Lehrbuch des Hochbaues

Grundbau, Steinkonstruktionen, Holzkonstruktionen, Eisenkonstruktionen , Eisenbetonkonstruktionen

Esselborn, Karl

Leipzig, 1908

3. Auflagerdrücke und innere Kräfte

urn:nbn:de:hbz:466:1-50294

Eventuell nötige weitere Angaben können aus den betreffenden Handbüchern entnommen werden.

Das Eigengewicht der Träger selbst ist von vornherein nicht bekannt; es muß deshalb für die Berechnung vorläufig geschätzt, in die Belastung mit eingerechnet und nach der Dimensionierung nachgeprüft bezw. korrigiert werden. Oft genügt es auch, das Trägergewicht bei der Dimensionierung ganz zu vernachlässigen und die geringe Vergrößerung der Spannung durch das Trägergewicht nachträglich nachzuweisen, da der verhältnismäßig geringe Einfluß des Trägergewichts von untergeordneter Bedeutung ist.

3. **Auflagerdrücke und innere Kräfte.** Nachdem die äußeren Belastungen der Träger bestimmt sind, kann zu der Berechnung der Auflagerdrücke und dann zur Ermittelung der innern Kräfte übergegangen werden. Die Auflagerkräfte stehen mit den Belastungen im Gleichgewicht und sind demgemäß mit Hilfe der hierdurch gegebenen Bedingung zu ermitteln. Für ebene Konstruktionen lauten die Gleichgewichtsbedingungen:

1. Die Summe aller Vertikalkräfte bzw. aller Vertikalkomponenten der Kräfte ist $= o$; $\Sigma V = o$.
2. Die Summe aller Horizontalkräfte bzw. aller Horizontalkomponenten der Kräfte ist ebenfalls $= o$; $\Sigma H = o$.
3. Die Summe aller Momente sämtlicher Kräfte bezogen auf einen beliebigen Drehpunkt ist gleichfalls $= o$; $\Sigma M = o$.

Aus diesen 3 Bedingungen lassen sich die Auflagerkräfte immer bestimmen, wenn die Anzahl der Auflagerunbekannten nicht mehr als drei ist. Doch dürfen auch nicht weniger als 3 Unbekannte vorhanden sein, da in diesem Falle der Träger labil gelagert ist; d. h. es können Belastungsfälle vorkommen, für welche ein Gleichgewicht nicht möglich ist, also die Kräfte nicht aufgenommen werden können. Im allgemeinen erhält deshalb ein Träger eine solche Lagerung, daß 3 Auflagerunbekannte vorhanden sind; der Träger ist dann statisch bestimmt. Eine solche statisch bestimmte Lagerung liegt z. B. vor, wenn ein Träger durch ein festes Auflager (mit 2 Unbekannten) und ein bewegliches Auflager (mit einer Unbekannten) gestützt ist (Abb. 364).

Das feste Auflager hat den Zweck, bei allgemeiner Belastung mit horizontalen und vertikalen bzw. schrägen Kräften neben der auf es entfallenden lotrechten Kraft noch die Resultierende der Horizontalkomponenten aufzunehmen, während das lose Auflager nur eine Kraft senkrecht zu seiner Bewegungsrichtung übertragen kann. Sind alle äußeren Kräfte lotrecht, so erhalten die beiden Auflager nur senkrechte Belastungen. Das bewegliche Auflager dient noch gleichzeitig dazu die durch die Temperaturschwankungen bedingten Längenänderungen der Träger zuzulassen.

Abb. 364. Berechnung der Auflagerdrücke. 1. Beispiel.

Die rechnerische Ermittelung der Auflagerunbekannten mit Hilfe der 3 Gleichgewichtsbedingungen sei nachstehend an einigen Beispielen vorgeführt: So ergeben sich z. B. für den allgemeinen Belastungsfall nach Abb. 364 die 3 Gleichungen:

1. Aus $\Sigma H = o$: $H - P_3 \cdot \cos\alpha = o$

$$H = P_3 \cdot \cos\alpha.$$

2. Aus $\Sigma M = o$: für Drehpunkt in A:

$$P_1 \cdot a_1 + P_2\, a_2 + P_3 \cdot \sin\alpha \cdot a_3 - B \cdot l = o$$

$$B = \frac{P_1 \cdot a_1 \cdot + P_2 \cdot a_2 + P_3 \cdot \sin\alpha \cdot a_3}{l}.$$

3. Aus $\Sigma V = o$:

$$A + B - P_1 - P_2 - P_3 \cdot \sin\alpha = o$$

$$A + \frac{P_1 \cdot a_1 + P_2 \cdot a_2 + P_3 \cdot \sin\alpha \cdot a_3}{l} - P_1 - P_2 - P_3 \cdot \sin\alpha = o$$

$$A = \frac{P_1 (l - a_1) + P_2 \cdot (l - a_2) + P_3 \cdot \sin\alpha \cdot (l - a_3)}{l}$$

$$= \frac{P_1 \cdot b_1 + P_2 \cdot b_2 + P_3 \cdot \sin\alpha \cdot b_3}{l}.$$

An Stelle der 3 Gleichungen $\Sigma V = o$, $\Sigma H = o$ und $\Sigma M = o$ kann auch die Momentengleichung zweimal für verschiedene Drehpunkte und noch eine von den Gleichungen $\Sigma H = o$, $\Sigma V = o$ angewendet werden. So ergibt sich z. B. die letzte Gleichung für den Auflagerdruck A direkt aus der Momentengleichung für den Drehpunkt B. Mitunter ist es auch vorteilhaft, dreimal die Momentengleichung für drei verschiedene Drehpunkte zu benutzen. In der Regel empfiehlt es sich, die lotrechten Auflagerdrücke A und B mit Hilfe der Momentengleichungen für B bzw. A und die Horizontalkomponente H des festen Auflagers nach $\Sigma H = o$ zu bestimmen. Mit Hilfe von $\Sigma V = o$ kann man die so gefundenen Werte von A und B kontrollieren.

Wenn alle äußeren Belastungen lotrecht sind, hat auch das feste Auflager nur eine senkrechte Kraft aufzunehmen. Eine solche Belastungsweise spielt bei den Balkenträger des Hochbaues — Dachstuhlkonstruktionen und besondere Fälle ausgenommen — fast durchweg die Hauptrolle. Man hat hierbei also nur die lotrechten Auflagerdrücke A und B zu bestimmen, was wiederum am zweckmäßigsten mit den Gleichungen $\Sigma M = o$ für Drehpunkt B bzw. für Drehpunkt A geschieht. Zur Kontrolle muß $A + B =$ der Summe der äußeren Belastungen sein.

Beispiel (Abb. 365): Aus $\Sigma M = o$ für Drehpunkt B folgt: $A = \frac{P_1 \cdot b_1 + P_2 \cdot b_2}{l}$,

aus $\Sigma M = o$ für Drehpunkt A: $B = \frac{P_1 \cdot a_1 + P_2 \cdot a_2}{l}$.

Kontrolle: $A + B = \frac{P_1 \cdot b_1 + P_2 \cdot b_2 + P_1 \cdot a_1 + P_2 \cdot a_2}{l} = \frac{P_1 \cdot (a_1 + b_1) + P_2 \cdot (a_2 + b_2)}{l}$

$$= \frac{P_1 \cdot l + P_2 \cdot l}{l} = P_1 + P_2.$$

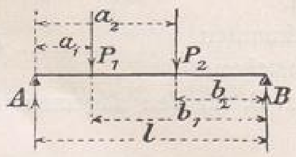


Abb. 365. Berechnung der Auflagerdrücke. 2. Beispiel.

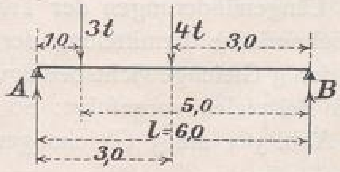


Abb. 366. Berechnung der Auflagerdrücke. Zahlenbeispiel.

Zahlenbeispiel (Abb. 366): $A = \frac{3 \cdot 5{,}0 + 4 \cdot 3{,}0}{6{,}0} = \frac{15 + 12}{6{,}0} = \frac{27}{6} = 4{,}5$ t,

$$B = \frac{3 \cdot 1{,}0 + 4 \cdot 3{,}0}{6{,}0} = \frac{3 + 12}{6} = \frac{15}{6} = 2{,}5 \text{ t}.$$

Kontrolle: $A + B = 4{,}5 + 2{,}5 = 7$ t u. $P_1 + P_2 = 3 + 4 = 7$ t.

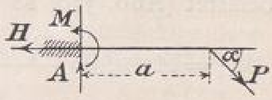
Bei symmetrischer Belastung sind die beiden Auflagerdrücke ebenfalls symmetrisch, also einander gleich. So ist z. B. bei einer Einzellast P in der Mitte des Trägers $A = B = \frac{P}{2}$ und bei einer über die ganze Trägerlänge gleichmäßig verteilten Belastung für das lfd. Meter $A = B = p \cdot \frac{l}{2}$.

Die Auflager von Trägern, die nur lotrechte Lasten aufzunehmen haben, werden in kleineren Verhältnissen wie bei Deckenträgern, Unterzügen usw. meist gleichartig ausgebildet, d. h. es wird kein Unterschied zwischen dem festen und dem beweglichen Auflager gemacht. Die Träger werden dann gewöhnlich auf die Auflagersteine direkt oder unter Benutzung einer besonderen Auflagerplatte aufgelegt und meist eingemauert. Auf die Längenänderungen durch Temperaturschwankungen braucht hierbei in der Regel keine Rücksicht genommen zu werden, da diese bei solchen kleinen Verhältnissen eine untergeordnete Rolle spielen. Bei Trägern von größeren Spannweiten, die höheren Temperaturschwankungen ausgesetzt sind, ist mit Rücksicht auf die hierdurch bedingten bedeutenderen Längenänderungen auf eine sachgemäße Lagerausbildung Wert zu legen (siehe Lager der Balkenträger).

Konsol- oder Kragträger werden diejenigen Träger genannt, die nur an einem Ende gelagert sind; damit Gleichgewicht möglich ist und die äußeren Kräfte getragen werden können, muß mit der Lagerung eine Einspannung verbunden sein. Die Einspannungsstelle vertritt dann drei Unbekannte, eine senkrechte und wagerechte Komponente der Auflagerreaktion sowie das Einspannungsmoment; der Träger ist also statisch bestimmt. Die drei Auflagerunbekannten V, H und M können mit Hilfe der drei Gleichgewichtsbedingungen $\Sigma V = 0$, $\Sigma H = 0$ und $\Sigma M = 0$ bestimmt werden. So ist z. B. für Abb. 367:

$$A - P \cdot \sin\alpha = 0, \qquad A = P \cdot \sin\alpha,$$
$$H - P \cdot \cos\alpha = 0, \qquad H = P \cdot \cos\alpha,$$
$$M - P \cdot \sin\alpha \cdot a = 0, \qquad M = P \cdot \sin\alpha \cdot a.$$

Abb. 367. Konsol oder Kragträger.



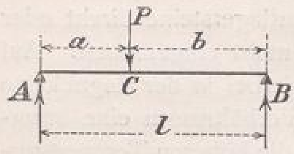
Wenn die Belastungen sämtlich wieder lotrecht sind, so wird $H = 0$.

Wird bei einem, an dem einen Ende eingespannten Träger das andere Ende noch unterstützt (siehe die Zusammenstellung S. 386), so hat der Träger eine Unbekannte mehr als Gleichungen durch das Gleichgewicht gegeben sind; er ist also einfach statisch unbestimmt.

Im Hochbau kommen ferner sehr oft Träger zur Verwendung, die über mehrere Stützen hinweglaufen, z. B. wenn Deckenträger zwischen ihren Endauflagern noch auf einem oder mehreren Unterzügen aufliegen und so außer den Endstützen noch Zwischenstützen erhalten haben. Ist ein Zwischenlager vorhanden, so ist der Träger einfach statisch unbestimmt, bei zwei oder mehr Zwischenauflagern zwei- bzw. mehrfach statisch unbestimmt. In der Regel haben solche Träger (kontinuierliche Träger) des Hochbaues nur lotrechte Lasten zn tragen, und es wird fast durchweg auf eine besondere Ausbildung der Lager als bewegliche oder feste Lager keine besondere Rücksicht genommen. Ist bei größeren, über mehrere Auflager hinweglaufende Träger Wert auf die statische Bestimmtheit zu legen, so kann diese durch Einfügen von Gelenken erreicht werden. Solche Gelenkträger werden auch als GERBERsche Träger bezeichnet, doch möge auf diese hier nicht näher eingegangen werden. Die für die verschiedenen Trägerarten und die im Hochbau häufig vorkommenden Belastungsfälle auftretenden Auflagerdrücke sind aus der später folgenden Zusammenstellung ersichtlich.

Nachdem die Auflagerdrücke der Träger ermittelt sind, kann zur Bestimmung der inneren Kräfte übergegangen werden. Als innere Kräfte treten bei den vollwandigen Trägern Biegungsmomente, Querkräfte und Schubkräfte auf. Die Dimensionierung der Träger hat in erster Linie nach den Biegungsmomenten zu erfolgen. Wegen der Berechnung auf Biegung wird auf § 10, 3 verwiesen. Man hat hiernach für die jeweils vorliegenden Träger die ungünstigsten Biegungsmomente zu bestimmen und diese den Spannungsberechnungen bzw. der Dimensionierung zugrunde zu legen. Derjenige Querschnitt, bei dem das größte Biegungsmoment bei der ungünstigsten Belastungsweise auftritt, wird als **gefährlichster Querschnitt** bezeichnet. Bei einer Belastung durch Einzellasten liegt dieser immer in dem Angriffspunkt einer dieser Lasten; so ist z. B. für Abb. 368 das Moment für den gefährlichsten Querschnitt C: $M_C = A \cdot a = \frac{P \cdot a \cdot b}{l}$.

Abb. 368.
Träger mit einer Einzellast.



Das **größte Moment für einen Balken auf zwei Stützen** durch eine Einzellast P tritt auf für den Querschnitt in der Mitte, wenn die Last in diesem Querschnitt

Abb. 369. Ungünstigste Laststellung für Träger mit Einzellast.

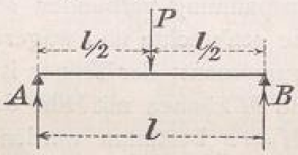
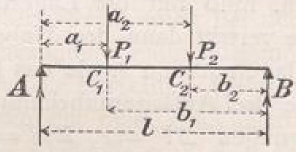


Abb. 370.
Träger mit zwei Einzellasten.



liegt, und ist $M_{\text{mitte}} = A \cdot \frac{l}{2} = \frac{P \cdot l}{4}$ (Abb. 369). Ist der Träger durch zwei Einzellasten belastet (Abb. 370) so ist:

$$M_{C_1} = A \cdot a_1 = \frac{(P_1 \cdot b_1 + P_2 \cdot b_2)}{l} \cdot a_1 \text{ und } M_{C_2} = B \cdot b_2 = \frac{(P_1 \cdot a_1 + P_2 \cdot a_2)}{l} \cdot b_2.$$

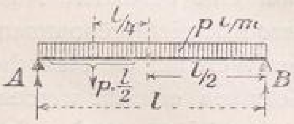
Der größere dieser beiden Werte ist der weiteren Berechnung zugrunde zu legen und zeigt den gefährlichen Querschnitt an.

Ganz analog ist bei mehreren Lasten zu verfahren; für die verschiedenen Lastpunkte sind die Momente zu ermitteln, und das größte Moment ist für die Dimensionierung maßgebend. Der gefährlichste Querschnitt wird also hierbei durch Vergleichsrechnung gefunden.

Wenn die Belastung gleichmäßig über die ganze Trägerlänge verteilt ist (kontinuierliche Belastung), so tritt das größte Moment in der Mitte des Balkens auf. Ist diese kontinuierliche Last $= p$ t/m und die Stützweite des Trägers $= l$ in m, so ist dieses Moment (nach Abb. 371)

$$M_{\text{mitte}} = \frac{A \cdot l}{2} - \frac{p \cdot l}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{p \cdot l}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{p \cdot l^2}{8} = \frac{p \cdot l^2}{8}.$$

Abb. 371. Träger mit gleichmäßig verteilter Belastung.

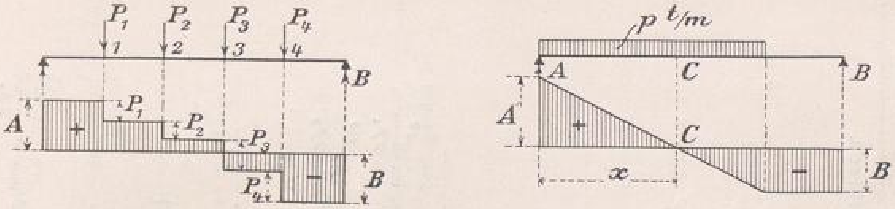


Allgemein läßt sich der Querschnitt, für den bei einer vorliegenden Belastung das größte Moment auftritt, leicht mit Hilfe der Querkraft ermitteln. Unter der **Querkraft eines Querschnitts** versteht man die Summe der Kräfte auf der einen Seite des betreffenden Querschnitts, wobei die auf dessen linker Seite nach oben wirkenden Kräfte positiv, die nach unten wirkenden negativ einzuführen sind. So ist z. B. für Abb. 368

die Querkraft der Querschnitte links von C: $Q = A$ und der Querschnitte rechts von C: $Q = A - P = -B$. Für Abb. 370 ist $Q_{A \text{ bis } C_1} = A$, $Q_{C_1 \text{ bis } C_2} = A - P_1$ oder $= -B + P_2$ und $Q_{C_2 \text{ bis } Z} = -B$. Nach Abb. 371 ist die Querkraft des Querschnitts in der Mitte: $Q_{\text{mitte}} = A - p \cdot \frac{l}{2} = o$.

Die Querkraft kann als Merkmal für den gefährlichsten Querschnitt (größtes Biegungsmoment) Verwendung finden insofern, daß das größte Biegungsmoment für denjenigen Querschnitt auftritt, für den die Querkraft $= o$ ist, bzw. von positiv in negativ übergeht. Sind z. B. für die in den Abb. 372 u. 373 dargestellten Belastungsfälle die Querkräfte der verschiedenen Querschnitte durch die Ordinaten der gezeichneten Diagramme gegeben,

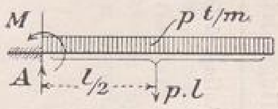
Abb. 372 u. 373. Bestimmung des gefährlichsten Querschnitts.



so stellen die Querschnitte 3 bzw. C die gefährlichsten Querschnitte dar, da für Querschnitt 3 die positive Querkraft in die negative übergeht ($A - P_1 - P_2$ positiv, $A - P_1 - P_2 - P_3$ negativ) und für Querschnitt C die Querkraft $A - p \cdot x = o$ ist. Dieses einfache Mittel zur Bestimmung des gefährlichsten Querschnitts ist bei der später folgenden Zusammenstellung entsprechend verwendet worden.

Bei den Konsolträgern mit freiem Ende liegt der gefährlichste Querschnitt in der Einspannungsstelle; das Moment an dieser Stelle beträgt bei gleichmäßig verteilter Belastung p t/m (Abb. 374): $M = p \cdot l \cdot \frac{l}{2} = p \cdot \frac{l^2}{2}$. Dieses Moment ist negativ, da die konvexe Seite des gebogenen Balkens nach oben liegt, während die vorher ermittelten Momente alle positiv waren.

Abb. 374. Gefährlichster Querschnitt bei Konsolträgern.



Weitere Träger und Belastungsfälle sind in der folgenden Zusammenstellung angegeben. Die Tabelle enthält für die betreffenden Beispiele die Auflagerdrücke, die Angabe des gefährlichsten Querschnitts und die Werte für die größten Momente. Die größten positiven Momente sind als $M_{\max}$, die größten negativen als $M_{\min}$ bezeichnet. Den Angaben für die statisch unbestimmten Träger in den Nr. 16 bis 25 der Zusammenstellung sind konstante Trägerquerschnitte zu Grunde gelegt. Die Einzellasten sind immer mit P, gleichmäßig verteilte Lasten mit p bezeichnet. Von einer Angabe der Durchbiegungen für die verschiedenen Fälle wurde abgesehen, da diese seltener benötigt werden und für den Bedarfsfall aus der »Hütte« usw. entnommen werden können.

Für die wichtigsten Belastungsfälle Nr. 1 und 3 können die Durchbiegungen in Trägermitte nach folgenden Formeln leicht ermittelt werden:

Belastungsfall Nr. 1: $f_{\max} = \frac{P \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot J}$ oder auch $= \frac{M \cdot l^2}{12\, E \cdot J}$

„ Nr. 3: $f_{\max} = \frac{5}{384} \cdot \frac{P \cdot l^3}{E \cdot J}$ „ „ $= \frac{5}{48} \cdot \frac{M \cdot l^2}{E \cdot J}$

Hierin ist:
E = Elastizitätsmodul.
J = Trägheitsmoment.
M = Moment in Trägermitte.