechte Komponente der Auflagerreaktion sowie das Einspannungsmoment; der Träger ist also statisch bestimmt. Die drei Auflagerunbekannten V, H und M können mit Hilfe der drei Gleichgewichtsbedingungen $\Sigma V = 0$, $\Sigma H = 0$ und $\Sigma M = 0$ bestimmt werden. So ist z. B. für Abb. 367:

$$A - P \cdot \sin\alpha = 0, \qquad A = P \cdot \sin\alpha,$$
$$H - P \cdot \cos\alpha = 0, \qquad H = P \cdot \cos\alpha,$$
$$M - P \cdot \sin\alpha \cdot a = 0, \qquad M = P \cdot \sin\alpha \cdot a.$$

Abb. 367. Konsol oder Kragträger.



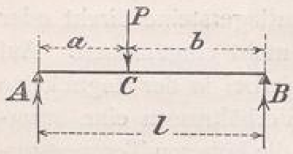
Wenn die Belastungen sämtlich wieder lotrecht sind, so wird $H = 0$.

Wird bei einem, an dem einen Ende eingespannten Träger das andere Ende noch unterstützt (siehe die Zusammenstellung S. 386), so hat der Träger eine Unbekannte mehr als Gleichungen durch das Gleichgewicht gegeben sind; er ist also einfach statisch unbestimmt.

Im Hochbau kommen ferner sehr oft Träger zur Verwendung, die über mehrere Stützen hinweglaufen, z. B. wenn Deckenträger zwischen ihren Endauflagern noch auf einem oder mehreren Unterzügen aufliegen und so außer den Endstützen noch Zwischenstützen erhalten haben. Ist ein Zwischenlager vorhanden, so ist der Träger einfach statisch unbestimmt, bei zwei oder mehr Zwischenauflagern zwei- bzw. mehrfach statisch unbestimmt. In der Regel haben solche Träger (kontinuierliche Träger) des Hochbaues nur lotrechte Lasten zn tragen, und es wird fast durchweg auf eine besondere Ausbildung der Lager als bewegliche oder feste Lager keine besondere Rücksicht genommen. Ist bei größeren, über mehrere Auflager hinweglaufende Träger Wert auf die statische Bestimmtheit zu legen, so kann diese durch Einfügen von Gelenken erreicht werden. Solche Gelenkträger werden auch als GERBERsche Träger bezeichnet, doch möge auf diese hier nicht näher eingegangen werden. Die für die verschiedenen Trägerarten und die im Hochbau häufig vorkommenden Belastungsfälle auftretenden Auflagerdrücke sind aus der später folgenden Zusammenstellung ersichtlich.

Nachdem die Auflagerdrücke der Träger ermittelt sind, kann zur Bestimmung der inneren Kräfte übergegangen werden. Als innere Kräfte treten bei den vollwandigen Trägern Biegungsmomente, Querkräfte und Schubkräfte auf. Die Dimensionierung der Träger hat in erster Linie nach den Biegungsmomenten zu erfolgen. Wegen der Berechnung auf Biegung wird auf § 10, 3 verwiesen. Man hat hiernach für die jeweils vorliegenden Träger die ungünstigsten Biegungsmomente zu bestimmen und diese den Spannungsberechnungen bzw. der Dimensionierung zugrunde zu legen. Derjenige Querschnitt, bei dem das größte Biegungsmoment bei der ungünstigsten Belastungsweise auftritt, wird als **gefährlichster Querschnitt** bezeichnet. Bei einer Belastung durch Einzellasten liegt dieser immer in dem Angriffspunkt einer dieser Lasten; so ist z. B. für Abb. 368 das Moment für den gefährlichsten Querschnitt C: $M_C = A \cdot a = \frac{P \cdot a \cdot b}{l}$.

Abb. 368.
Träger mit einer Einzellast.



Das **größte Moment für einen Balken auf zwei Stützen** durch eine Einzellast P tritt auf für den Querschnitt in der Mitte, wenn die Last in diesem Querschnitt

Abb. 369. Ungünstigste Laststellung für Träger mit Einzellast.

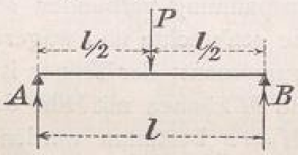
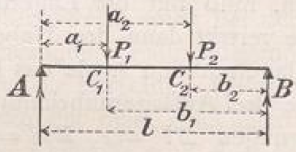


Abb. 370.
Träger mit zwei Einzellasten.



liegt, und ist $M_{\text{mitte}} = A \cdot \frac{l}{2} = \frac{P \cdot l}{4}$ (Abb. 369). Ist der Träger durch zwei Einzellasten belastet (Abb. 370) so ist:

$$M_{C_1} = A \cdot a_1 = \frac{(P_1 \cdot b_1 + P_2 \cdot b_2)}{l} \cdot a_1 \text{ und } M_{C_2} = B \cdot b_2 = \frac{(P_1 \cdot a_1 + P_2 \cdot a_2)}{l} \cdot b_2.$$

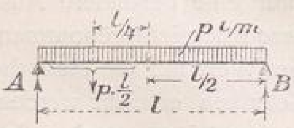
Der größere dieser beiden Werte ist der weiteren Berechnung zugrunde zu legen und zeigt den gefährlichen Querschnitt an.

Ganz analog ist bei mehreren Lasten zu verfahren; für die verschiedenen Lastpunkte sind die Momente zu ermitteln, und das größte Moment ist für die Dimensionierung maßgebend. Der gefährlichste Querschnitt wird also hierbei durch Vergleichsrechnung gefunden.

Wenn die Belastung gleichmäßig über die ganze Trägerlänge verteilt ist (kontinuierliche Belastung), so tritt das größte Moment in der Mitte des Balkens auf. Ist diese kontinuierliche Last $= p$ t/m und die Stützweite des Trägers $= l$ in m, so ist dieses Moment (nach Abb. 371)

$$M_{\text{mitte}} = \frac{A \cdot l}{2} - \frac{p \cdot l}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{p \cdot l}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{p \cdot l^2}{8} = \frac{p \cdot l^2}{8}.$$

Abb. 371. Träger mit gleichmäßig verteilter Belastung.

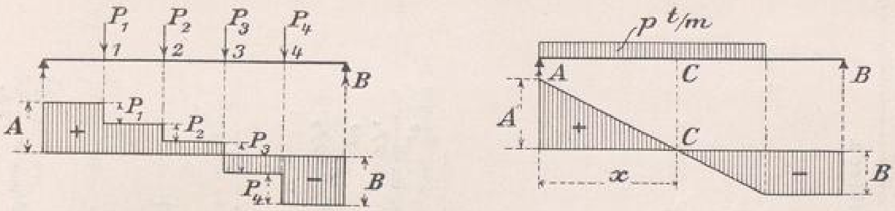


Allgemein läßt sich der Querschnitt, für den bei einer vorliegenden Belastung das größte Moment auftritt, leicht mit Hilfe der Querkraft ermitteln. Unter der **Querkraft eines Querschnitts** versteht man die Summe der Kräfte auf der einen Seite des betreffenden Querschnitts, wobei die auf dessen linker Seite nach oben wirkenden Kräfte positiv, die nach unten wirkenden negativ einzuführen sind. So ist z. B. für Abb. 368

die Querkraft der Querschnitte links von C: $Q = A$ und der Querschnitte rechts von C: $Q = A - P = -B$. Für Abb. 370 ist $Q_{A \text{ bis } C_1} = A$, $Q_{C_1 \text{ bis } C_2} = A - P_1$ oder $= -B + P_2$ und $Q_{C_2 \text{ bis } Z} = -B$. Nach Abb. 371 ist die Querkraft des Querschnitts in der Mitte: $Q_{\text{mitte}} = A - p \cdot \frac{l}{2} = o$.

Die Querkraft kann als Merkmal für den gefährlichsten Querschnitt (größtes Biegungsmoment) Verwendung finden insofern, daß das größte Biegungsmoment für denjenigen Querschnitt auftritt, für den die Querkraft $= o$ ist, bzw. von positiv in negativ übergeht. Sind z. B. für die in den Abb. 372 u. 373 dargestellten Belastungsfälle die Querkräfte der verschiedenen Querschnitte durch die Ordinaten der gezeichneten Diagramme gegeben,

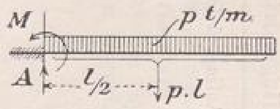
Abb. 372 u. 373. Bestimmung des gefährlichsten Querschnitts.



so stellen die Querschnitte 3 bzw. C die gefährlichsten Querschnitte dar, da für Querschnitt 3 die positive Querkraft in die negative übergeht ($A - P_1 - P_2$ positiv, $A - P_1 - P_2 - P_3$ negativ) und für Querschnitt C die Querkraft $A - p \cdot x = o$ ist. Dieses einfache Mittel zur Bestimmung des gefährlichsten Querschnitts ist bei der später folgenden Zusammenstellung entsprechend verwendet worden.

Bei den Konsolträgern mit freiem Ende liegt der gefährlichste Querschnitt in der Einspannungsstelle; das Moment an dieser Stelle beträgt bei gleichmäßig verteilter Belastung p t/m (Abb. 374): $M = p \cdot l \cdot \frac{l}{2} = p \cdot \frac{l^2}{2}$. Dieses Moment ist negativ, da die konvexe Seite des gebogenen Balkens nach oben liegt, während die vorher ermittelten Momente alle positiv waren.

Abb. 374. Gefährlichster Querschnitt bei Konsolträgern.



Weitere Träger und Belastungsfälle sind in der folgenden Zusammenstellung angegeben. Die Tabelle enthält für die betreffenden Beispiele die Auflagerdrücke, die Angabe des gefährlichsten Querschnitts und die Werte für die größten Momente. Die größten positiven Momente sind als $M_{\max}$, die größten negativen als $M_{\min}$ bezeichnet. Den Angaben für die statisch unbestimmten Träger in den Nr. 16 bis 25 der Zusammenstellung sind konstante Trägerquerschnitte zu Grunde gelegt. Die Einzellasten sind immer mit P, gleichmäßig verteilte Lasten mit p bezeichnet. Von einer Angabe der Durchbiegungen für die verschiedenen Fälle wurde abgesehen, da diese seltener benötigt werden und für den Bedarfsfall aus der »Hütte« usw. entnommen werden können.

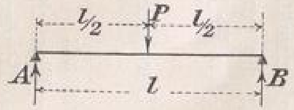
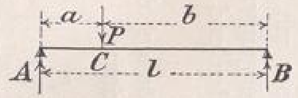
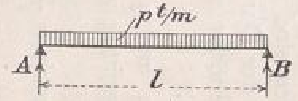
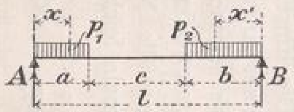
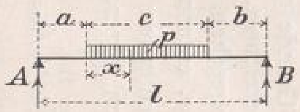
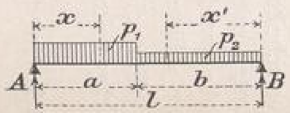
Für die wichtigsten Belastungsfälle Nr. 1 und 3 können die Durchbiegungen in Trägermitte nach folgenden Formeln leicht ermittelt werden:

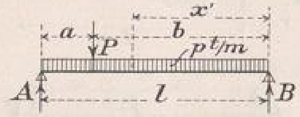
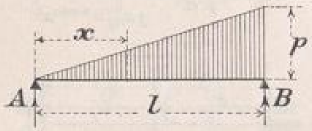
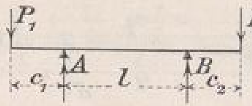
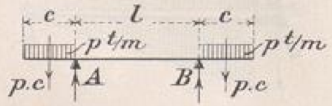
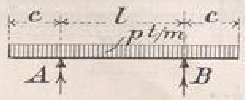
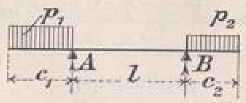
Belastungsfall Nr. 1: $f_{\max} = \frac{P \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot J}$ oder auch $= \frac{M \cdot l^2}{12\, E \cdot J}$

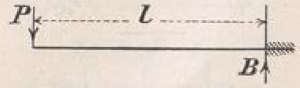
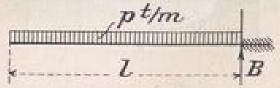
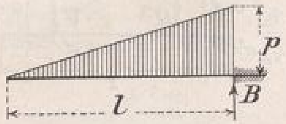
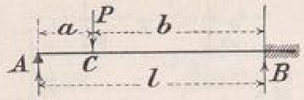
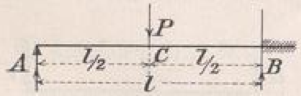
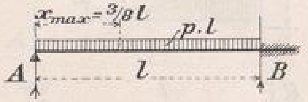
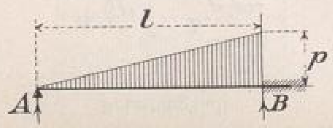
„ Nr. 3: $f_{\max} = \frac{5}{384} \cdot \frac{P \cdot l^3}{E \cdot J}$ „ „ $= \frac{5}{48} \cdot \frac{M \cdot l^2}{E \cdot J}$

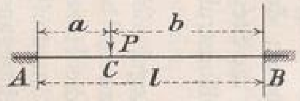
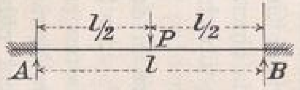
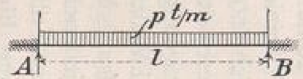
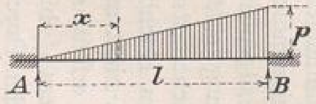
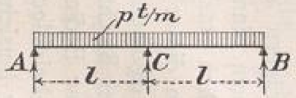
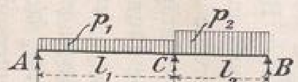
Hierin ist:
E = Elastizitätsmodul.
J = Trägheitsmoment.
M = Moment in Trägermitte.

4. Zusammenstellung für die Auflagerdrücke und größten Momente häufig vorkommender Belastungsfälle.

Nr.	Belastungsfall	Auflagerdrücke	Größte Biegungsmomente	Gefährlichster Querschnitt
		a) Frei aufliegender Träger auf zwei Endstützen.		
1.		$A = B = \frac{P}{2}$	$M_{max} = \frac{P \cdot l}{4}$	in Trägermitte
2.		$A = \frac{P \cdot b}{l},\ B = \frac{P \cdot a}{l}$	$M_{max} = \frac{P \cdot a \cdot b}{l}$	in C
3.		$A = B = \frac{p \cdot l}{2}$	$M_{max} = \frac{p \cdot l^2}{8}$	in Trägermitte
4.		$A = \frac{p_1 \cdot a\,(2l - a) + p_2 \cdot b^2}{2l}$ $B = \frac{p_1 \cdot a^2 + p_2 \cdot b \cdot (2l - b)}{2l}$	Für $A < p \cdot a : M_{max} = \frac{A^2}{2p_1}$ Für $B < p \cdot b : M_{max} = \frac{B^2}{2p_2}$	wo $A = p_1 \cdot x$ also für $x = \frac{A}{p_1}$ wo $B = p_2 \cdot x'$ also für $x' = \frac{B}{p_2}$
	für $a = b$ und $p_1 = p_2 = p$	$A = B = p \cdot a$	$M_{max} = \frac{p \cdot a^2}{2}$	Momente für alle Querschnitte der unbelasteten Strecke gleich
5.		$A = \frac{p \cdot c\,(2b + c)}{2l}$ $B = \frac{p \cdot c\,(2a + c)}{2l}$	$M_{max} = A\left(a + \frac{A}{2p}\right)$	wo $A = p \cdot x$ also für $x = \frac{A}{p}$
6.		$A = \frac{p_1 \cdot a\,(2l - a) + p_2 \cdot b^2}{2l}$ $B = \frac{p_1 \cdot a^2 + p_2 \cdot b\,(2l - b)}{2l}$	Wenn $A < p_1 \cdot a : M_{max} = \frac{A^2}{2p_1}$ Wenn $B < p_2 \cdot b : M_{max} = \frac{B_2}{2p_2}$	im Abstand $x = \frac{A}{p_1}$, wo $A = p_1 \cdot x$ im Abstand $x' = \frac{B}{p_2}$, wo $Z = p_2 \cdot x'$

Nr.	Belastungsfall	Auflagerdrücke	Größte Biegungsmomente	Gefährlichster Querschnitt
7.		$A = \frac{P \cdot b}{l} + \frac{p \cdot l}{2}$ $B = \frac{P \cdot a}{l} + \frac{p \cdot l}{2}$	Wenn $\frac{P}{p \cdot l} < \frac{b-a}{2\,a}$: $M_{max} = \frac{B^2}{2p}$ Wenn $\frac{P}{p \cdot l} > \frac{b-a}{2a}$: $M_{max} = \left(P + \frac{p\,l}{2}\right)\frac{a \cdot b}{l}$	von B im Abstand $x' = \frac{B}{p}$ $x'' = b$
8.		$A = \frac{p \cdot l}{6}$ $B = \frac{p \cdot l}{3}$	$M_{max} = \frac{\sqrt{3}}{27} \cdot \frac{p \cdot l}{2} = 0{,}128\,\frac{p \cdot l}{2}$	$x_{max} = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0{,}577\,l$
	b) Frei aufliegende Träger mit überkragenden Enden.			
9.	 Wenn $P_1 = P_2 = P$ und $c_1 = c_2 = c$	$A = \frac{P_1\,(l + c_1) - P_2 \cdot c_2}{l}$ $B = \frac{P_2\,(l + c_2) - P_1 \cdot c_1}{l}$ $A = P$ $B = P$	$M_{min} = -P_1 \cdot c_1$ oder $= -P_2 \cdot c_2$ jenachdem welcher Wert größer ist $M_{min} = -P \cdot c$	in A bzw. B für alle Querschnitte zwischen A und B konstant
10.		$A = B = p \cdot c$	$M_{min} = -\frac{p \cdot c^2}{2}$	für alle Querschnitte zwischen A und B konstant
11.		$A = B = p\left(\frac{l}{2} + c\right)$ Das größte positive Moment tritt auf, wenn nur die Strecke AB belastet:	$M_{min} = -\frac{p \cdot c^2}{2}$ $M_{mitte} = +\frac{p \cdot l^2}{8} - \frac{p \cdot c^2}{2}$ $M_{max} = \frac{p \cdot l^2}{8}$	in A und B in Mitte
12.		$A = \frac{p_1 \cdot c_1\,(2\,l + c_1) - p_2 \cdot c_2^2}{2\,l}$ $B = \frac{p_2 \cdot c_2\,(2\,l + c_2) - p_1 \cdot c_1^2}{2\,l}$	$M_{min} = -\frac{p_1 \cdot c_1^2}{2}$ oder $= -\frac{p_2 \cdot c_2^2}{2}$	in A bzw. in B

Nr.	Belastungsfall	Auflagerdrücke	Größte Biegungsmomente	Gefährlichster Querschnitt
	c) Konsolträger, an einem Ende eingespannt, am andern frei.			
13.		$B = P$	$M_{\min} = -P \cdot l$	in B
14.		$B = p \cdot l$	$M_{\min} = -\frac{p \cdot l^2}{2}$	in B
15.		$B = \frac{p \cdot l}{2}$	$M_{\min} = -\frac{p \cdot l^2}{6}$	in B
	d) Konsolträger mit Endstütze, an einem Ende eingespannt, am andern frei aufliegend.			
16.		$A = \frac{P \cdot b^2 (3a + 2b)}{2 l^3}$ $B = \frac{P \cdot a (2a^2 + 6a \cdot b + 3b^2)}{2 l^3}$	$M_{\max} = A \cdot a = \frac{P \cdot b^2 \cdot a (3a + 2b)}{2 l^3}$ $M_{\min} = A \cdot l - P \cdot b = -\frac{P \cdot a \cdot b (2a + b)}{2 l^2}$	in C bzw. in B
17.		$A = \frac{5}{16} \cdot P$ $B = \frac{11}{16} \cdot P$	$M_{\max} = \frac{5}{32} P \cdot l$ (in C) $M_{\min} = -\frac{6}{32} P \cdot l = -\frac{3}{16} P \cdot l$ (in B)	in B
18.		$A = \frac{3}{8} p \cdot l$ $B = \frac{5}{8} p \cdot l$	$M_{\max} = \frac{9}{128} \cdot p \cdot i^2$ (in $\frac{3}{8}\, l$ von A) $M_{\min} = -\frac{16}{128} p \cdot l^2 = -\frac{p \cdot l^2}{8}$ (in B)	in B
19.		$A = \frac{p \cdot l}{10}$ $B = \frac{4 p \cdot l}{10} = \frac{2}{5} p \cdot l$	$M_{\max} = \frac{p \cdot l^2}{75} \sqrt{5}$, in $\frac{l}{5} \sqrt{5}$ von A $M_{\min} = -\frac{p \cdot l^2}{15}$	in B

Nr.	Belastungsfall	Auflagerdrücke	Größte Biegungsmomente	Gefährlichster Querschnitt
		e) Beiderseits eingespannte Träger.		
20		$A = \frac{P(3a+b)\cdot b^2}{l^3}$ $B = \frac{P\cdot(a+3b)\cdot a^2}{l^3}$	$M_A = -\frac{P\cdot a\cdot b^2}{l^2}$ $M_B = -\frac{P\cdot a^2\cdot b}{l^2}$ $M_{\max} = A\cdot a - M_A$; (in C)	in A, wenn $a < b$ in B, wenn $b < a$
21.		$A = B = \frac{P}{2}$	$M_A = M_B = -\frac{P\cdot l}{8} = M_{\min}$ $M_{\max} = +\frac{P\cdot l}{8}$ (in C)	in A, B und C zugleich
22.		$A = B = \frac{p\cdot l}{2}$	$M_{\min} = -\frac{p\cdot l^2}{12}$ $M_{\max} = +\frac{p\cdot l^2}{24}$; (in Mitte)	in A und B
23.		$A = \frac{3}{20}\cdot p\cdot l$ $B = \frac{7}{20}p\cdot l$	$M_A = -\frac{p\cdot l^2}{30}$ $M_{\min} = -\frac{p\cdot l^2}{20}$ (in B) $M_{\max} = \text{rd. } \frac{1}{47}p\cdot l^2$ (im Abstand $x = l\cdot\sqrt{0{,}3}$)	in B
		f) Balken auf 3 Stützen.		
24.		$A = C = 0{,}375\,p\cdot l$ $B = 1{,}25\,p\cdot l$	$M_C = M_{\min} = -0{,}125\,p\cdot l^2\left(= -\frac{p\cdot l^2}{8}\right)$ $M_{\max} = 0{,}0703\,p\cdot l^2$ (im Abstand $0{,}375\,l$ von A u. B)	in C
25.		$A = \frac{p_1\cdot l_1}{2} - \frac{p_1\cdot l_1^3 + p_2\cdot l_2^3}{8\,l_1(l_1+l_2)}$ $B = \frac{p_2\cdot l_2}{2} - \frac{p_1\cdot l_1^3 + p_2\cdot l_2^3}{8\,l_2(l_1+l_2)}$ $C = \frac{p_1\cdot l_1}{2} + \frac{p_2\cdot l_2}{2} + \frac{p_1\cdot l_1^3 + p_2\, l_2^3}{8\,l_1\cdot l_2}$	$M_{\min} = M_C = -\frac{p_1\cdot l_1^3 + p_2\cdot l_2^3}{8(l_1+l_2)}$ $M_{1\max} = \frac{A^2}{2p_1}$ $\left(\text{im Abstand } x = \frac{A}{p_1} \text{ von } A\right)$ $M_{2\max} = \frac{B^2}{2p}$ $\left(\text{im Abstand } x' = \frac{B}{p_2} \text{ von } B\right)$	in C

g) Träger auf mehreren Stützen (kontinuierliche oder durchlaufende Träger).

In folgender Tabelle sind die Stützendrücke T_0, T_1 usw. und die Stützenmomente M_1, M_2 ..., sowie die größten positiven Momente $M_{1\max}$, $M_{2\max}$, in den einzelnen Feldern für eine gleichmäßig über den ganzen Träger verteilte Last p bei gleichen Stützenabständen l und konstantem Trägerquerschnitt enthalten.

Werte	Anzahl der Stützen				Einheiten
	3	4	5	6	
T_0	0,3750	0,4000	0,3929	0,3947	$p \cdot l$
T_1	1,2500	1,1000	1,1428	1,1317	»
T_2	—	—	0,9286	0,9736	»
M_1	0,1250	0,1000	0,1071	0,1053	$p \cdot l^2$
M_2	—	—	0,0714	0,0789	»
M_1 max	0,0703	0,0800	0,0772	0,0779	»
M_2 max	—	0,0250	0,0364	0,0332	»
M_3 max	—	—	—	0,0461	»

Nach diesen vorstehend gemachten Angaben können für die verschiedenen Belastungsfälle die zur Dimensionierung der Träger nötigen größten Momente ermittelt werden. Für event. hier nicht gegebene Belastungsfälle muß auf die betreffenden Werke der Statik verwiesen werden, doch wird man mit den hier gegebenen Fällen im Hochbau fast immer auskommen.

§ 24. Dimensionierung und konstruktive Ausbildung der einfachen Balkenträger.

1. Allgemeines. Die Dimensionierung der Träger hat in der Hauptsache nach dem größten Biegungsmoment zu erfolgen, das für die verschiedenen Belastungsfälle nach § 23 bestimmt werden kann. Für kleine Verhältnisse, wie diese im Hochbau am häufigsten vorkommen, genügen meist Träger aus Walzprofilen (⊏-, Z- I-Eisen), während für die größeren Spannweiten bzw. schwereren Lasten mitunter genietete Blechträger zur Verwendung kommen müssen. Aus dem ungünstigsten Biegungsmoment M ergibt sich das erforderliche Widerstandsmoment W nach der Formel $W = \frac{M}{k}$, wo k = zulässige Beanspruchung des Materials. Diesem Widerstandsmoment entsprechend ist das Trägerprofil zu wählen.

Auf die Dimensionierung kann ferner noch die Querkraft und die zulässige größte Durchbiegung von Einfluß sein. Die Querkraft spielt infolge der von ihrer Größe abhängigen horizontalen Schubspannungen eine Rolle hinsichtlich der Stegstärken und bei genieteten Blechträgern auch hinsichtlich der Vernietung der Gurtungen; doch ist eine Rechnung in diesem Sinne im allgemeinen nicht nötig, da einerseits die Stegstärken der Walzprofile reichlich stark genug sind, andererseits die üblichen Konstruktionsweisen der Blechträger in dieser Hinsicht fast immer genügen.

Die Durchbiegung soll im Hochbau bei Walzträgern in der Regel nicht mehr als $\frac{1}{500}$ bis $\frac{1}{600}$ und bei Blechträgen nicht mehr als $\frac{1}{800}$ bis $\frac{1}{1000}$ der Stützweite betragen. In der Regel ist diese Bedingung erfüllt, wenn je nach Belastungsart die Höhe der Walzprofile $\frac{1}{18}$ bis $\frac{1}{24}$, bei Blechträgern $\frac{1}{10}$ bis $\frac{1}{15}$ der Stützweite beträgt. Im übrigen soll auf die Untersuchung hinsichtlich der Durchbiegung hier nicht näher eingegangen werden, sondern es möge der Hinweis auf das auf S. 383 unten gesagte sowie die »Hütte« und die entsprechenden Werke der Statik und Festigkeitslehre genügen.